

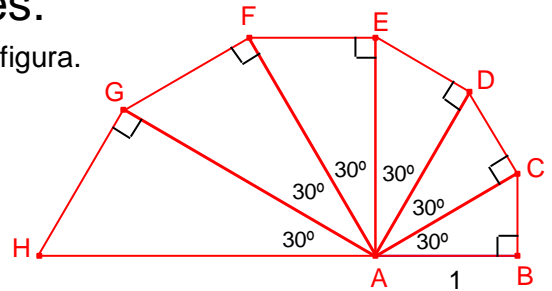


Espirale de triangles rectangles.

Una espiral està formada per 6 triangles com els de la figura.
Els angles de tots els triangles són 30° , 60° , 90° .

Si $\overline{AB} = 1\text{cm}$, determineu:

- La mesura de totes les hipotenuses.
- L'àrea afitada pels 6 triangles.



Solució:

Tots els triangles són semblants. Calculem la hipotenusa del triangle $\triangle ABC$.

$$\text{Siga } x = \overline{AC}. \quad \overline{BC} = \frac{1}{2} \overline{AC}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle ABC$: $\overline{AC} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, $\overline{BC} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

a)

Les hipotenuses formen una progressió geomètrica de primer terme $\overline{AC} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ i raó

$$r = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Utilitzarem la funció CALC per calcular les altres hipotenuses

La mesura de les altres hipotenuses és $\overline{AC} \cdot r^{n-1} = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^n$, $n = 2, 3, 4, 5, 6$:

($\frac{\sqrt{\square}}{\square}$ 2 $\sqrt{\square}$ 3 \blacktriangleright \blacktriangleleft 3 \blacktriangleright) x^{\square} x^{\square} =

$$\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^x$$

1

CALC 2 = = CALC 3 = = CALC 4 = = CALC 5 = = CALC 6 = =

$\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^x$	$\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^x$
$x = 2$	$\frac{4}{3}$

$\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^x$	$\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^x$
$x = 3$	$\frac{8\sqrt{3}}{9}$

$\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^x$	$\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^x$
$x = 4$	$\frac{16}{9}$

$\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^x$ $x = 5$	$\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^x$ 2.052800957
$\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^x$ $x = 6$	$\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^x$ $\frac{64}{27}$

Les hipotenuses mesuren:

$$\overline{AD} = \frac{4}{3}, \overline{AE} = \frac{8\sqrt{3}}{9}, \overline{AF} = \frac{16}{9}, \overline{AG} \approx 2.053, \overline{AH} = \frac{64}{27}.$$

b)

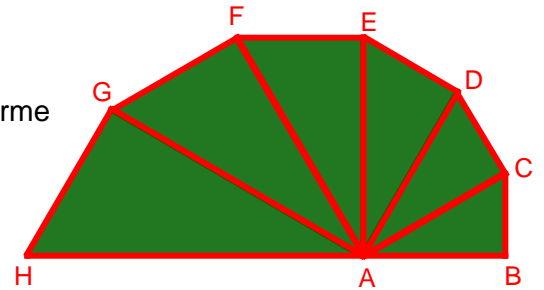
L'àrea del triangle rectangle $\triangle ABC$ és:

$$S_1 = \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{BC} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

Les àrees formen una progressió geomètrica de primer terme

$$S_1 = \frac{\sqrt{3}}{6} \text{ i de raó } r^2 = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{4}{3}.$$

$$S_T = \sum_{x=1}^6 \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right) \left(\frac{4}{3}\right)^{x-1}.$$



Utilitzarem la funció sumes finites:



$\sum_{x=1}^6 \left(\frac{\sqrt{3}}{6} \left(\frac{4}{3}\right)^{x-1}\right)$	$\sum_{x=1}^6 \left(\frac{\sqrt{3}}{6} \left(\frac{4}{3}\right)^{x-1}\right)$ 3.999873161
---	--

L'àrea total és:

$$S_T = \sum_{x=1}^6 \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right) \left(\frac{4}{3}\right)^{x-1} \approx 3.999873161.$$