



Àrea d'un triangle inscrit.

Funció quadràtica

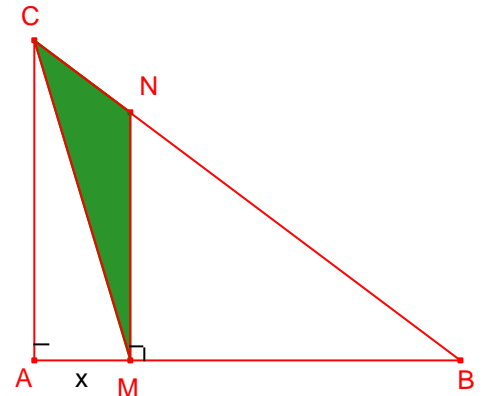
Siga el triangle rectangle $\triangle ABC$, $A = 90^\circ$ de catets $\overline{AB} = 8$ cm i $\overline{AC} = 6$ cm.

Siga el punt M del catet \overline{AB} i el punt N de la hipotenusa \overline{BC} tal que \overline{MN} és perpendicular a \overline{AB} .

Siga $x = \overline{AM}$.

- Si $x = 1$, calculeu l'àrea del triangle $\triangle CMN$.
- Quins valors pot tenir x ?
- Ompliu la següent taula:

x	Àrea $\triangle CMN$ $S(x)$
0	
0'5	
1	
1'5	
2	
2'5	
3	
3'5	
4	
4'5	
5	
x	



d) Quin tipus de funció és $S(x)$. Escriu les seues propietats. Representeu la funció.

e) Per a quin valor de x l'àrea del triangle $\triangle CMN$ és màxima?. Quina és l'àrea màxima?.

f) Si l'àrea del triangle $\triangle CMN$ és 4 cm^2 quin és el valor de x ?

g) Per a quins valors de x l'àrea del triangle $\triangle CMN$ és major o igual que 3 cm^2 ?

Solució:

$$\overline{MB} = 8 - x.$$

Els triangles $\triangle ABC$, $\triangle MBN$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{MN}}{8 - x} = \frac{6}{8}. \quad \overline{MN} = \frac{3}{4}(8 - x).$$

L'àrea del triangle $\triangle CMN$ és:

$$S_{\triangle CMN} = \frac{1}{2} \overline{MN} \cdot \overline{AM}.$$

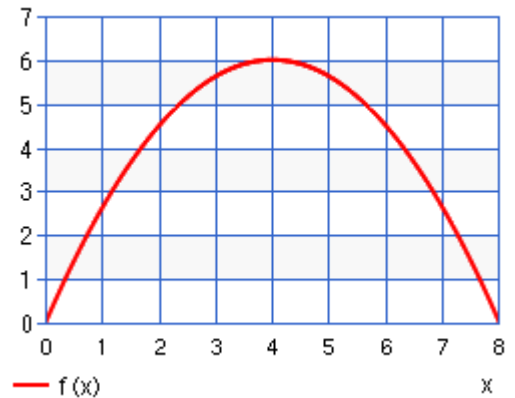
$$S(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} (8 - x)x, \quad x \in [0, 8].$$

$S(x) = -\frac{3}{8}x^2 + 3x$, la funció és una paràbola convexa.

Per construir la taula utilitzarem el menú TAULA de la calculadora:

$f(x) = -\frac{3}{8}x^2 + 3x$	Rango tabla Inic.: 0 Final: 8 Paso: 1																				
<table border="1"> <thead> <tr> <th>x</th> <th>f(x)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>2</td><td>2.625</td></tr> <tr><td>3</td><td>4.5</td></tr> <tr><td>4</td><td>5.625</td></tr> </tbody> </table>	x	f(x)	1	0	2	2.625	3	4.5	4	5.625	<table border="1"> <thead> <tr> <th>x</th> <th>f(x)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>5</td><td>6</td></tr> <tr><td>6</td><td>5.625</td></tr> <tr><td>7</td><td>4.5</td></tr> <tr><td>8</td><td>2.625</td></tr> </tbody> </table>	x	f(x)	5	6	6	5.625	7	4.5	8	2.625
x	f(x)																				
1	0																				
2	2.625																				
3	4.5																				
4	5.625																				
x	f(x)																				
5	6																				
6	5.625																				
7	4.5																				
8	2.625																				
<table border="1"> <thead> <tr> <th>x</th> <th>f(x)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>7</td><td>4.5</td></tr> <tr><td>8</td><td>2.625</td></tr> <tr><td>9</td><td>0</td></tr> <tr><td>10</td><td></td></tr> </tbody> </table>	x	f(x)	7	4.5	8	2.625	9	0	10												
x	f(x)																				
7	4.5																				
8	2.625																				
9	0																				
10																					

Per representar la funció utilitzarem el codi QR de la calculadora:



El màxim s'assoleix en el vèrtex.

Per calcular el vèrtex resoldrem l'equació $S(x) = 0$

amb la calculadora:

$$-\frac{3}{8}x^2 + 3x = 0.$$

ax^2+bx+c $-0.375x^2+ 3x +$	
$ax^2+bx+c=0$ $X_1=$	$ax^2+bx+c=0$ $X_2=$
Máx de $y=ax^2+bx+c$ $x=$	Máx de $y=ax^2+bx+c$ $y=$

El valor màxim s'assoleix quan $x = 4$, és a dir en el punt mig del catet \overline{AB} , i l'àrea màxima és: $S(4) = 6$, és a dir, la quarta part de l'àrea del triangle $\triangle ABC$.

Per calcular els valors de x si l'àrea del triangle $\triangle CMN$ és 4 cm^2 , resoldrem l'equació

$$S(x) = 4. \quad -\frac{3}{8}x^2 + 3x = 4.$$

$$-\frac{3}{8}x^2 + 3x - 4 = 0.$$

ax^2+bx+c $-0.375x^2+3x-4$	
-4	
$ax^2+bx+c=0$ $X_1=$	$ax^2+bx+c=0$ $X_2=$
$\frac{12+4\sqrt{3}}{3}$	$\frac{12-4\sqrt{3}}{3}$
$ax^2+bx+c=0$ $X_1=$	$ax^2+bx+c=0$ $X_2=$
6.309401077	1.690598923

Tots dos valors pertanyen al domini.

Aleshores, l'àrea del triangle $\triangle CMN$ és 4 cm^2 , quan $x = \frac{12+4\sqrt{3}}{3} \approx 6.31 \text{ cm}$ i quan

$$x = \frac{12-4\sqrt{3}}{3} \approx 1.69 \text{ cm}.$$

Per calcular els valors de x tals que l'àrea del triangle $\triangle CMN$ és major o igual que 3 cm^2 resoldrem la inequació $S(x) \geq 3$.

$$\frac{-3}{8}x^2 + 3x - 3 \geq 0.$$

Per resoldre la inequació utilitzarem el menú inequacions de la calculadora:

$ax^2+bx+c \geq 0$ $-0.375x^2+3x-3 \geq 0$	
-3	
$a \leq x \leq b$	$a \leq x \leq b$ $a=$ 1.171572875 $b=$ 6.828427125
$4-2\sqrt{2} \leq x \leq 4+2\sqrt{2}$	

Aleshores, l'àrea del triangle $\triangle CMN$ és major o igual que 3 cm^2 quan $x \in [4-2\sqrt{2}, 4+2\sqrt{2}]$.