Àrea d’un quadrilàter.

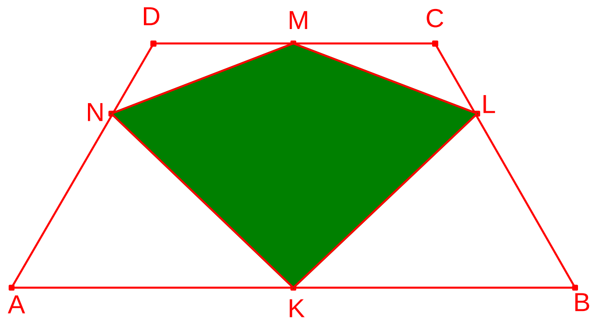
Siga el trapezi isòsceles ABCD $\overline{AD} = \overline{CD} = \overline{BC} = 20$, $\overline{AB} = 40$.

Siguen K i M els punts migs dels costats $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, respectivament.

Siga $\overline{AN} = \overline{BL} = x$.

Construïm el quadrilàter KLMN.

a) Si $x = 2$ cm, calculeu l’àrea $S(2)$ del quadrilàter KLMN.



b) Ompliu la següent taula:

$x = \overline{AN}$	Àrea KLMN
0	
2	
4	
6	
8	
10	
12	
14	
16	
18	
20	
x	$S(x) =$

c) Dibuixeu la funció $S(x)$. Quin tipus de funció és?. Escriu les seues característiques.

d) Si l’àrea del quadrilàter KLMN és $200\ cm^2$, quin és el valor de x?.

e) Per a quin valor de x l’àrea del quadrilàter KLMN és la meitat de l’àrea del trapezi ABBCD.

Solució:

a) b) c)

Si $\overline{AD} = \overline{CD} = \overline{BC} = 20$, $\overline{AB} = 40$ aleshores,

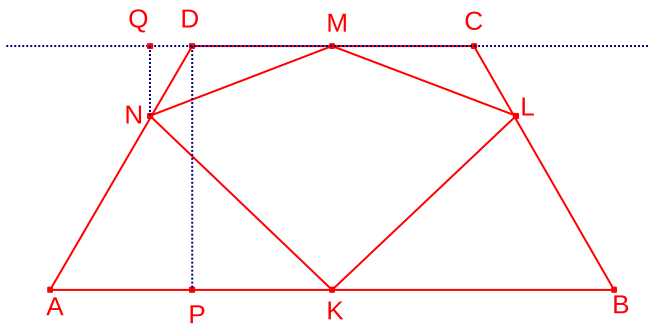
$A = B = 60^o$.

$\overline{DN} = 20 - x$.

Siga P la projecció de D sobre el costat $\overline{AB}$.

Siga Q la projecció de N sobre la recta CD.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{APD}$:



$\overline{MK} = \overline{DP} = 20\frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{NQD}$:

$\overline{QD} = \frac{1}{2}\overline{DN} = \frac{1}{2}(20 - x)$.

$\overline{QM} = \overline{QD} + 10 = 20 - \frac{1}{2}x$.

$\overline{NL} = 2 \cdot \overline{QM} = 40 - x$.
L'àrea del cometa KLMN és:

$$S_{KLMN} = \frac{1}{2}\overline{NL} \cdot \overline{KM}..$$

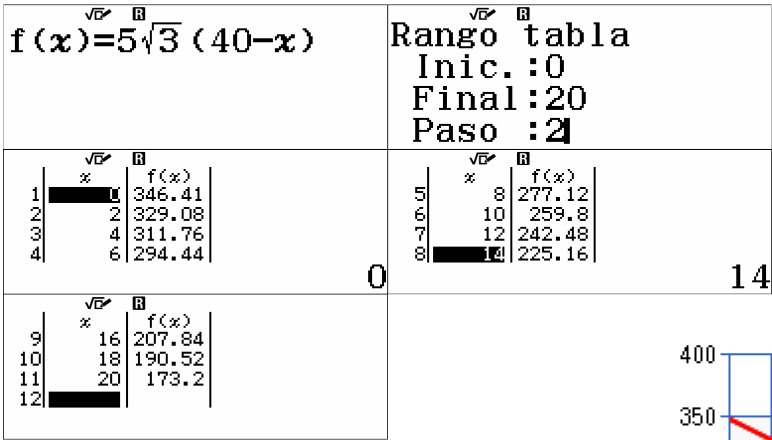
$$S(x) = \frac{1}{2}(40 - x)10\sqrt{3} .$$

$$S(x) = 5\sqrt{3}(40 - x)\text{, } x \in [0, 20] .$$

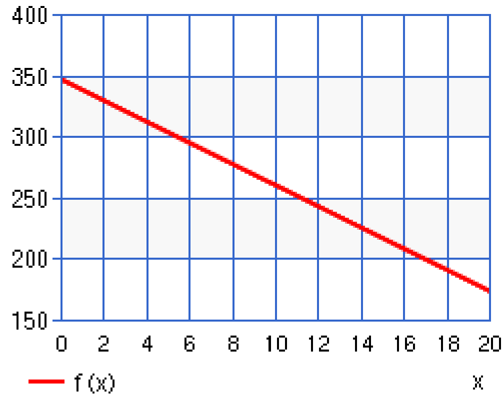
La funció és una recta de pendent $-5\sqrt{3}$ i ordenada a l'origen $200\sqrt{3}$.
La recta és decreixent.
L'àrea del trapezi ABCD és:

$$S_{ABCD} = \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2} \cdot \overline{KM} = 300\sqrt{3} .$$

Per construir la taula utilitzarem el menú *TAULA* de la calculadora:



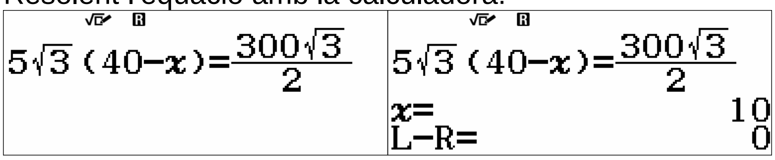
$S(2) = 190\sqrt{3} \approx 329.08$
Per representar la funció utilitzarem el codi QR de la calculadora:



d)
L'àrea del cometa és la meitat de l'àrea del trapezi quan:

$$5\sqrt{3}(40 - x) = 300\sqrt{3} .$$

Resolent l'equació amb la calculadora:



$x = 10$, és a dir N és el punt mig del costat $\overline{AD}$.

Resultat que compleix el teorema de Varignon anunciat pel matemàtic i físic francés Pierre Varignon (1654-1722). El seu enunciat diu:
Els punts migs dels costats d'un quadrilàter qualsevol formen un paral·lelogram, si el quadrilàter és convex aleshores l'àrea del paral·lelogram és la meitat de l'àrea del quadrilàter.