

Problema 19

La recta que va des d'un vèrtex d'un paral·lelogram al punt mig d'un dels costats oposats, divideix la diagonal en relació $\frac{1}{3}$.

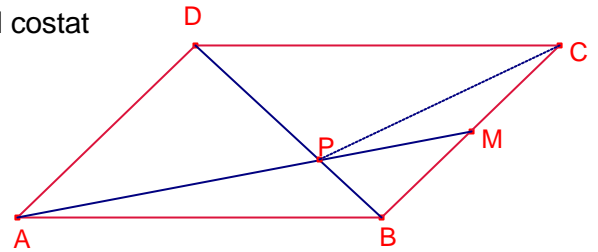
Bruño, problema 125. Pàgina 175.

Solució:

Siga ABCD un paral·lelogram. Sigui M el punt mig del costat \overline{BC} .

La recta AM talla la diagonal \overline{BD} en el punt P.

Dos triangles que tenen la mateixa altura les àrees són proporcionals a les bases.



Siga S l'àrea del triangle $\triangle BMP$.

Siga T l'àrea del triangle $\triangle ABP$.

Els triangles $\triangle BMP$, $\triangle MCP$ tenen la mateixa altura i les bases mesuren igual. Aleshores, $S_{BMP} = S_{MCP} = S$.

Els triangles $\triangle BMP$ i $\triangle DAP$ són semblants i la raó és 1:2. Aleshores, $S_{DAP} = 2^2 S_{BMP} = 4S$.

Els triangles $\triangle ABD$, $\triangle CDB$ són iguals. Aleshores, $S_{ABD} = S_{CDB}$.

$$S_{DCP} = S_{ABD} - (S_{BMP} + S_{MCP}) = T + 4S - (2S) = T + 2S$$

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{BD}} = \frac{S_{ABP}}{S_{ABD}} = \frac{T}{4S + T}$$

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{BD}} = \frac{S_{PBC}}{S_{BCD}} = \frac{2S}{4S + T}$$

Igualant les expressions anteriors:

$$\frac{T}{4S + T} = \frac{2S}{4S + T}$$

Aleshores: $T = 2S$.

$$\text{Per tant, } \frac{\overline{BP}}{\overline{BD}} = \frac{T}{4S + T} = \frac{2S}{6S} = \frac{1}{3}$$