

Problema 7

Siguen M i N els punts migs dels costats \overline{BC} i \overline{AD} , respectivament, del quadrat ABCD.

Siga K un punt de la prolongació de la diagonal \overline{CA} (A resta entre C i K).

El segment \overline{KM} talla el costat \overline{AB} en el punt L. Demostreu que els angles $\angle KNA$, $\angle LNA$ són iguals.

Solució:

Siga $a = \overline{AB}$ costat del quadrat.

La recta KN talla la recta AB en el punt L'.

La recta MN passa pel centre O del quadrat.

$$\overline{OM} = \overline{ON} = \frac{a}{2}.$$

Els triangles $\triangle KON$, $\triangle KAL'$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{AL}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{KA}}{\overline{KO}}, \text{ aleshores, } \overline{AL} = \frac{a}{2} \cdot \frac{\overline{KA}}{\overline{KO}}.$$

Els triangles $\triangle KOM$, $\triangle KAL$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{AL'}}{\overline{ON}} = \frac{\overline{KA}}{\overline{KO}}, \text{ aleshores, } \overline{AL'} = \frac{a}{2} \cdot \frac{\overline{KA}}{\overline{KO}}.$$

Aleshores, $\overline{AL} = \overline{AL'}$.

Els triangles rectangles $\triangle ALN$, $\triangle AL'N$ són iguals ja que tenen els catets corresponents iguals.

Aleshores, $\angle LNA = \angle L'NA$, per tant, $\angle LNA = \angle KNA$.

