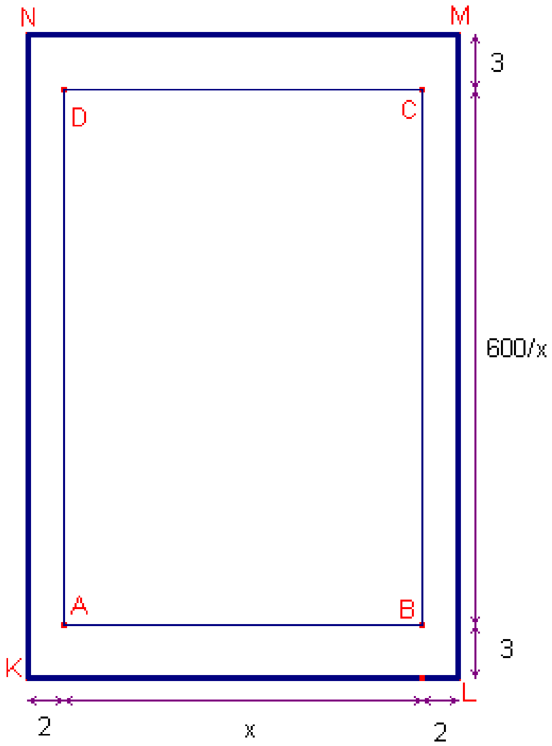
Problema
Dins d'una cartolina rectangular es desitja fer un dibuix que ocupe un rectangle R de $600\ \text{cm}^2$ d'àrea de manera que:

Per damunt i per sota de R han de quedar uns marges de 3 cm d'altura cadascun. Els marges a esquerra i a dreta de R han de tenir una amplària de 2 cm cadascun.
Obteniu raonadament, escrivint tots els passos de raonament utilitzat:
a) L'àrea de la cartolina en funció de la base x del rectangle R.
b) El valor de x per al qual l'àrea de la cartolina és mínima.
c) Les dimensions de dita cartolina d'àrea mínima.
Pau's València Juliol 2018.



Solució:
Siga el rectangle R de vèrtexs ABCD.
Siga $x = \overline{AB}$.
Com l'àrea del rectangle R és $600\ \text{cm}^2$, aleshores,

$$\overline{BD} = \frac{600}{x}.$$

Siga la cartolina de vèrtexs KLMN.

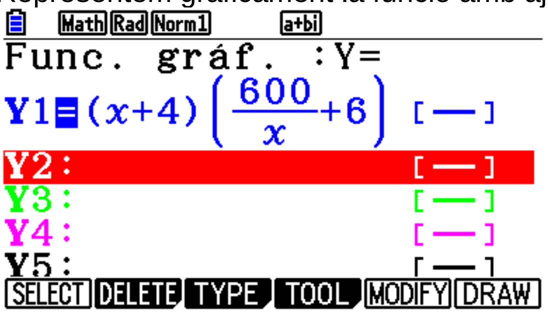
$$\overline{KL} = x + 4,\ \overline{LM} = \frac{600}{x} + 6.$$

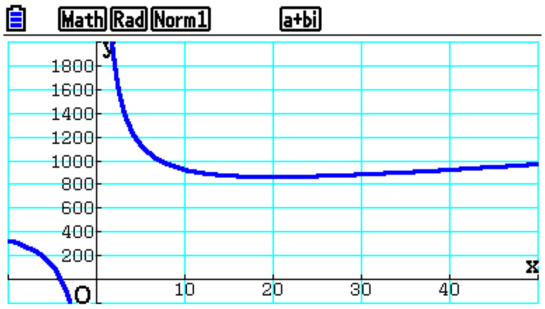
a)
L'àrea de la cartolina és:

$$S(x) = (x+4)\left(\frac{600}{x} + 6\right).$$

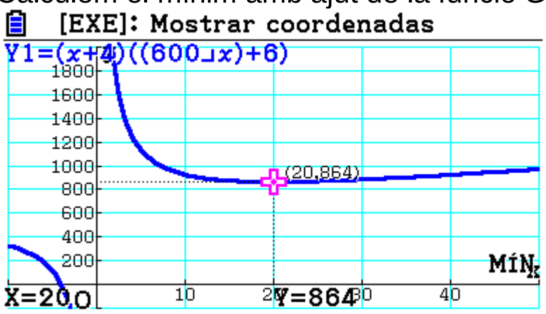
$$S(x) = 624 + 6x + \frac{2400}{x}\ ,\ x \geq 0.$$

b)
Representem gràficament la funció amb ajut de la calculadora.





Calculem el mínim amb ajut de la funció *G-Solv*:

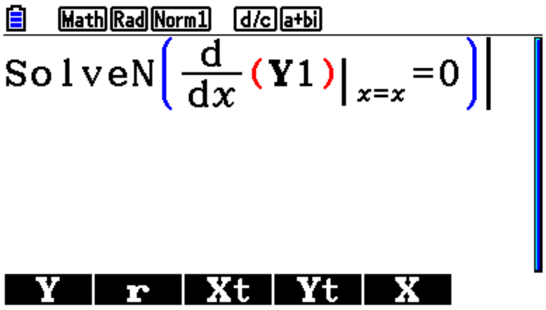


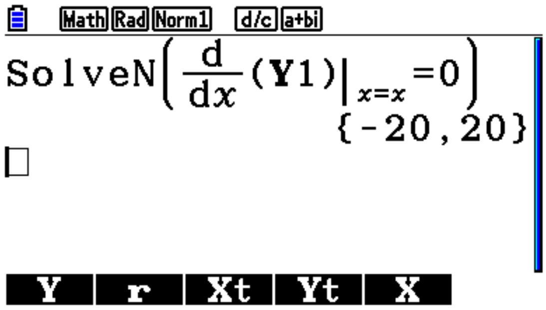
El valor mínim s'assoleix quan $x = 20\ \text{cm}$, l'àrea mínima és $864\ \text{cm}^2$.

Calculem la derivada de la funció àrea.

$S'(x) = 6 - \frac{2400}{x^2}$.

$S'(x) = 0$.

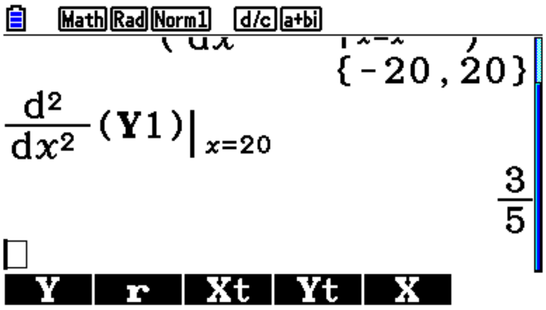




$x = 20$.

Calculem la segona derivada:

$S''(x) = \frac{4800}{x^3}$.



$S''(20) = \frac{3}{5} > 0$.

Aleshores, el mínim de l’àrea s’assoleix quan $x = 20$.

c)

Les dimensions de la cartolina d’àrea mínima són:

$\overline{KL} = 20 + 4 = 24\text{ cm}$, $\overline{LM} = \frac{600}{20} + 6 = 36\text{ cm}$.