Latituds curioses.

Equacions i trigonometria

Problema

a) Determineu la latitud del paral·lel que divideix l'hemisferi nord de la Terra en dues zones d'igual àrea. Es suposa la Terra esfèrica.

b) Determineu la latitud del paral·lel que divideix l'hemisferi nord de la Terra en dues zones d'igual volum. Es suposa la Terra esfèrica.

Solució:

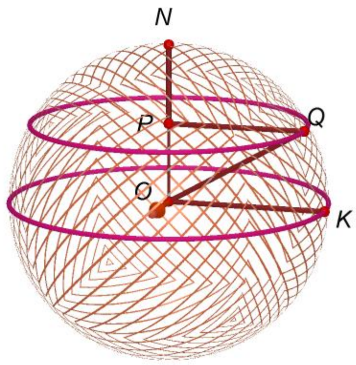
a)

Siga O el centre de la Terra. Siga N el pol Nord. Siga R el radi de la Terra.

El plànol del paral·lel que cerquem talla l'eix de l'esfera en el punt Q.

Siga $h = \overline{PN}$ altura del casquet.

Siga $\alpha = \angle QOK$ latitud del paral·lel.



$\angle PQO = \angle QOK = \alpha$.

L'àrea del casquet és:

$S_{casquet} = 2\pi Rh$.

L'àrea de la zona compresa entre l'Equador i el paral·lel és igual a l'àrea de mitja esfera menys l'àrea del casquet:

$$S_{zona} = \frac{1}{2}4\pi R^2 - 2\pi Rh = 2\pi R(R-h).$$

Les dues àrees han de ser iguals, aleshores:

$2\pi Rh = 2\pi R(R-h)$.

Aleshores, $h = \frac{1}{2}R$.

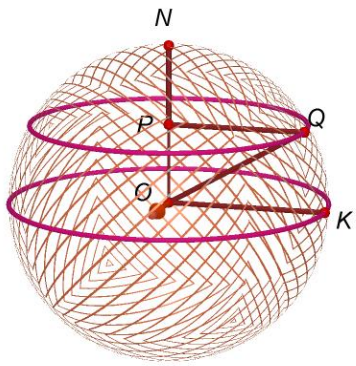
$$\overline{OP} = \overline{PN} = \frac{1}{2}R.$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OPQ}$:

$$\sin\alpha = \frac{\overline{OP}}{\overline{OQ}} = \frac{1}{2}.$$

Aleshores, $\alpha = 30^{o}$.

b)



Siga O el centre de la Terra. Siga N el pol Nord. Siga R el radi de la Terra.

El plànol del paral·lel que cerquem talla l'eix de l'esfera en el punt Q.

Siga $h = \overline{PN}$ altura del casquet.

Siga $\alpha = \angle QOK$ latitud del paral·lel.

$\angle PQO = \angle QOK = \alpha$.

El volum del casquet és:

$$V_{casquet} = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3} \right).$$

El volum de la zona compresa entre l'Equador i el paral·lel és igual al volum de mitja esfera menys el volum del casquet:

$$V_{zona} = \frac{1}{2}\frac{4}{3}\pi R^3 - \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3} \right).$$

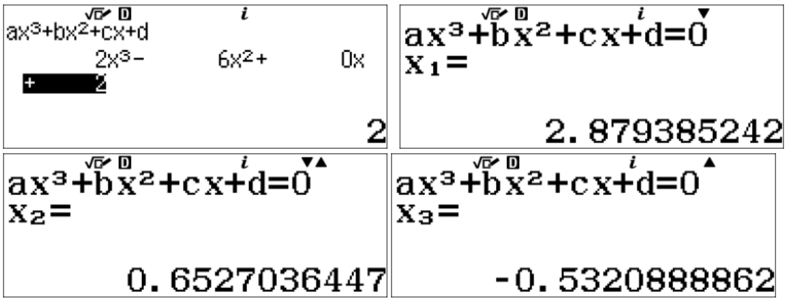
Els dos volums han de ser iguals, aleshores:

$$\pi h^2 \left(R - \frac{h}{3} \right) = \frac{2}{3}\pi R^3 - \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3} \right). \quad 2h^2 \left(R - \frac{h}{3} \right) = \frac{2}{3} R^3 .$$

$$2h^3 - 6Rh^2 + 3R^3 = 0.$$

$$2\left(\frac{h}{R} \right)^3 - 6\left(\frac{h}{R} \right)^2 + 3 = 0.$$

Resolent l'equació de tercer grau:

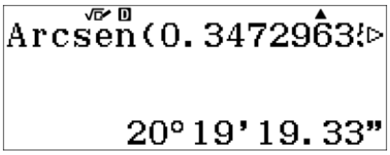


Aleshores $h = 0.6527036447 R$.

$$\overline{OP} = R - h = 0.3472963553 R.$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OPQ}$:

$$\sin\alpha = \frac{\overline{OP}}{\overline{OQ}} \approx 0.3472963553.$$



Aleshores la latitud és $\alpha \approx 20º19'19.33''$.