Problema 1 (67)
Donats tres vèrtexs $A(3,-7)$, $B(5,-7)$, $C(-2,5)$ del paral·lelogram ABCD (el vèrtex D és l'oposat al vèrtex B). Determinar el vèrtex D.
Determina la longitud de les diagonals.

Problema 2 (71)
Demostra que el triangle de vèrtexs $A(1,1)$, $B(2,3)$, $C(5,-1)$ és rectangle.
Calcula l'àrea.

Problema 3 (74)
Prova que els punts $A(2,2)$, $B(-1,6)$, $C(-5,3)$, $D(-2,-1)$, són els vèrtexs d'un quadrat. Calcula l'àrea del quadrat ABCD.

Problema 4
Demostra que el triangle de vèrtexs $A(-1,3)$, $B(1,2)$, $C(0,4)$ és acutangle.

Problema 5 (215)
Els costats $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$ d'un triangle són la intersecció de les rectes $r_{AB} \equiv 4x+3y-5=0$, $r_{BC} \equiv x-3y+10=0$, $r_{AC} \equiv x-2=0$.
Determina les coordenades dels vèrtexs.

Problema 6
Donats els punts $A(2,3)$ i $B(-1,0)$ determina l'equació de la recta que passa per A i és perpendicular al segment $\overline{AB}$.

Problema 7 (214)
Determina el punt intersecció de les rectes $r \equiv 3x-4y-29=0$, $s \equiv 2x+5y+19=0$.

Problema 8 (227)
Determina el punt projecció del punt $P(-6,4)$ sobre la recta $4x-5y+3=0$.

Problema 9 (247)
Determina la projecció del punt $P(-8,12)$ sobre la recta que passa pels punts $A(2,-3)$, $B(-5,1)$.

Problema 10 (116)
Les coordenades dels vèrtexs d'un triangle són $A(2,-3)$, $B(3,2)$, $C(-2,5)$.
Calcula l'àrea del triangle.

Problema 11
Determina l'equació de la recta mediatriu del segment d'extrems $A(1,4)$, $B(-5,2)$.

Problema 12
TEOREMA DE VARIGNON
Siguen $A(-1,2)$, $B(3,4)$, $C(5,2)$, $D(1,-2)$ els vèrtexs del quadrilàter ABCD.
Prova que els punts migs del quadrilàter són els vèrtexs d'un paral·lelogram.

Problema 13
Calcula la distància del punt $P(-4, 4)$ a la recta $4x-3y+3=0$.

Problema 14 (83)
Donats els vèrtexs oposats $A(3, 0)$, $C(-4, 1)$ del quadrat ABCD, determina els altres vèrtexs.
Calcula l'àrea.

Problema 15 (85)
Calcula el centre i el radi de la circumferència circumscrita al triangle de vèrtexs $A(-3, 6)$, $B(9, -10)$ i $C(-5, 4)$.

Problema 16 (78)
Determina en l'eix d'ordenades el punt M, la distància del qual al punt $A(-8, 13)$ siga 17.

Problema 17 (94)
Siga el triangle de vèrtexs $A(1, 4)$, $B(3, -9)$ i $C(-5, 2)$.
a) Determina el punt mig M del costat $\overline{AC}$.
b) Calcula la longitud de la mitjana $\overline{BM}$.
c) Comprova que $\overline{BM}=\dfrac{\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}}{2}$.
d) Calcula el baricentre G del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

Problema 18 (224)
Donades les rectes d'equacions $r\equiv 2x-3y+5=0$, $s\equiv 3x+2y-7=0$ costats d'un rectangle i $A(2, -3)$ un dels seus vèrtexs, determina els altres vèrtexs i l'àrea.

Problema 19 (64)
Donats els vèrtexs adjacents $A(3, -7)$, $B(-1, 4)$ del quadrat ABCD, calcula l'àrea i els altres vèrtexs.

Problema 20 (92)
Donats els vèrtexs $A(-3, 5)$, $B(1, 7)$ del paral·lelogram $ABCD$ i $M(1, 1)$ la intersecció de les diagonals, calcula els vèrtexs C i D. ABCD es un rectangle?.

Problema 21
Determina la recta que passa pel punt intersecció de les rectes $r\equiv 2x+3y-7=0$, $s\equiv x+y-3=0$ i pel punt $A(8, 2)$.

Problema 22
Calcula l'àrea del pentàgon de vèrtexs $A(-5, -2)$, $B(-2, 5)$, $C(2, 7)$, $D(5, 1)$, $E(2, -4)$.

Problema 23
Comprova que els punts migs dels costats del quadrilàter de vèrtexs $A(-2,6)$, $B(4,4)$, $C(6,-6)$, $D(2,-8)$ formen un quadrilàter de perímetre igual a la suma de les diagonals del quadrilàter ABCD.

Problema 24
Calcula els angles del triangle de vèrtexs $A(4,2)$, $B(0,1)$, $C(6,-1)$.

Problema 25
Calcula els vèrtexs del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ coneguts els punts migs $A'(-2,1)$, $B'(5,2)$, $C'(2,-3)$ dels costats a, b i c, respectivament.

Problema 26
PROPIETAT DEL BARICENTRE D'UN TRIANGLE
Siga el triangle de vèrtexs $A(-3,4)$, $B(2,5)$ i $C(1,0)$.
Siga la recta $r \equiv 3x+4y+12=0$ exterior al triangle.

a) Calcula les coordenades del baricentre G del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

b) Comprova que $d(G,r)=\frac{1}{3}\left(d(A,r)+d(B,r)+d(C,r)\right)$.

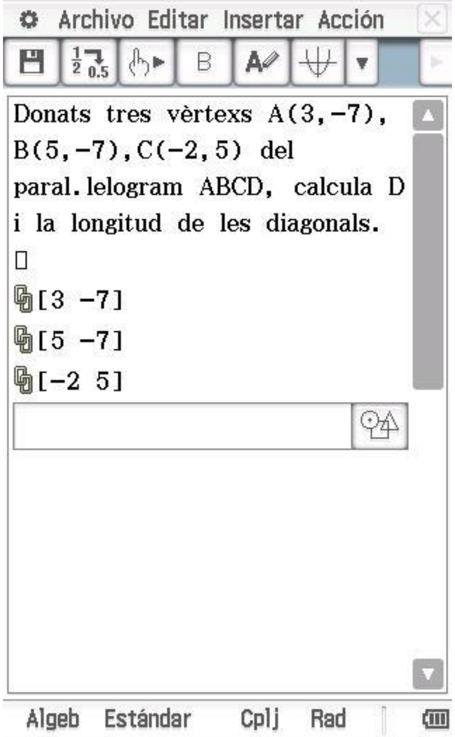
Problema 27
Siguen els vectors $a=(x,6), b=(4,-3)$. Determina x a fi que:
a) Els vectors a, b siguen ortogonals.
b) El vector a tinga mòdul 10.
c) Els vectors a, b formen 120º.

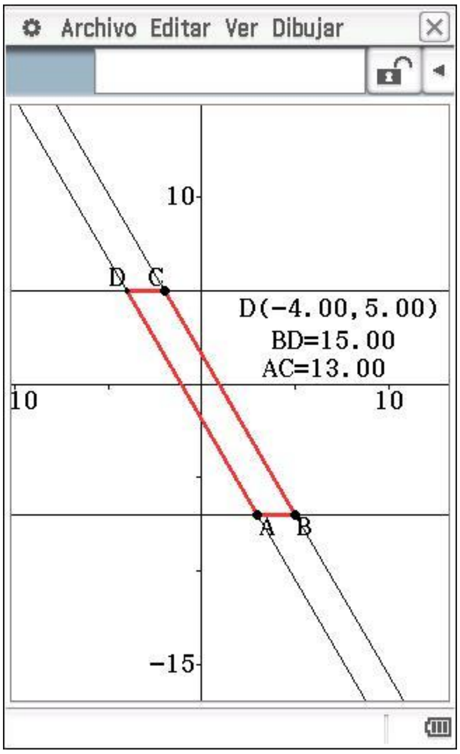
Problema 28
Siguen $A(4,5)$, $C(2,1)$ els vèrtexs oposats del rombe ABCD.
Si el vèrtex B pertany a l'eix d'abscisses, calcula:
a) Les coordenades dels vèrtexs.
b) L'àrea del rombe ABCD.
c) El costat del rombe ABCD.

Problema 1 (67)
Donats tres vèrtexs $A(3,-7)$, $B(5,-7)$, $C(-2,5)$ del paral·lelogram ABCD (el vèrtex D és l'oposat al vèrtex B). Determinar el vèrtex D.
Determinar la longitud de les diagonals.

Obrim una eActivity.

Solució geomètrica:
Insertem tres vincles geomètrics amb els vèrtexs $A(3,-7)$, $B(5,-7)$, $C(-2,5)$.
Obrim la finestra geomètrica en la què arrosseguem els tres vincles.

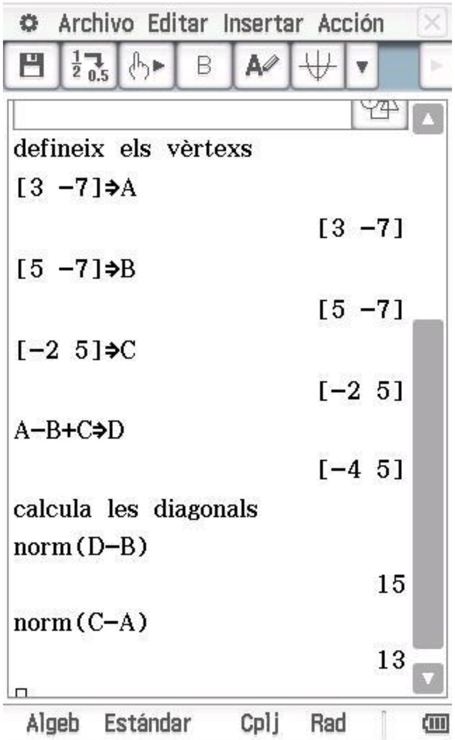




Dibuixem la recta AB i la recta BC.
Seleccionem el punt C i la recta AB i dibuixem la recta paral·lela a AB que passa per C.
Seleccionem el punt A i la recta BC i dibuixem la recta paral·lela a BC que passa per A.

Seleccionem la dues rectes. Calculem la intersecció d'aquestes dues últimes rectes que és el vèrtex D del paral·lelogram.
Amb el quadre de mesures calculem les seues coordenades.
Amb l'opció segment dibuixem els costats del paral·lelogram ABCD
Seleccionem $\overline{BD}$ i amb el quadre de mesures calculem la distància de B a D.
Seleccionem $\overline{AC}$ i amb el quadre de mesures calculem la distància de A a C.
$D(-4,5)$.
$\overline{BD}=15$. $\overline{AC}=13$.

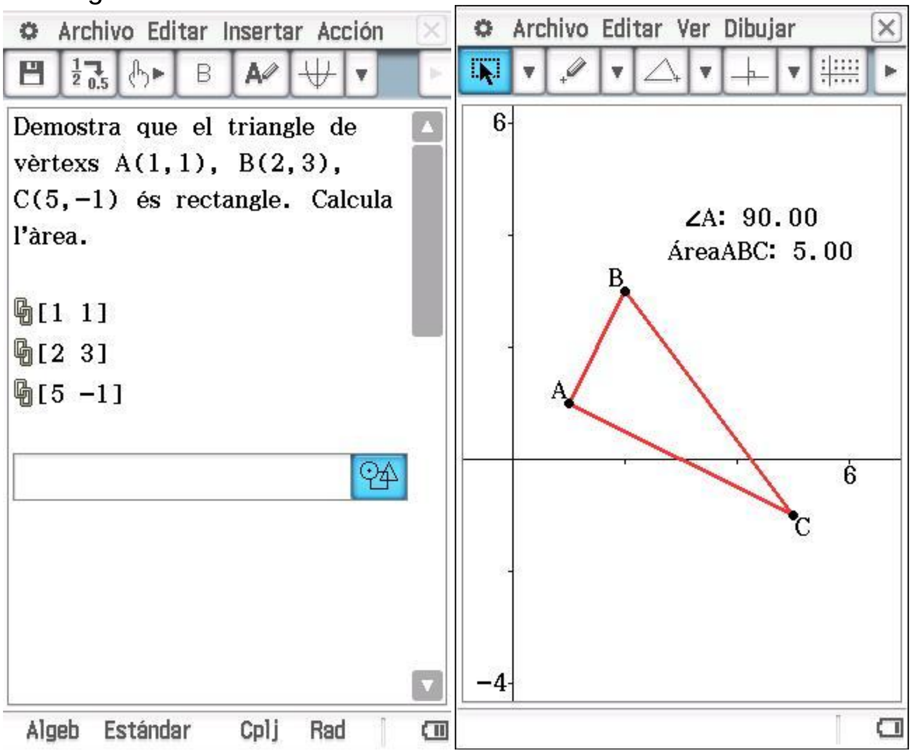
Solució analítica:
Insertem una fila de càlcul.
Definim les variables:
$\begin{bmatrix}3 & -7\end{bmatrix} \Rightarrow A$
$\begin{bmatrix}5 & -7\end{bmatrix} \Rightarrow B$
$\begin{bmatrix}-2 & 5\end{bmatrix} \Rightarrow C$.
Calculem les coordenades del vèrtex D:
$A - B + C$.
$D(-4, 5)$.
Calculem les mesures de les diagonals:
$\text{norm}(D - B)$.
$\text{norm}(C - A)$.
$\overline{BD} = 15$.
$\overline{AC} = 13$.



Problema 2 (71)
Demostra que el triangle de vèrtexs $A(1,1)$, $B(2,3)$, $C(5,-1)$ és rectangle.
Calcula l'àrea.

Obrim una eActivity.

Solució geomètrica:



Insertem tres vincles geomètrics amb els vèrtexs $A(1,1)$, $B(2,3)$, $C(5,-1)$.
Obrim la finestra geomètrica en la què arrosseguem els tres vincles.
Amb l'opció segment dibuixem els costats del triangle.
Seleccionem els costats $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$. Amb el quadre de mesures calculem la mesura de l'angle A.
$A = 90^{o}$.
Seleccionem els tres costats del triangle. Amb el quadre de mesures calculem l'àrea del triangle.
$S_{ABC} = 5$.

Solució analítica:
Insertem una fila de càlcul.
Definim les variables:
$[2 \quad -3] \Rightarrow A$
$[3 \quad 2] \Rightarrow B$
$[-2 \quad 5] \Rightarrow C$.
Calculem les mesures dels costats del triangle
$\text{norm}(C-B) \Rightarrow a$
$\text{norm}(C-A) \Rightarrow b$
$\text{norm}(B-A) \Rightarrow c$
Observem que a és el costat major.

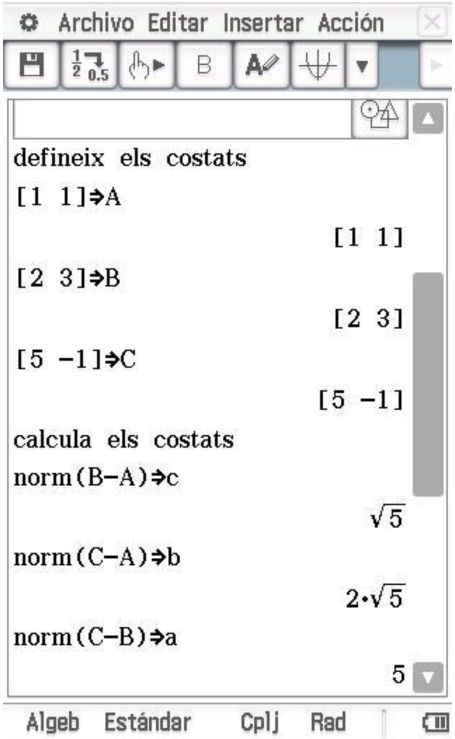
Apliquem del teorema invers de Pitàgores. Vegem que $a^2 = b^2 + c^2$.

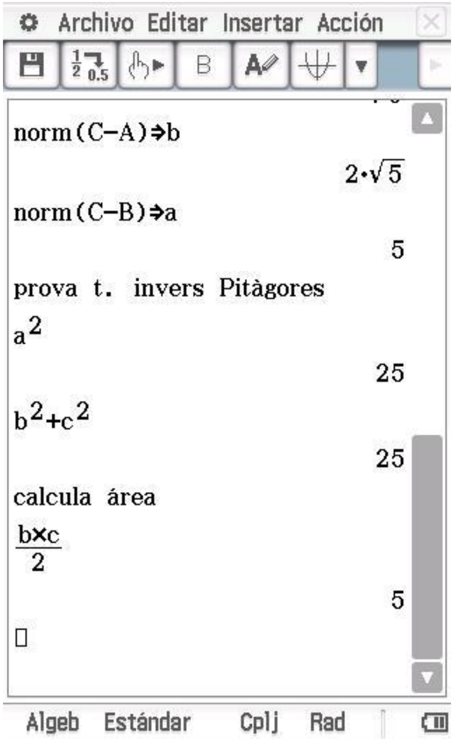
$a^2 = 25, \quad b^2 + c^2 = 25$.

Per tant, el triangle és rectangle.

Per ser el triangle rectangle $S_{ABC} = \dfrac{b \cdot c}{2}$.

L'àrea és 5.



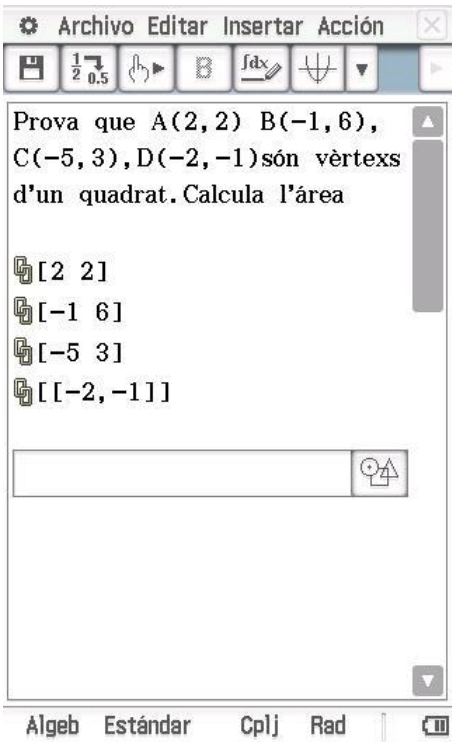


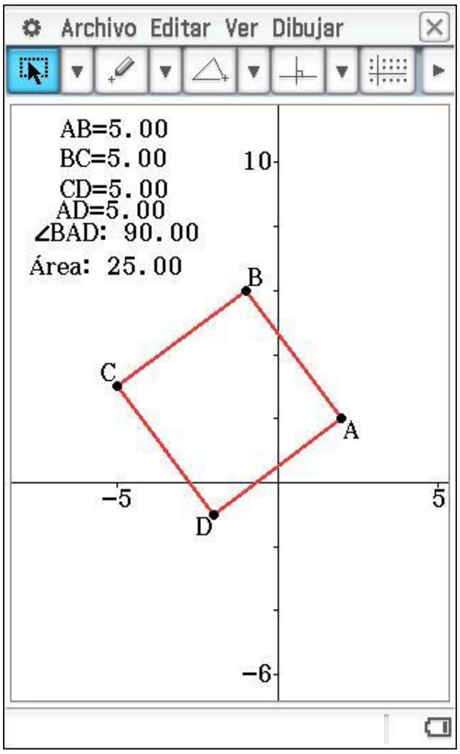
Podem variar les coordenades de A, B i C per resoldre altres problemes.

Problema 3 (74)
Prova que els punts $A(2, 2)$, $B(-1, 6)$, $C(-5, 3)$, $D(-2, -1)$, són els vèrtexs d'un quadrat. Calcula l'àrea del quadrat ABCD.

Obrim una eActivity.

Solució geomètrica:
Insertem quatre vincles geomètrics amb els vèrtexs $A(2, 2)$, $B(-1, 6)$, $C(-5, 3)$, $D(-2, -1)$.
Obrim la finestra geomètrica en la què arrosseguem els quatre vincles.
Amb l'opció segment, dibuixem els costats del quadrilàter.
Seleccionem els segments $\overline{AB}$, $\overline{AD}$. Amb el quadre de mesures calculem l'angle A.
Seleccionem cadascun dels costats i amb el quadre de mesures calculem cada longitud dels costats i observem que tots són iguals.
Per tant, ABCD és un quadrat.
Seleccionem tots els costats i amb el quadre de mesures calculem l'àrea.
$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{AD} = 5$.
$A = 90º$.
$S_{ABCD} = 25$.





Solució analítica:
Insertem una fila de càlcul.
Definim les variables:
$[2 \quad 2] \Rightarrow A$
$[-1 \quad 6] \Rightarrow B$
$[-5 \quad 3] \Rightarrow C$
$[-5 \quad -1] \Rightarrow D$
Calculem les mesures dels costats del triangle:
$\text{norm}(B - A) \Rightarrow AB$

$\text{norm}(C-B) \Rightarrow BC$

$\text{norm}(D-C) \Rightarrow CD$

$\text{norm}(D-A) \Rightarrow AD$

Observem que tots els costats són iguals.

Calculem la mesura de la diagonal $\overline{AC}$.

$\text{norm}(C-A) \Rightarrow AC$

Apliquem del teorema invers de Pitàgores al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$. Vegem que $AC^2 = AB^2 + BC^2$.

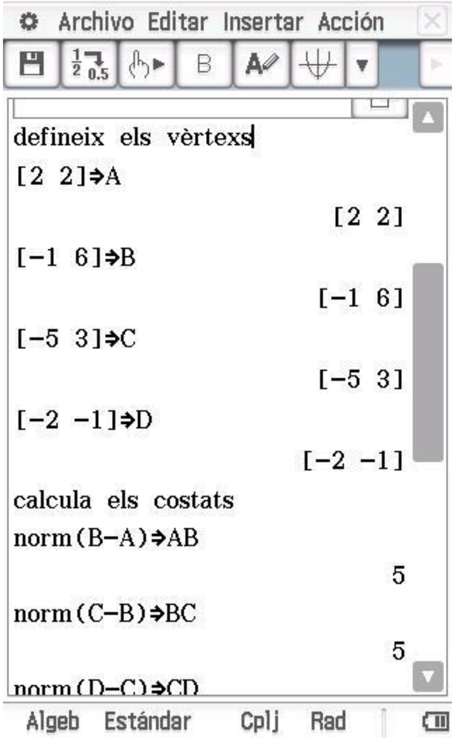
$AC^2 = 50, \; AB^2 + BC^2 = 50$.

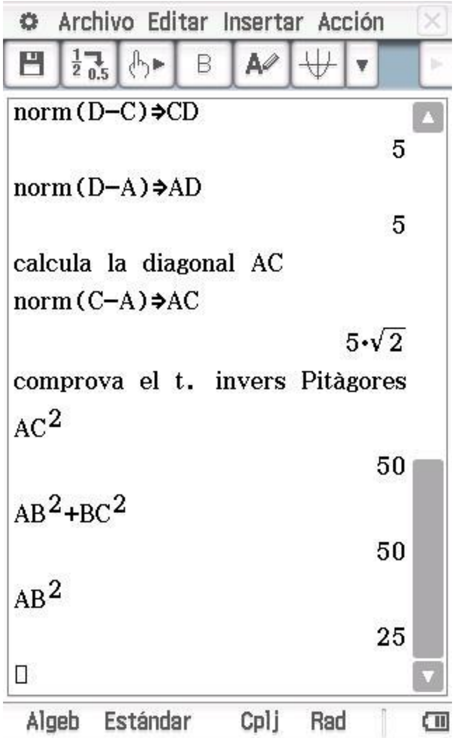
Aleshores, al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és rectangle.

Per tant, ABCD és un quadrat.

Calculem l'àrea:

$\overline{AB}^2 = 25$.

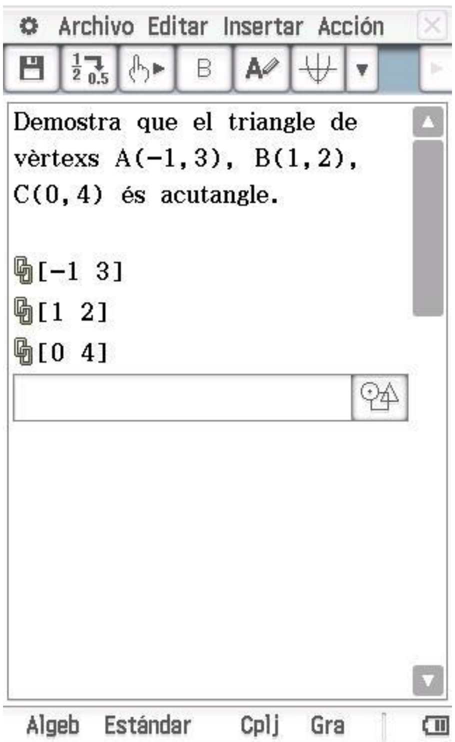


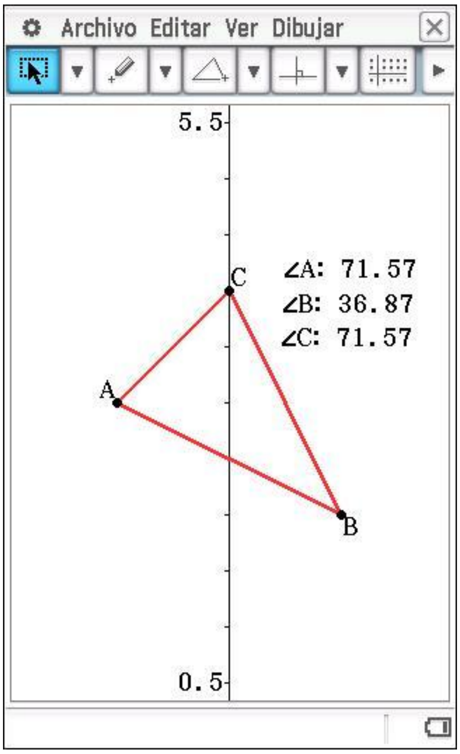


Problema 4
Demostra que el triangle de vèrtexs $A(-1, 3)$, $B(1, 2)$, $C(0, 4)$ és acutangle.

Obrim una eActivity.

Solució geomètrica:
Insertem tres vincles geomètrics amb els vèrtexs $A(-1, 3)$, $B(1, 2)$, $C(0, 4)$.
Obrim la finestra geomètrica en la què arrosseguem els tres vincles.
Amb l'opció segment dibuixem els costats del triangle.
Seleccionem els costats $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$. Amb el quadre de mesures calculem la mesura de l'angle A.
Seleccionem els costats $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$. Amb el quadre de mesures calculem la mesura de l'angle B.
Seleccionem els costats $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$. Amb el quadre de mesures calculem la mesura de l'angle C.
$A = 71.57º$
$B = 36.87º$
$C = 71.57º$
El triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és acutangle i isòsceles.

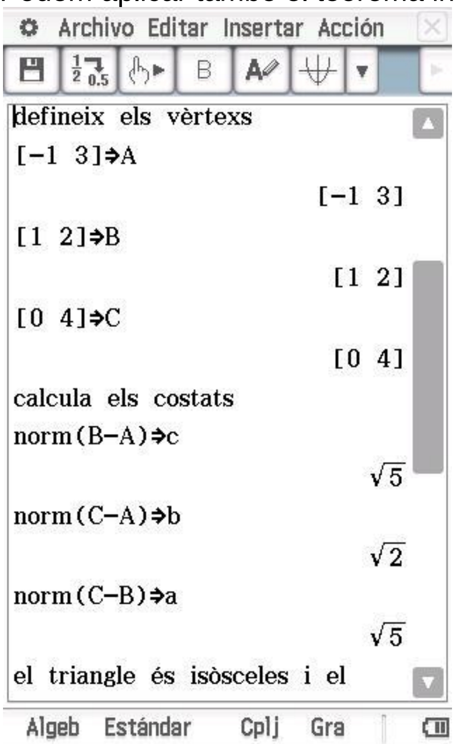


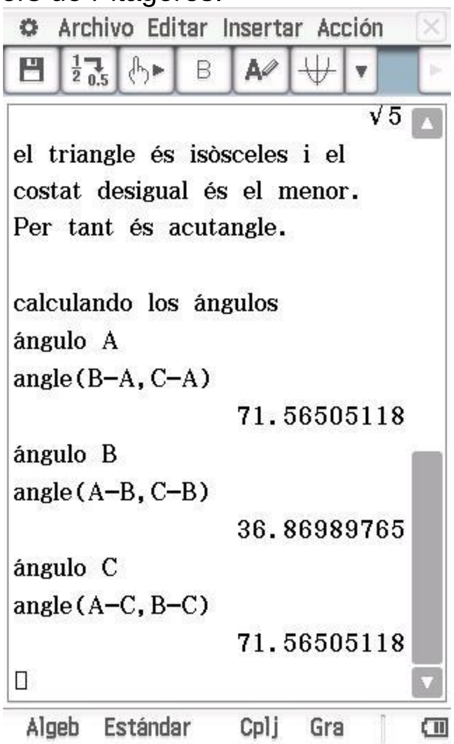


Solució analítica:
Insertem una fila de càlcul.
Definim les variables:
$[-1 \quad 3] \Rightarrow A$
$[1 \quad 2] \Rightarrow B$
$[0 \quad 4] \Rightarrow C$.
Calculem les mesures dels costats del triangle:
$\text{norm}(C - B) \Rightarrow a$

$\text{norm}(C - A) \Rightarrow b$
$\text{norm}(B - A) \Rightarrow c$
$a = c = \sqrt{5}$, $b = \sqrt{2}$.
El triangle és isòsceles i el costat menor és el menor, per tant, el triangle és acutangle.

Calculem els angles:
Per calcular l’angle A utilitzem la funció angle( ):
$\text{angle}(B - A, C - A)$.
$A = 71.56505118^{\circ}$.
Per calcular l’angle B utilitzem la funció angle( ):
$\text{angle}(A - B, C - B)$.
$B = 36.86989765^{\circ}$.
Per calcular l’angle C utilitzem la funció angle( ):
$\text{angle}(A - C, B - C)$.
$C = 71.56505118^{\circ}$.
Podem aplicar també el teorema invers de Pitàgores.





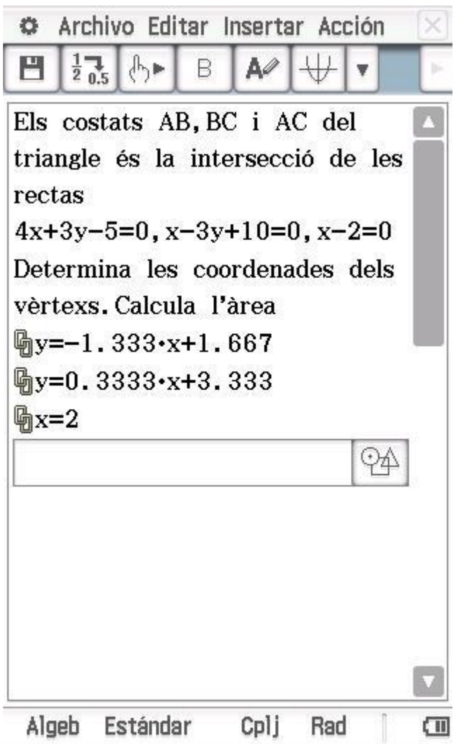
Problema 5 (215)

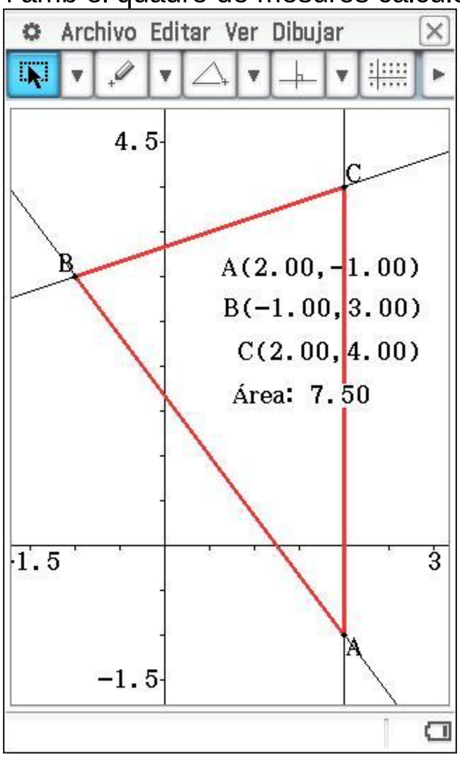
Els costats $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$ d'un triangle són la intersecció de les rectes $r_{AB} \equiv 4x+3y-5=0$, $r_{BC} \equiv x-3y+10=0$, $r_{AC} \equiv x-2=0$.
Determina les coordenades dels vèrtexs.

Obrim una eActivity.

Solució geomètrica:
Insertem tres vincles geomètrics amb les rectes que formen els costats $r_{AB} \equiv 4x+3y-5=0$, $r_{BC} \equiv x-3y+10=0$, $r_{AC} \equiv x-2=0$.
Obrim la finestra geomètrica en la què arrosseguem els tres vincles.
El vèrtex A és la intersecció de les rectes r_{AB}, r_{AC}.
El vèrtex B és la intersecció de les rectes r_{AB}, r_{BC}.
El vèrtex C és la intersecció de les rectes r_{BC}, r_{AC}.
Amb el quadre de mesures, calculem les coordenades dels vèrtexs.

Amb l'opció segment dibuixem el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
Seleccionem els costats del triangle i amb el quadre de mesures calculem l'àrea.





Solució analítica:
Insertem una fila de càlcul.
Per calcular el vèrtex A resolem el sistema format per les rectes r_{AB}, r_{AC}:

$$\left\{\begin{array}{r} 4x+3y-5=0 \\ x-2=0 \end{array}\right|_{x,y}.$$

$A(2,-1)$.

Per calcular el vèrtex B resolem el sistema format per les rectes r_{AB}, r_{BC}:

$$\left\{\begin{array}{r} 4x+3y-5=0 \\ x-3y+10=0 \end{array}\right|_{x,y}.$$

$B(-1, 3)$.

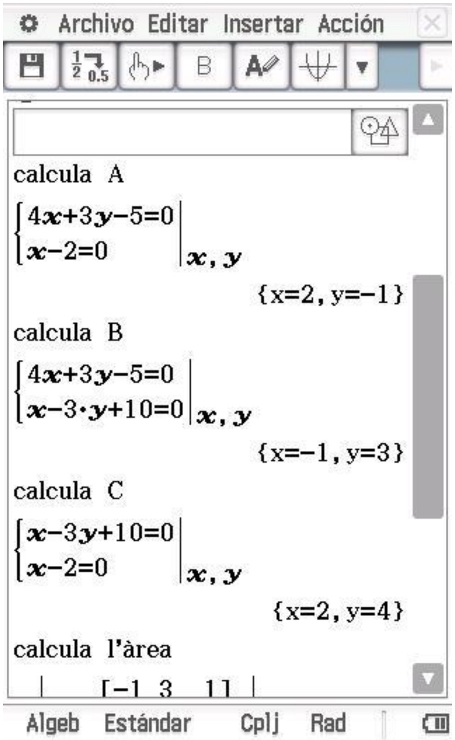
Per calcular el vèrtex C resolem el sistema format per les rectes r_{BC}, r_{AC}:

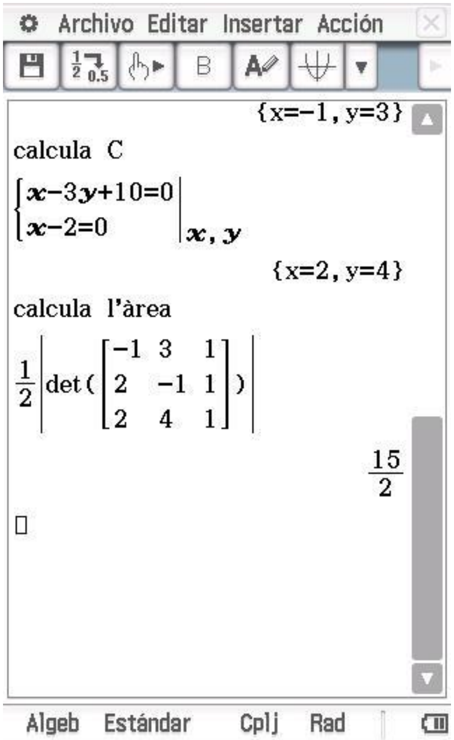
$$\left.\begin{cases} x-3y+10=0 \\ x-2=0 \end{cases}\right|_{x,y}.$$

$C(2, 4)$.

Per calcular l'àrea apliquem la fórmula $\frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{pmatrix}\right|$.

$$\frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}\right| = \frac{15}{2}.$$

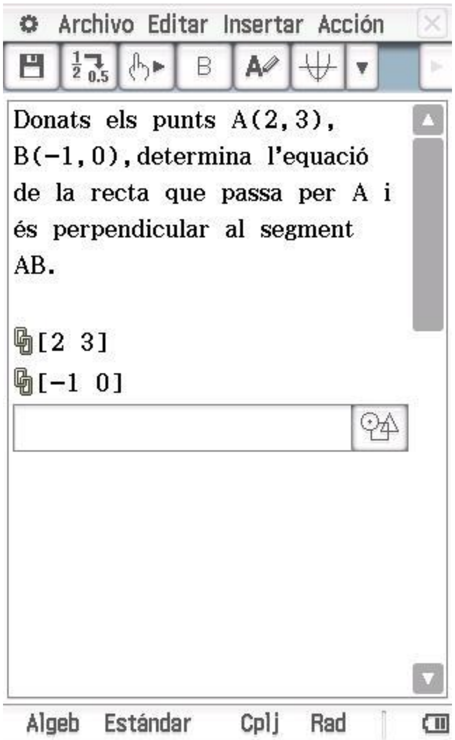


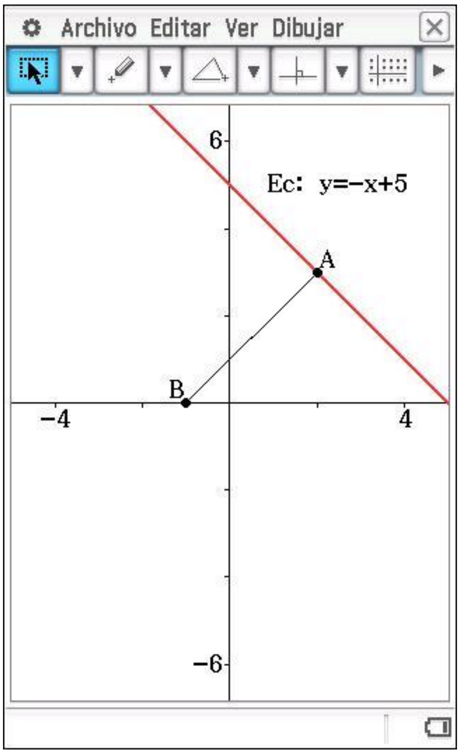


Problema 6
Donats els punts $A(2,3)$ i $B(-1,0)$ determina l’equació de la recta que passa per A i és perpendicular al segment $\overline{AB}$.

Obrim una eActivity.

Solució geomètrica:
Insertem dos vincles geomètrics amb els punts $A(2,3)$ i $B(-1,0)$
Obrim la finestra geomètrica en la què arrosseguem els dos vincles.
Dibuixem el segment $\overline{AB}$.
Seleccionem el segment $\overline{AB}$ i el punt A. Apliquem l’opció recta perpendicular.
Seleccionem la recta perpendicular. Amb el quadre de mesures calculem l’equació de la recta.
L’equació es $y=-x+5$.





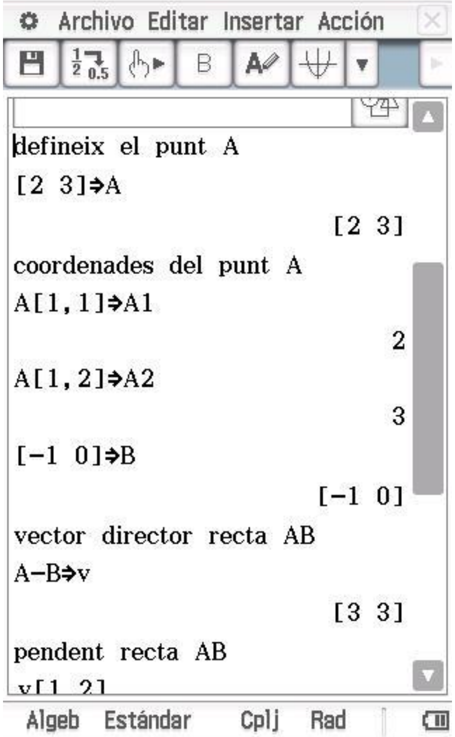
Solució analítica:
Insertem una fila de càlcul.
Definim les variables:
$[2 \quad 3] \Rightarrow A$
$[-1 \quad 0] \Rightarrow B$
Calculem les coordenades de A:
$A[1,1] \Rightarrow A1.$
$A[1,2] \Rightarrow A2$

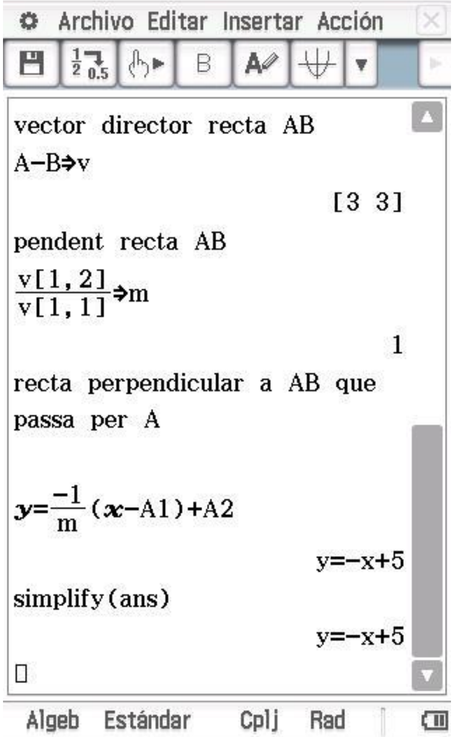
Calculem les components del vector $\overrightarrow{BA}$:
$A-B \Rightarrow v$
Calculem el pendent de la recta AB:
$$\frac{v[1,2]}{v[1,1]} \Rightarrow m$$

Calculem l'equació de la recta perpendicular a AB que passa per A:

$$y = \frac{-1}{m}(x - A1) + A2 .$$

L'equació és $y = -x + 5$.





Problema 7 (214)

Determina el punt intersecció de les rectes $r \equiv 3x - 4y - 29 = 0$, $s \equiv 2x + 5y + 19 = 0$.

Obrim una eActivity.

Solució geomètrica:

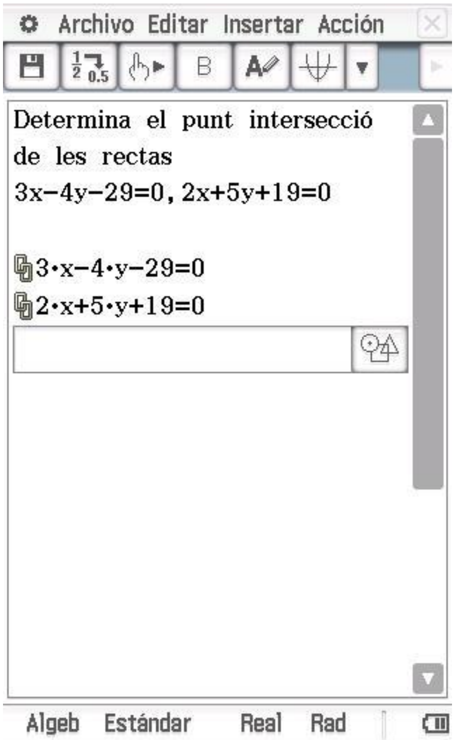
Insertem dos vincles geomètrics amb les equacions de les dues rectes.

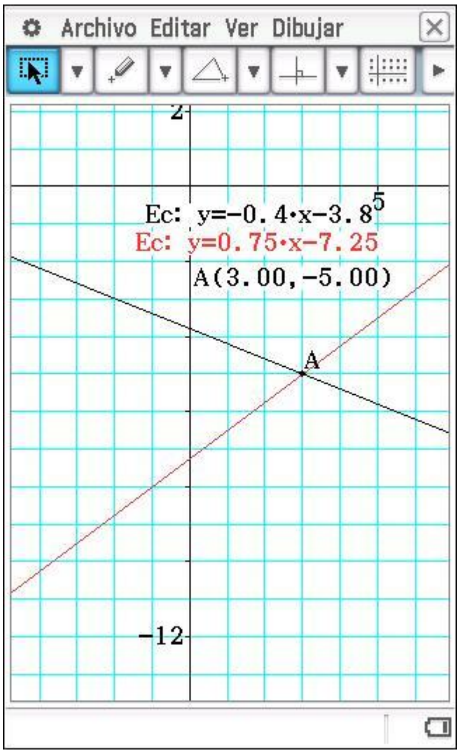
$r \equiv 3x - 4y - 29 = 0$, $s \equiv 2x + 5y + 19 = 0$.

Obrim la finestra geomètrica en la què arrosseguem els dos vincles.

Seleccionem las dues rectes i calculem el punt d'intersecció.

El punt d'intersecció és $A(3, -5)$.





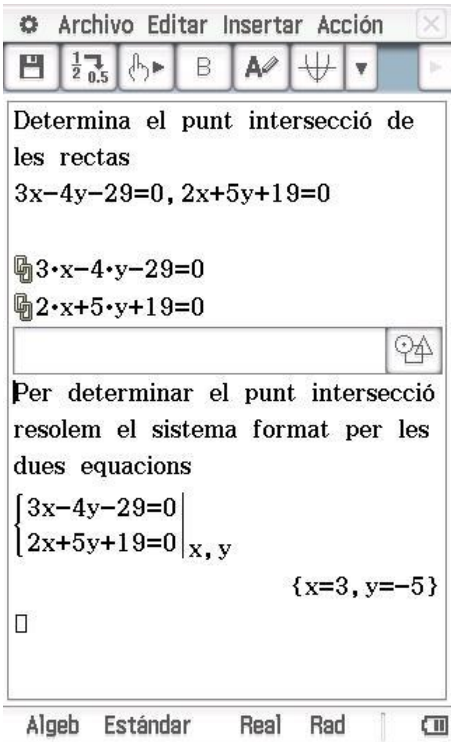
Solució analítica:

Insertem una fila de càlcul.

Per calcular el punt A intersecció de les dues rectes resolem el sistema format per les rectes.

$$\begin{cases} 3x - 4y - 29 = 0 \\ 2x + 5y + 19 = 0 \end{cases} \Bigg| x, y \,.$$

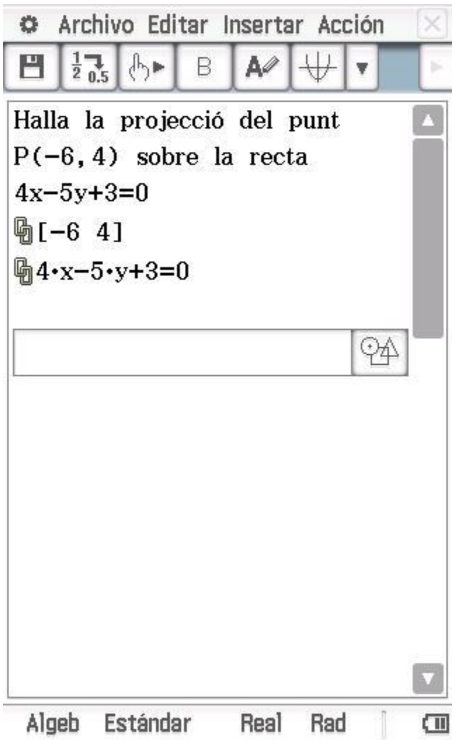
La solució és $A(3, -5)$.

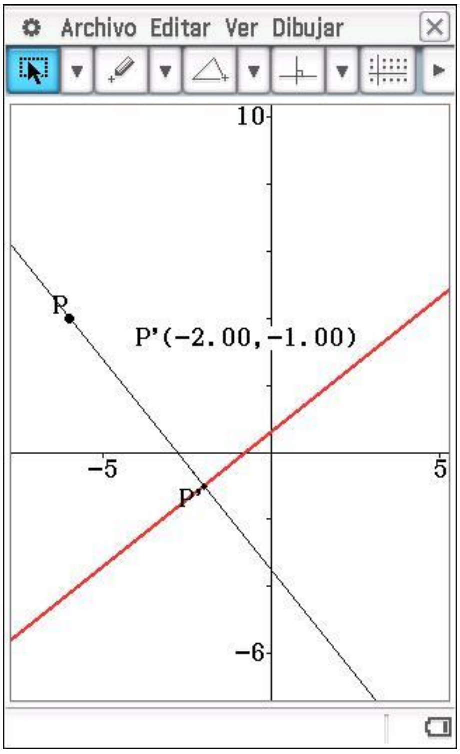


Problema 8 (227)
Determina el punt projecció del punt $P(-6, 4)$ sobre la recta $4x-5y+3=0$.

Obrim una eActivity.

Solució geomètrica:
Insertem dos vincles geomètrics amb el punt $P(-6, 4)$ i l'equació de la recta $4x-5y+3=0$.
Obrim la finestra geomètrica en la què arrosseguem els dos vincles.
Seleccionem el punt i la recta. Dibuixem la recta perpendicular amb els dos objectes.
Seleccionem las dos rectes i efectuem la intersecció de les dues rectes.
Seleccionem el punt projecció i amb el quadre de mesures calculem les seues coordenades.
$P'(-2, -1)$.

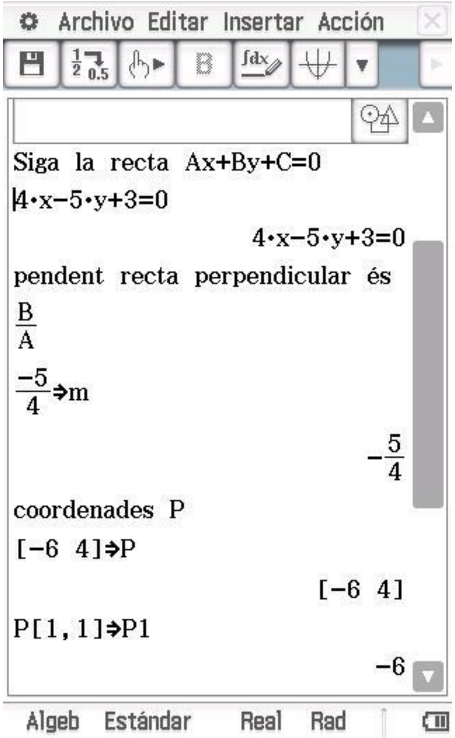


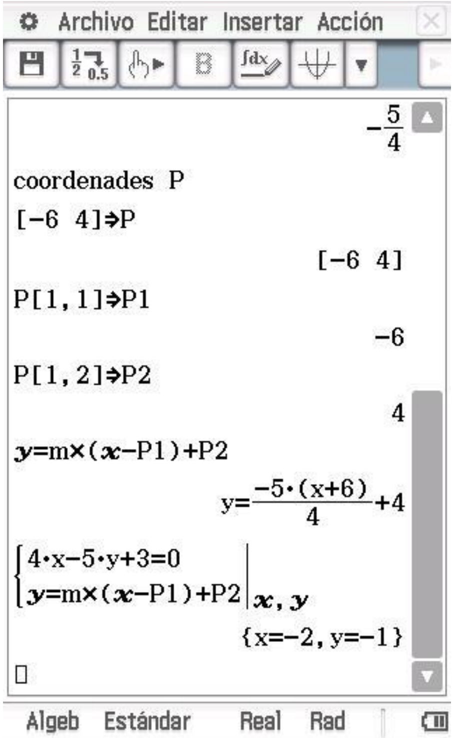


Solució analítica:
Insertem una fila de càlcul.
Definim el pendent de la recta perpendicular a r:
$\frac{-5}{4} \Rightarrow m$.
Definim la variable:
$[-6 \quad 4] \Rightarrow P$
Calculem les coordenades de P:
$P[1, 1] \Rightarrow P1$
$P[1, 2] \Rightarrow P2$
L'equació de la recta perpendicular a la recta r que passa por P té equació:
$y = m \cdot (x - P1) + P2$.
Per calcular el punt projecció resolem el sistema format por dues rectes:

$$\begin{cases} 4x-5y+3=0 \\ y=m(x-P1)+P2 \end{cases}\Bigg| x,y \quad .$$

La solució és $P'(-2,-1)$.

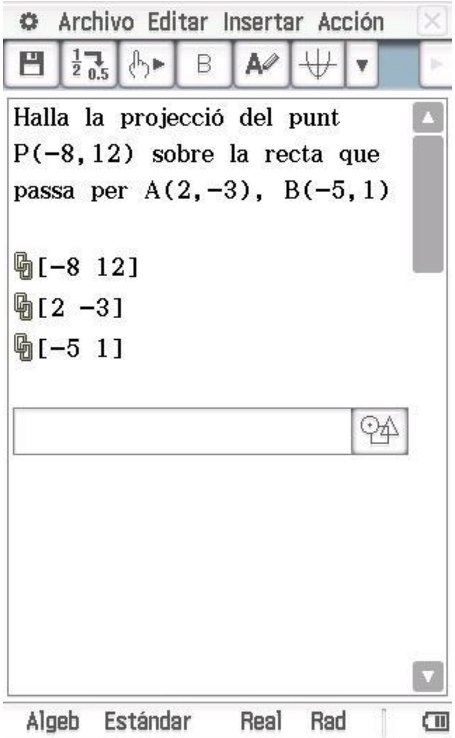


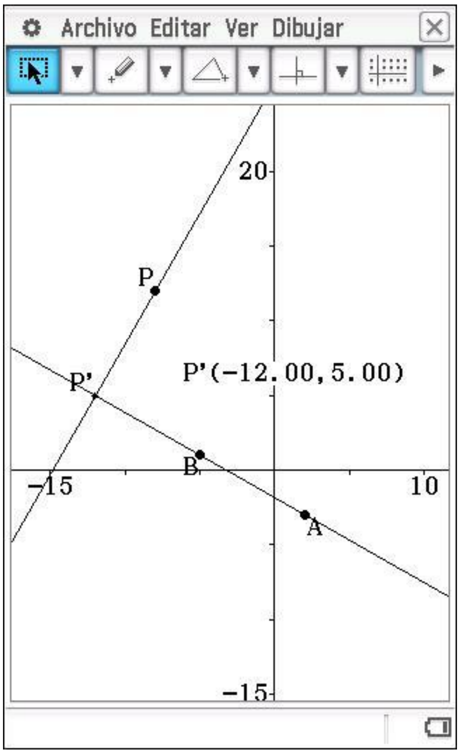


Problema 9 (247)
Determina la projecció del punt $P(-8,12)$ sobre la recta que passa pels punts $A(2,-3)$, $B(-5,1)$.

Obrim una eActivity.

Solució geomètrica:
Insertem tres vincles geomètrics amb els punts $P(-8,12)$, $A(2,-3)$, $B(-5,1)$.
Obrim una finestra geomètrica, en la què arrosseguem els tres vincles.
Dibuixem la recta AB.
Seleccionem el segment i el punt P i dibuixem la recta perpendicular a la recta AB que passa por P.
Seleccionem la recta AB i la recta perpendicular. La intersecció és el punt projecció de P sobre el segment $\overline{AB}$
Seleccionem el punt projecció i en el quadre de mesures, calculem les seues coordenades.





Solució analítica:
Insertem una fila de càlcul.
Definim les variables:
$[-8 \quad 12] \Rightarrow P$
$[2 \quad -3] \Rightarrow A$
$[-2 \quad 5] \Rightarrow B$
Calculem les coordenades de A i de P:
$A[1,1] \Rightarrow A1.$
$A[1,2] \Rightarrow A2$
$P[1,1] \Rightarrow P1.$
$P[1,2] \Rightarrow P2$
Calculem el vector $\overrightarrow{AB}$.

$B - A \Rightarrow v$.

Calculem el pendent de la recta AB:

$$\frac{v[1,2]}{v[1,1]} \Rightarrow m$$

L'equació de la recta AB és:

$y = m(x - A1) + A2$.

L'equació de la recta perpendicular a AB que passa per P és:

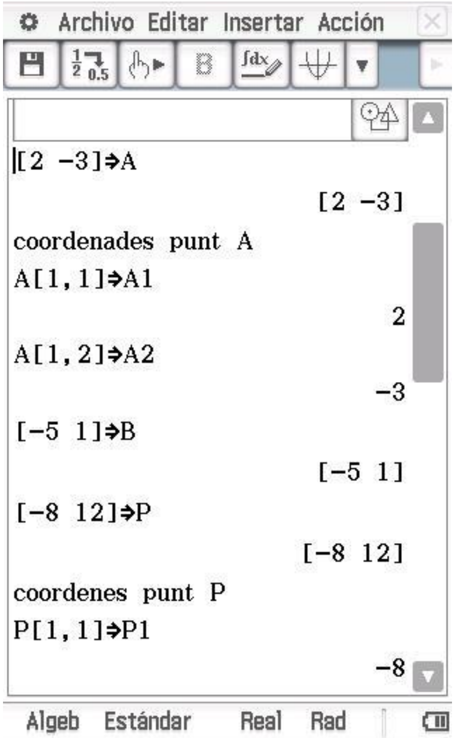
$y = \frac{-1}{m}(x - P1) + P2$.

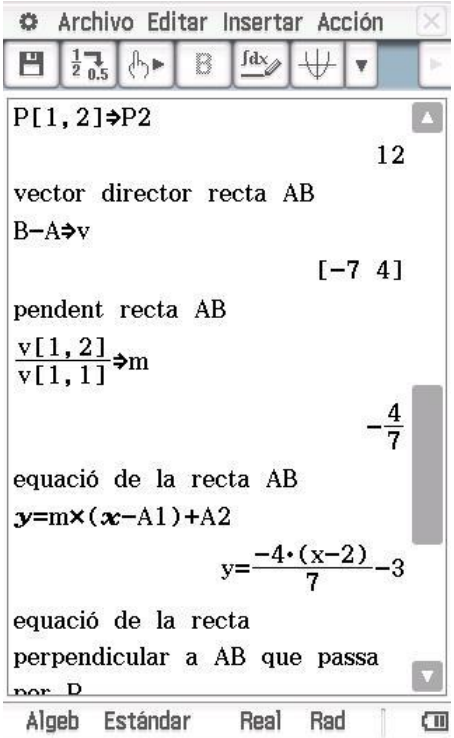
El punt projecció és la intersecció de les dues rectes:

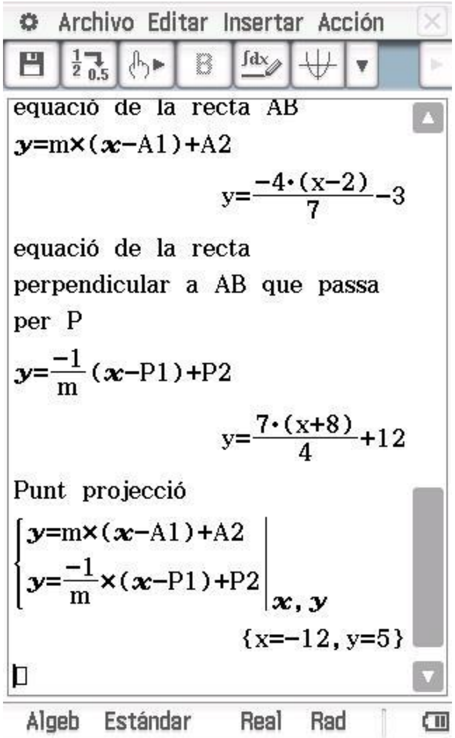
$$\left\{\begin{array}{l} y = m(x - A1) + A2 \\ y = \frac{-1}{m}(x - P1) + P2 \end{array}\right|_{x,y}$$

Les coordenades del punt projecció P' són:

$P'(-12, 5)$





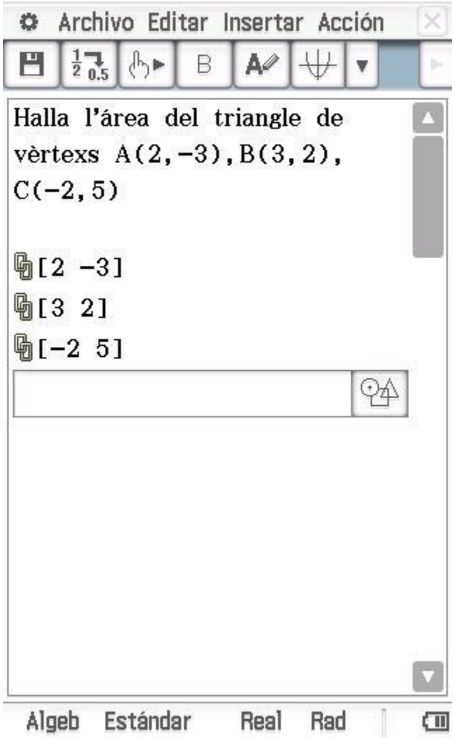


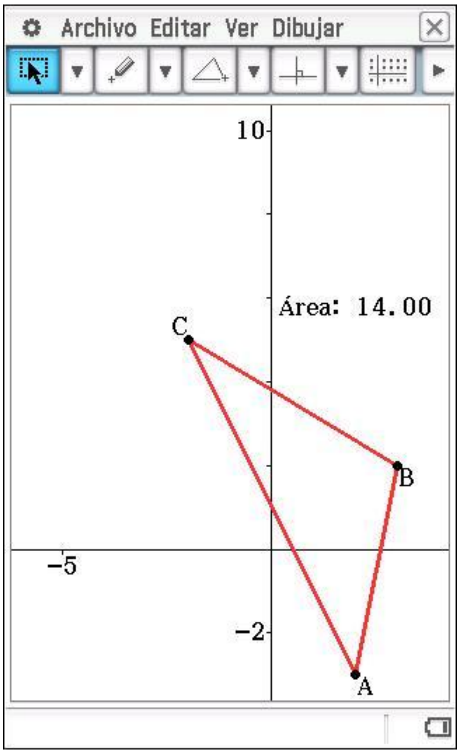
Podem variar les coordenades de A, B, i P per resoldre altres problemes

Problema 10 (116)
Les coordenades dels vèrtexs d'un triangle són $A(2,-3)$, $B(3,2)$, $C(-2,5)$.
Calcula l'àrea del triangle.

Obrim una eActivity.

Solució geomètrica:
Insertem tres vincles geomètrics amb els vèrtexs $A(2,-3)$, $B(3,2)$, $C(-2,5)$.
Obrim la finestra geomètrica en la què arrosseguem els tres vincles.
Amb l'opció segment dibuixem els costats del triangle.
Seleccionem els costats del triangle i amb el quadre de mesures calculem l'àrea:
$S_{ABC} = 14$.





Solució analítica 1:

Apliquem la fórmula: $S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{pmatrix}\right|$.

Solució analítica 2:

Apliquem la fórmula de Heró: $S_{ABC} = \dfrac{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}{2}$:

Insertem una fila de càlcul.
Definim les variables:
$[2 \quad -3] \Rightarrow A$
$[3 \quad 2] \Rightarrow B$
$[-2 \quad 5] \Rightarrow C$.
Calculem les mesures dels costats del triangle
$\text{norm}(C-B) \Rightarrow a$

$\text{norm}(C - A) \Rightarrow b$
$\text{norm}(B - A) \Rightarrow c$

Calculem $\dfrac{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}{2}$.

Solució analítica 3:

Apliquem la fórmula trigonomètrica $S_{ABC} = \dfrac{bc \cdot \sin A}{2}$.

Calculem l'angle A:

$\dfrac{\text{dotP}(B - A, C - A)}{b \cdot c} \Rightarrow \cos A$.

Calculem l'angle A:

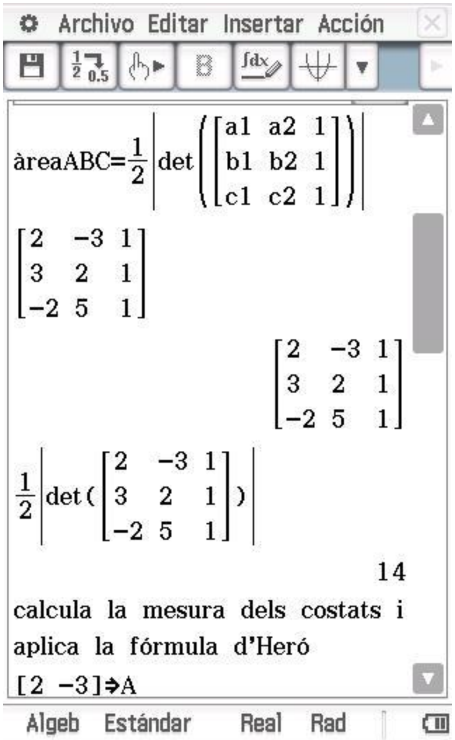
$\cos^{-1}(\cos A) \Rightarrow aA$.

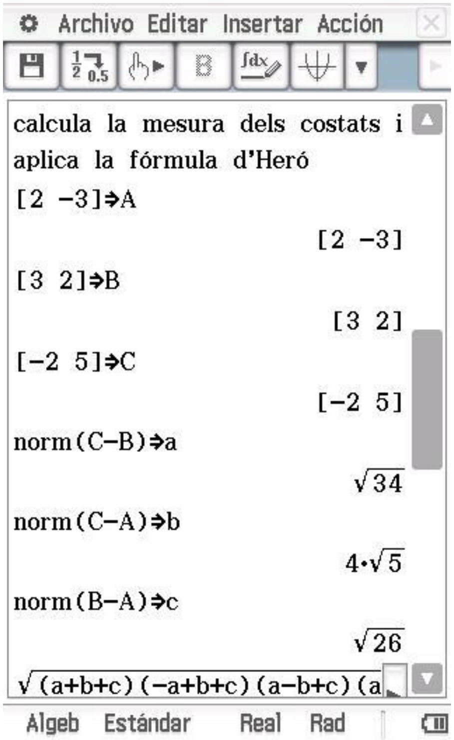
Calculem l'àrea con la fórmula trigonomètrica:

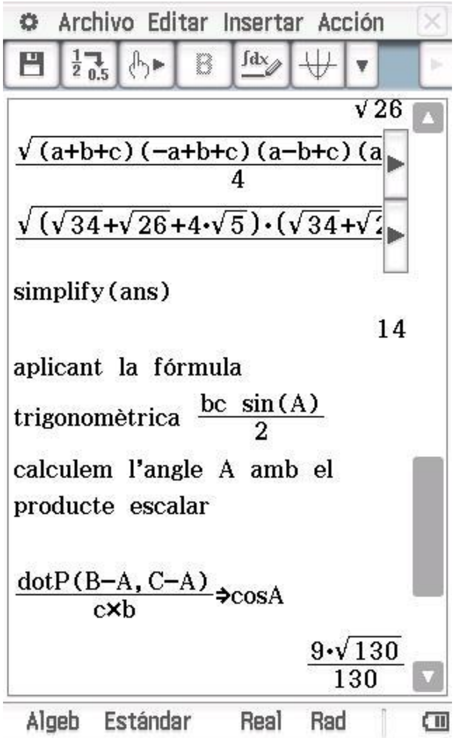
$\dfrac{b \cdot c \cdot \sin(aA)}{2}$.

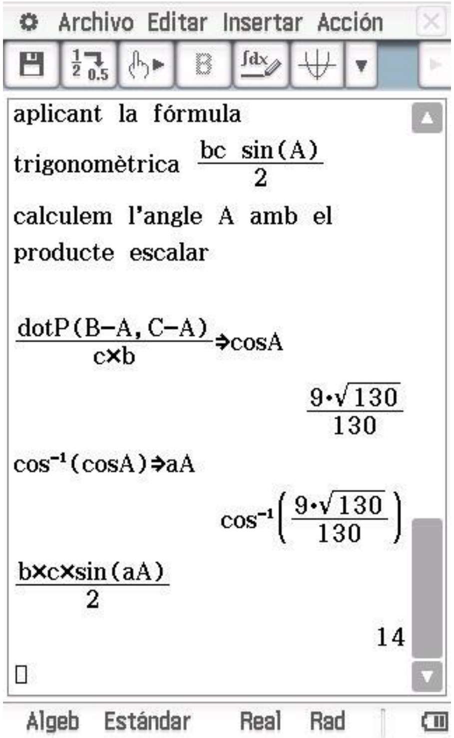
Per calcular l'angle podem utilitzar l'opció:

$\text{angle}(B - A, C - A)$.






Archivo Editar Insertar Acción
√26
√(a+b+c)(−a+b+c)(a−b+c)(a
4
√(√34+√26+4·√5)·(√34+√2
simplify(ans)
14
aplicant la fórmula
trigonomètrica bc sin(A) / 2
calculem l'angle A amb el
producte escalar
dotP(B−A, C−A) / c×b ⇒cosA
9·√130 / 130
Algeb Estándar Real Rad


Archivo Editar Insertar Acción
aplicant la fórmula
trigonomètrica bc sin(A) / 2
calculem l'angle A amb el
producte escalar
dotP(B−A, C−A) / c×b ⇒cosA
9·√130 / 130
cos⁻¹(cosA)⇒aA
cos⁻¹(9·√130 / 130)
b×c×sin(aA) / 2
14
Algeb Estándar Real Rad

Problema 11

Determina l’equació de la recta mediatriu del segment d’extrems $A(1, 4)$, $B(-5, 2)$.

Obrim una eActivity.

Solució geomètrica:

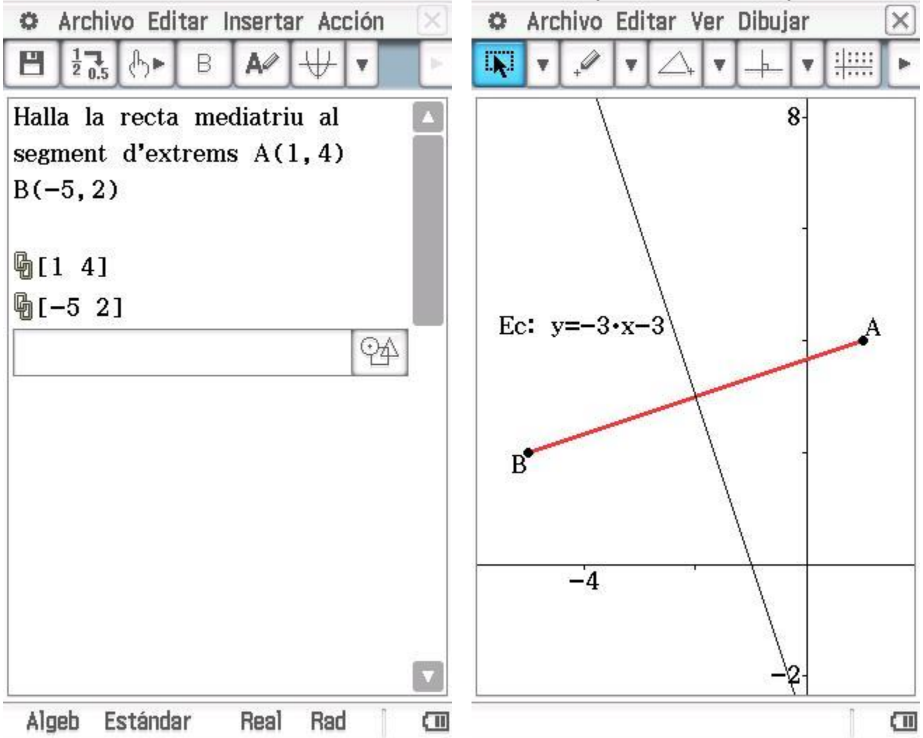
Insertem dos vincles geomètrics amb les coordenades dels extrems $A(1, 4)$, $B(-5, 2)$.

Obrim una finestra geomètrica en la què arrosseguem els dos vincles.

Dibuixem el segment $\overline{AB}$.

Seleccionem el segment i dibuixem la recta mediatriu.

Seleccionem la recta i determinem la seua equació amb el quadre de mesures



Solució analítica:

Insertem una fila de càlcul.

Definim les variables:

$[1 \quad 4] \Rightarrow A$

$[-5 \quad 2] \Rightarrow B$

Calculem el punt mig:

$\frac{A+B}{2} \Rightarrow M$.

Calculem les coordenades de M:

$M[1, 1] \Rightarrow M1$

$M[1, 2] \Rightarrow M2$

Calculem el vector $\overrightarrow{AB}$:

$B - A \Rightarrow v$.

Calculem el pendent del vector $\overrightarrow{AB}$:

$\frac{v[1, 2]}{v[1, 1]} \Rightarrow m$.

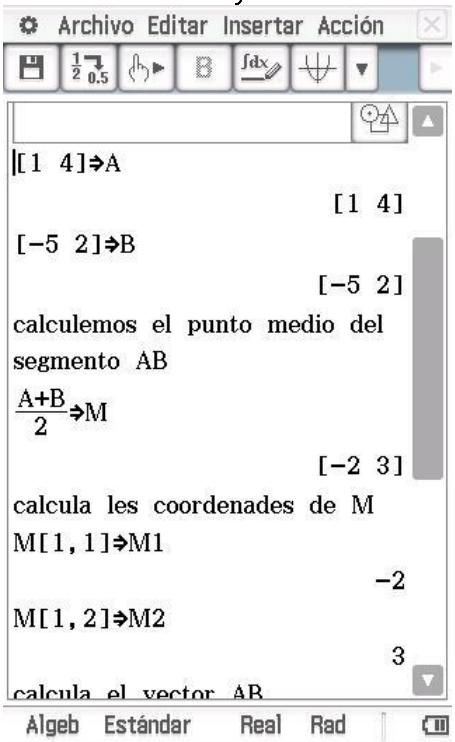
La recta mediatriu és:

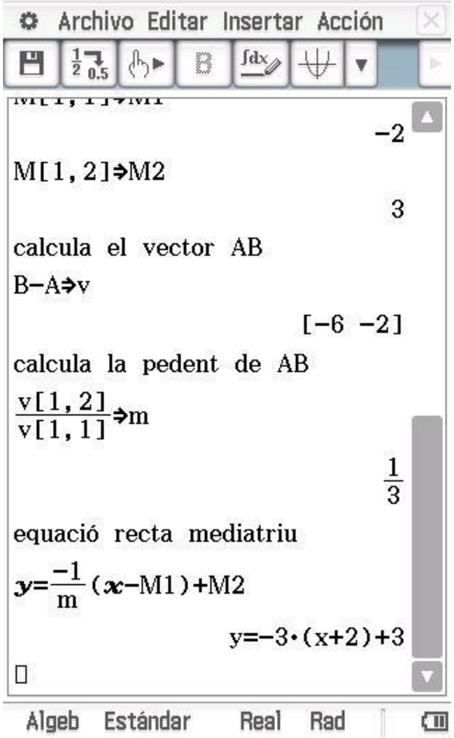
$$y = \frac{-1}{m}(x - M1) + M2 .$$

La solució és:

$$y = -3(x + 2) + 3$$

Desem la eActivity.



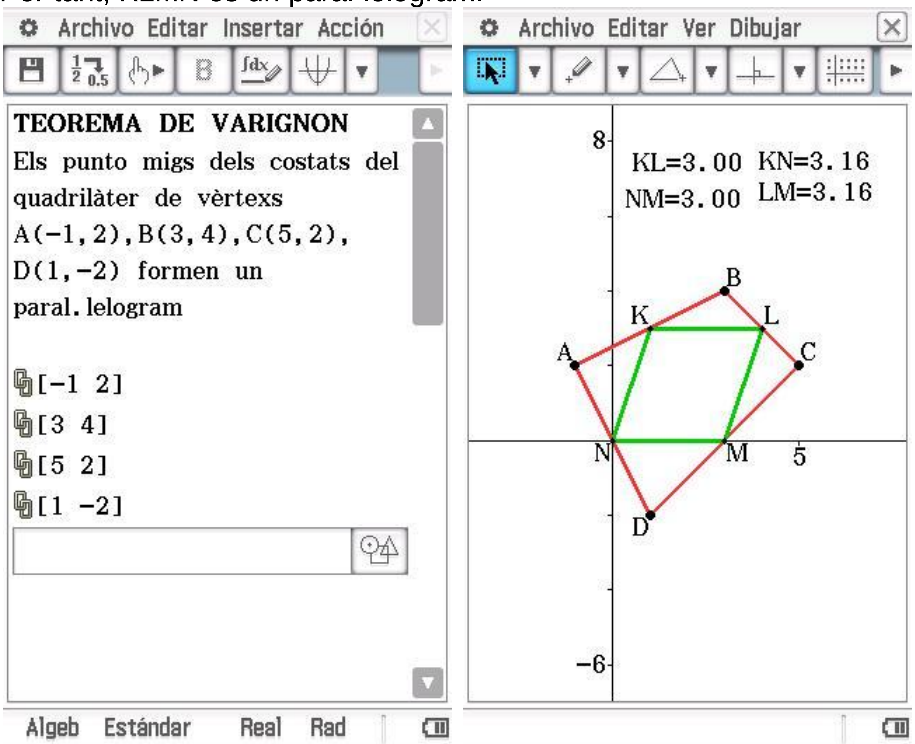


Podem variar les coordenades de A i B per resoldre altres problemes.

Problema 12
TEOREMA DE VARIGNON
Siguen $A(-1,2)$, $B(3,4)$, $C(5,2)$, $D(1,-2)$ els vèrtexs del quadrilàter ABCD.
Prova que els punts migs del quadrilàter són els vèrtexs d'un paral·lelogram.

Obrim una eActivity.

Solució geomètrica:
Insertem quatre vincles geomètrics amb les coordenades dels punts $A(-1,2)$, $B(3,4)$, $C(5,2)$, $D(1,-2)$ vèrtexs del quadrilàter.
Obrim una finestra geomètrica en la què arrosseguem els quatre vincles.
Amb l'opció segment dibuixem el quadrilàter ABCD.
Seleccionem cada costat i dibuixem els punts migs K, L, M, N.
Amb l'opció segment dibuixem el quadrilàter KLMN.
Calculem las mesures dels costats del quadrilàter KLMN (quadre de mesura).
Observem que els costats oposats són iguals.
$\overline{KL} = \overline{NM} = 3$, $\overline{KN} = \overline{LM} = 3.16$.
Per tant, KLMN es un paral·lelogram.



Solució analítica:
Insertem una fila de càlcul.
Definim les variables:
$[-1 \quad 2] \Rightarrow A$
$[3 \quad 4] \Rightarrow B$
$[5 \quad 2] \Rightarrow C$
$[1 \quad -2] \Rightarrow D$
Calculem els punts migs dels costats del quadrilàter ABCD:
$\frac{A+B}{2} \Rightarrow K$

$$\frac{B+C}{2} \Rightarrow L$$

$$\frac{C+D}{2} \Rightarrow M$$

$$\frac{A+D}{2} \Rightarrow N.$$

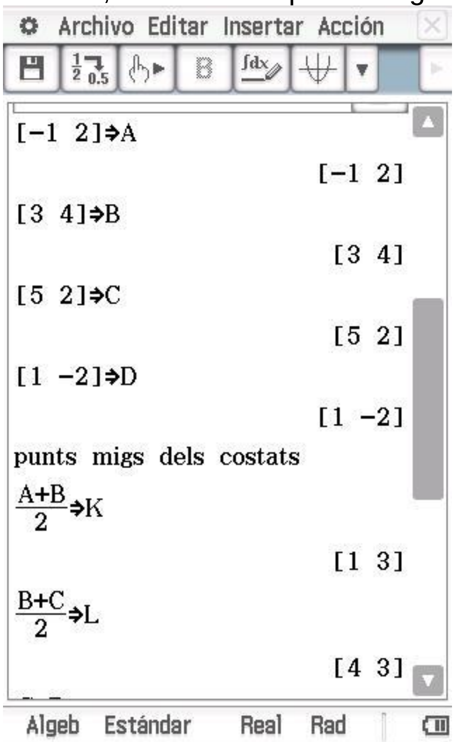
Calculem les components dels vectors $\overrightarrow{NK}$, $\overrightarrow{ML}$.

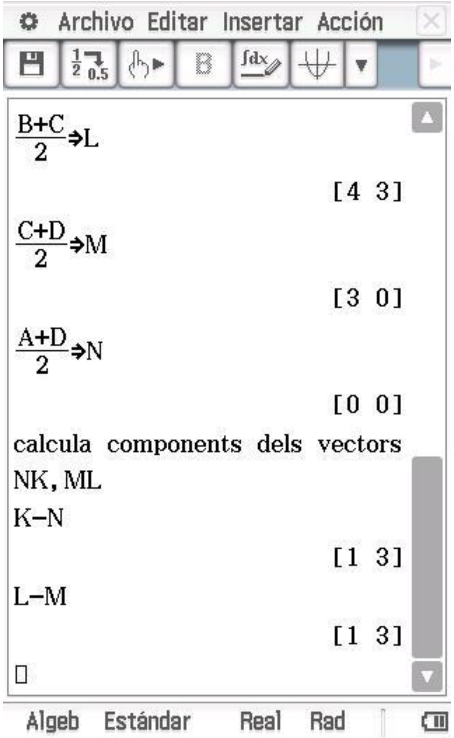
$K-N$

$L-M$

Observem que $\overrightarrow{NK} = \overrightarrow{ML} = (1,3)$.

Per tant, KLMN és un paral·lelogram.



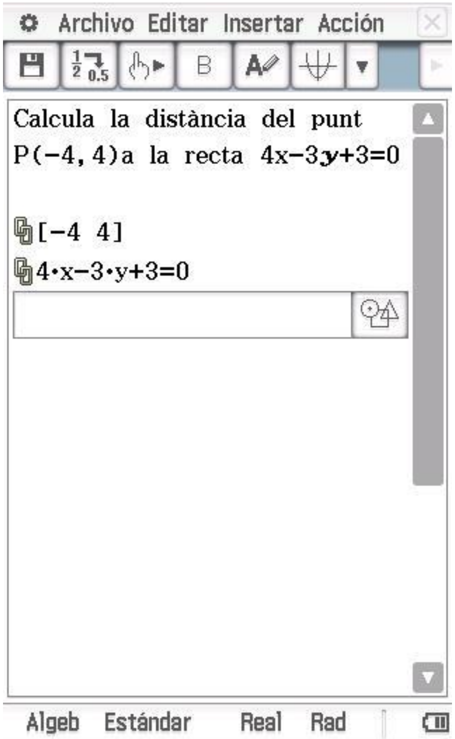


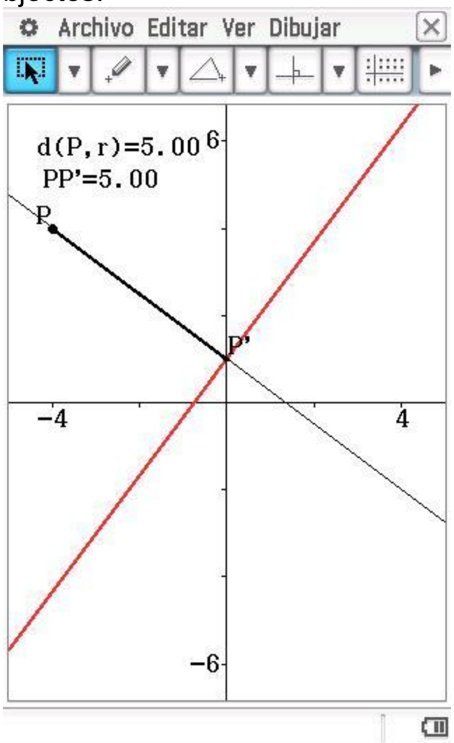
Podem variar les coordenades de A, B, C i D per resoldre altres problemes i poder fer la conjetura del teorema.

Problema 13
Calcula la distància del punt $P(-4, 4)$ a la recta $4x - 3y + 3 = 0$.

Obrim una eActivity.

Solució geomètrica:
Insertem dos vincles geomètrics amb les coordenades del punt $P(-4, 4)$, i la recta $4x - 3y + 3 = 0$.
Obrim una finestra geomètrica en la què arrosseguem els dos vincles.
Seleccionem el punt i la recta dibuixem la recta perpendicular.
Intersectem les dues rectes que és el punt projecció P'.
Dibuixem el segment $\overline{PP'}$.
Seleccionem el segment i amb el quadre de mesures calculem la seua longitud que és la distància del punt a la recta.
Seleccionem el punt $P(-4, 4)$ i la recta $4x - 3y + 3 = 0$. Amb el quadre de mesures calculem la distància entre els dos objectes.

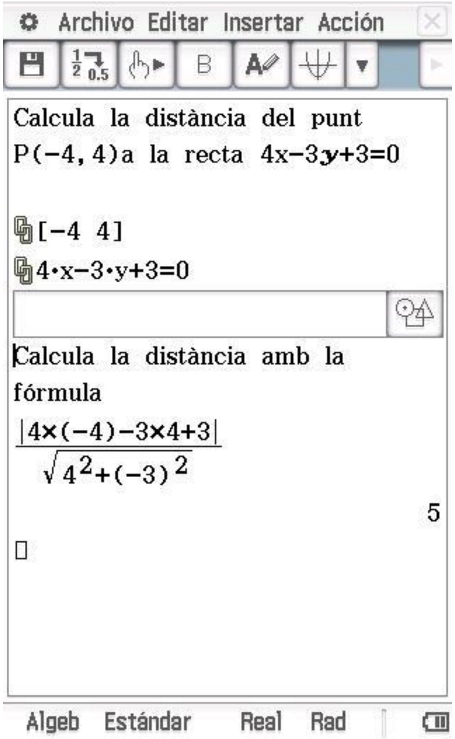




Solució analítica:

La distància del punt a la recta es:

$$\frac{|4\cdot(-4)-3\cdot 4+3|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=5\,.$$



Problema 14 (83)

Donats els vèrtexs oposats $A(3,0)$, $C(-4,1)$ del quadrat ABCD, determina els altres vèrtexs.

Calcula l'àrea.

Obrim una eActivity.

Solució geomètrica:

Insertem dos vincles geomètrics amb les coordenades dels vèrtexs $A(3,0)$, $C(-4,1)$

Obrim la finestra geomètrica en la què arrosseguem els tres vincles.

Dibuixem el segment $\overline{AC}$.

Seleccionem el segment $\overline{AC}$ i dibuixem el punt mig O.

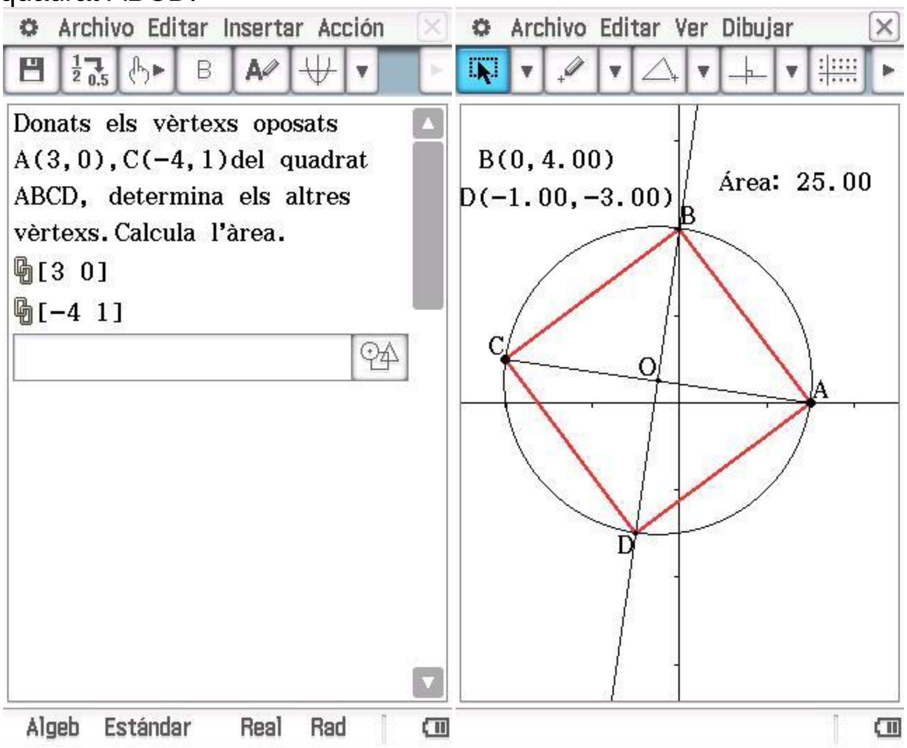
Seleccionem el segment $\overline{AC}$ i dibuixem la recta mediatriu.

Dibuixem la circumferència de centre O que passa por A.

Seleccionem la circumferència i la recta mediatriu. La intersecció són els vèrtexs B, D.

Amb l'opció segment, dibuixem el quadrat ABCD.

Seleccionem els costats del quadrat i amb el quadre de mesures, calculem l'àrea del quadrat ABCD.



Solució analítica:

Insertem una fila de càlcul.

Definim les variables:

$[3 \quad 0] \Rightarrow A$

$[-4 \quad 1] \Rightarrow C$

Calculem el centre del quadrat:

$$\frac{A+C}{2} \Rightarrow O$$

Calculem les components del vector $\overrightarrow{OA}$:

$A - O \Rightarrow OA$

$OA[1,1] \Rightarrow OA1$.

$OA[1,2] \Rightarrow OA2$.

Calculem les coordenades de B:

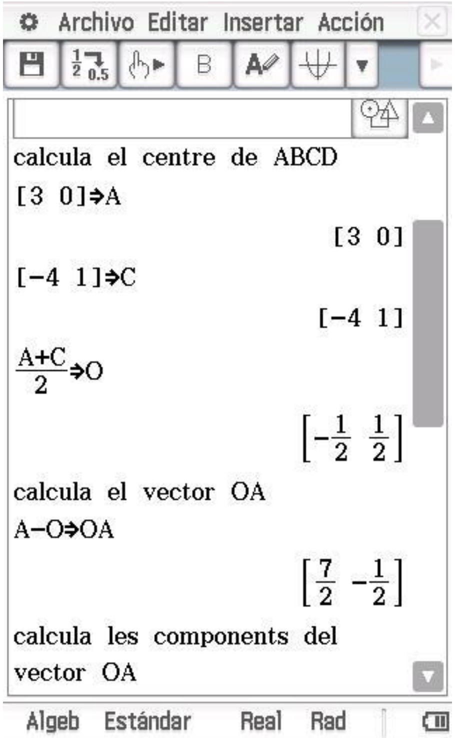
$[-OA2, \quad OA1] + O \Rightarrow B$

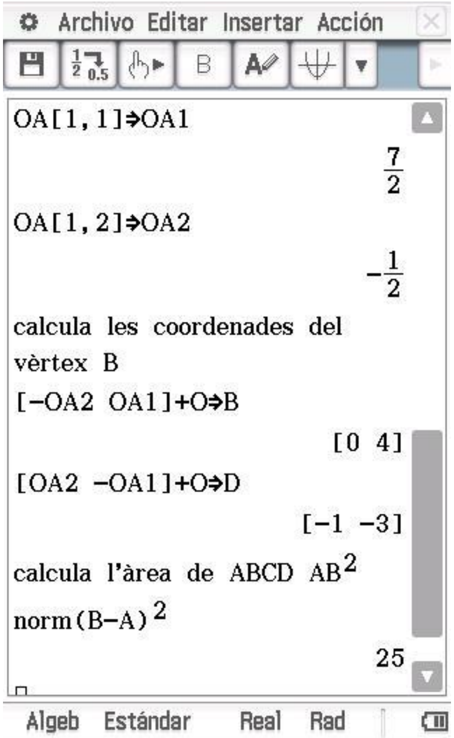
Calculem les coordenades de D:

$[OA2, \quad -OA1] + O \Rightarrow D$.

Calculem l'àrea del quadrat ABCD, $\overline{AB}^2$:

$norm(B - A)^2$.



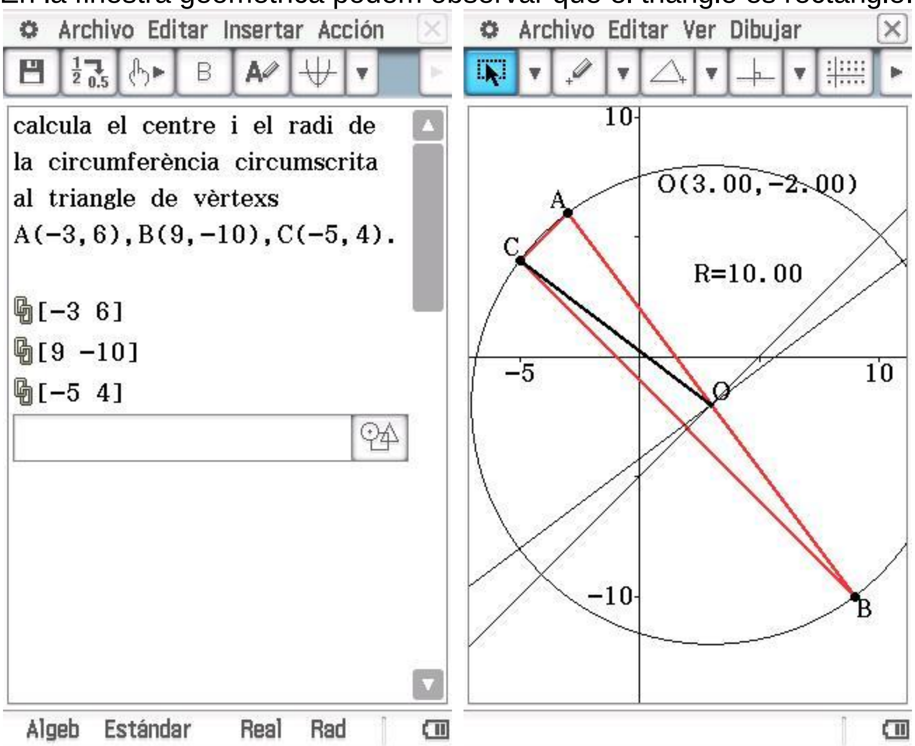


Podem variar les coordenades de A i C per resoldre altres problemes

Problema 15 (85)
Calcula el centre i el radi de la circumferència circumscrita al triangle de vèrtexs $A(-3, 6)$, $B(9, -10)$ i $C(-5, 4)$.

Obrim una eActivity.

Solució geomètrica:
Insertem tres vincles geomètrics amb els vèrtexs $A(-3, 6)$, $B(9, -10)$ i $C(-5, 4)$.
Obrim la finestra geomètrica en la què arrosseguem els tres vincles.
Dibuixem els costats del triangle.
Seleccionem el costat $\overline{BC}$ i dibuixem la mediatriu.
Seleccionem el costat $\overline{AB}$ i dibuixem la mediatriu.
Seleccionem las dues mediatrius. La intersecció és el centre O de la circumferència circumscrita.
Seleccionem el punt O. Amb el quadre de mesures calculem les seues coordenades.
Dibuixem el segment $\overline{OA}$. Amb el quadre de mesures calculem el radi de la circumferència.
$O(3, -2)$, $R = 10$.
En la finestra geomètrica podem observar que el triangle és rectangle.



Solució analítica:
Insertem una fila de càlcul.
Definim les variables:
$[-3 \quad 6] \Rightarrow A$
$[9 \quad -10] \Rightarrow B$
$[-5 \quad 4] \Rightarrow C$.
Calculem las mesures dels costats del triangle
$\text{norm}(C - B) \Rightarrow a$
$\text{norm}(C - A) \Rightarrow b$

$\mathrm{norm}(B-A) \Rightarrow c$

Amb el teorema invers de Pitàgores, se demostra que el triangle és rectangle:

$c^2 = a^2 + b^2$.

Per tant, $C = 90^o$.

En un triangle rectangle el centre de la circumferència circumscrita és el punt mig de la hipotenusa i el radi és la meitat de la hipotenusa.

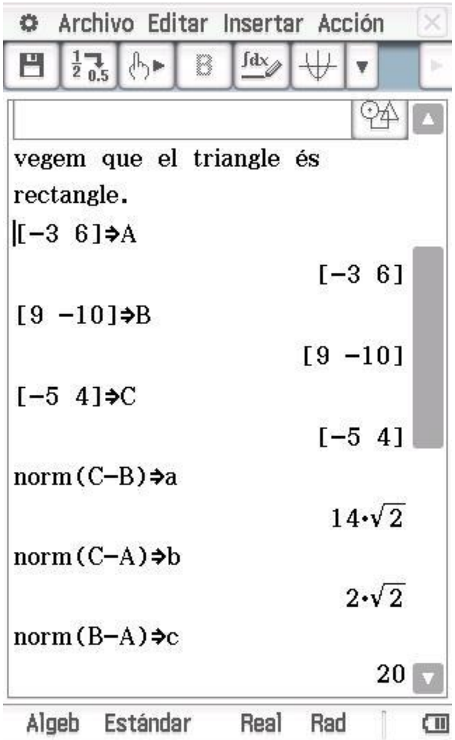
$\frac{A+B}{2} \Rightarrow O$.

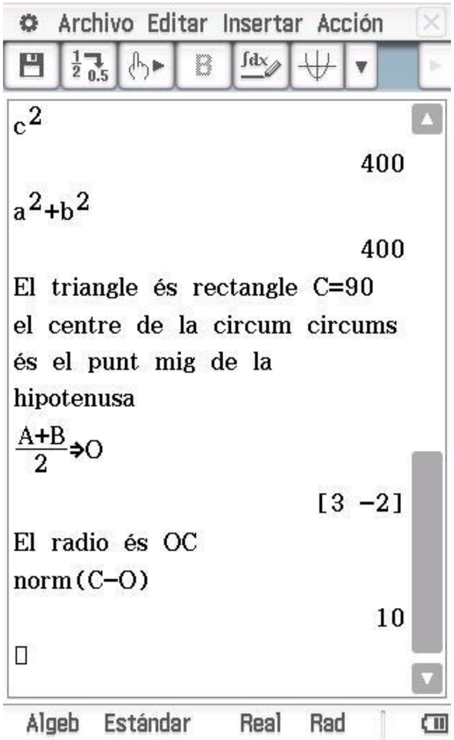
$O(3, -2)$.

El radi és:

$\mathrm{norm}(C-O)$.

$R = 10$.





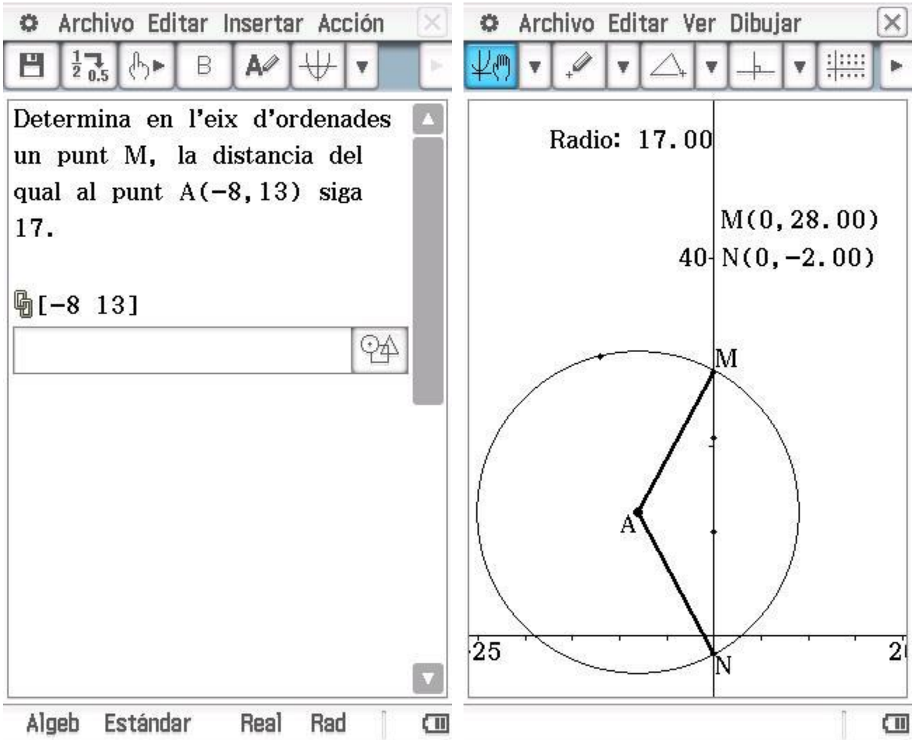
Podem variar les coordenades de A, B i C per resoldre altres problemes

Problema 16 (78)

Determina en l'eix d'ordenades el punt M, la distància del qual al punt $A(-8, 13)$ siga 17.

Obrim una eActivity.

Solució geomètrica:
Insertem un vincle geomètric amb el punt $A(-8, 13)$.
Obrim la finestra geomètrica en la qual s'arrossega el vincle.
Dibuixem una circumferència de centre A.
En el quadre de mesures assignem 17 al radi.
Dibuixem la recta $x = 0$, eix d'ordenades.
Seleccionem la circumferència i la recta. La intersecció són els punts M, N buscats.
$M(0, 28)$, $N(0, -2)$.

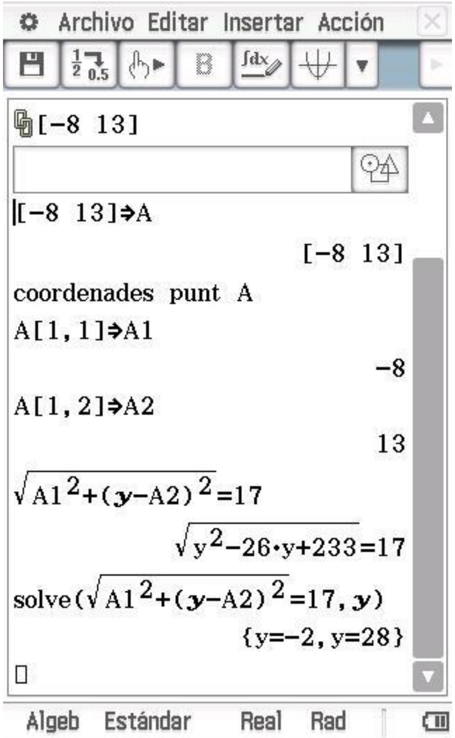


Solució analítica:
Insertem una fila de càlcul.
Definim la variables:
$[-8 \quad 13] \Rightarrow A$
Calculem les coordenades de A:
$A[1, 1] \Rightarrow A1$.
$A[1, 2] \Rightarrow A2$
Resolem l'equació tal que la distància del punt A al punt $P(0, y)$ siga 17:

$$\sqrt{A1^2 + (y - A2)^2} = 0$$

$$\text{solve}\left(\sqrt{A1^2 + (y - A2)^2}\right) = 0$$

Las soluciones són $y = -2, 28$.
Els punts buscats són $M(0, 28)$, $N(0, -2)$.


Archivo Editar Insertar Acción
[−8 13]
[−8 13]⇒A
[−8 13]
coordenades punt A
A[1,1]⇒A1
−8
A[1,2]⇒A2
13
√(A1²+(y−A2)²)=17
√(y²−26·y+233)=17
solve(√(A1²+(y−A2)²)=17, y)
{y=−2, y=28}
Algeb Estándar Real Rad

Problema 17 (94)

Siga el triangle de vèrtexs $A(1,4)$, $B(3,-9)$ i $C(-5,2)$.

a) Determina el punt mig M del costat $\overline{AC}$.

b) Calcula la longitud de la mitjana $\overline{BM}$.

c) Comprova que $\overline{BM}=\dfrac{\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}}{2}$.

d) Calcula el baricentre G del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

Obrim una eActivity.

Solució geomètrica:

Insertem tres vincles geomètrics amb els vèrtexs $A(1,4)$, $B(3,-9)$ i $C(-5,2)$.

Obrim la finestra geomètrica en la què arrosseguem els tres vincles.

Dibuixem els costats del triangle.

Seleccionem el costat $\overline{AC}$ i dibuixem el punt mig M.

Seleccionem el punt M i amb el quadre de mesures calculem les seues coordenades.

Dibuixem la mitjana $\overline{BM}$ i amb el quadre de mesures calculem la seua longitud.

Seleccionem el costat $\overline{BC}$ i dibuixem el punt mig N.

Dibuixem la mitjana $\overline{AN}$.

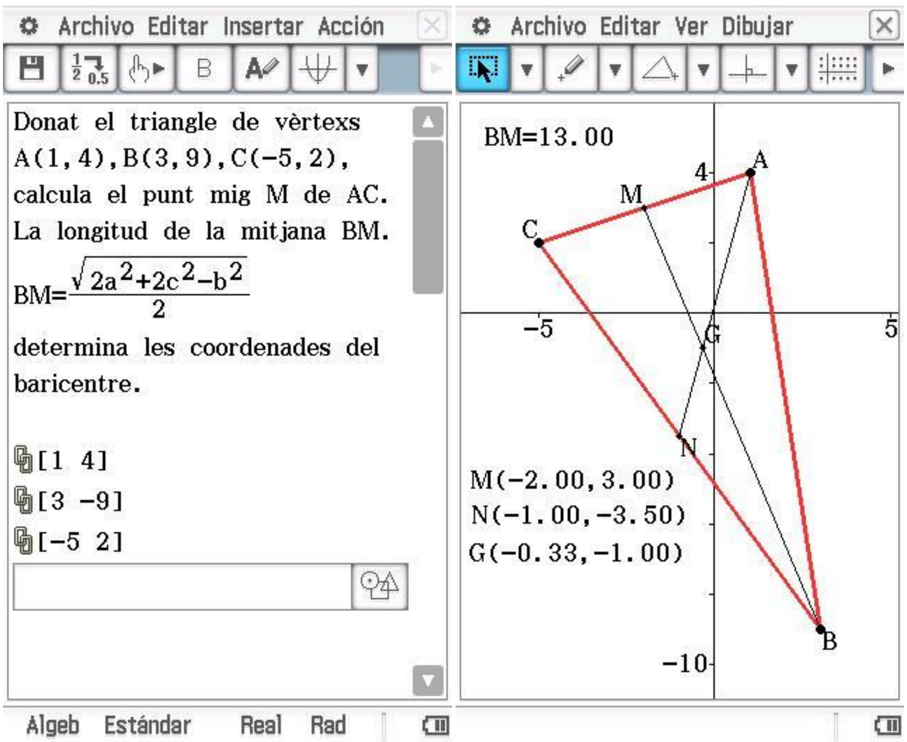
Seleccionem las dos mitjanes i dibuixem la intersecció que es el baricentre G.

Seleccionem el punt G i amb el quadre de mesures calculem les seues coordenades.

$\overline{BM}=13$.

$M(-2,3)$.

$G\left(\dfrac{-1}{3},-1\right)$.



Solució analítica:

Insertem una fila de càlcul.

Definim les variables:

$[1 \quad 6] \Rightarrow A$

$[3 \quad -9] \Rightarrow B$

$[-5 \quad 2] \Rightarrow C$.

Calculem el punt mig M del segment $\overline{AC}$:

$\frac{A+C}{2} \Rightarrow M$

Calculem la longitud de la mitjana:

$\text{norm}(M-B)$

Calculem la mesura dels costats del triangle

$\text{norm}(C-B) \Rightarrow a$

$\text{norm}(C-A) \Rightarrow b$

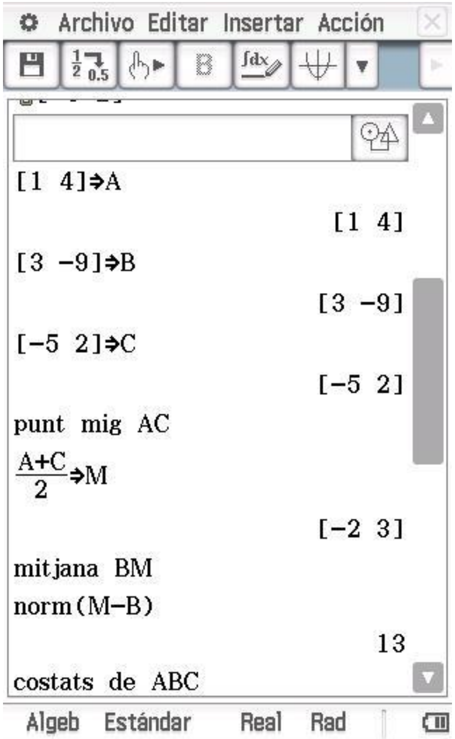
$\text{norm}(B-A) \Rightarrow c$

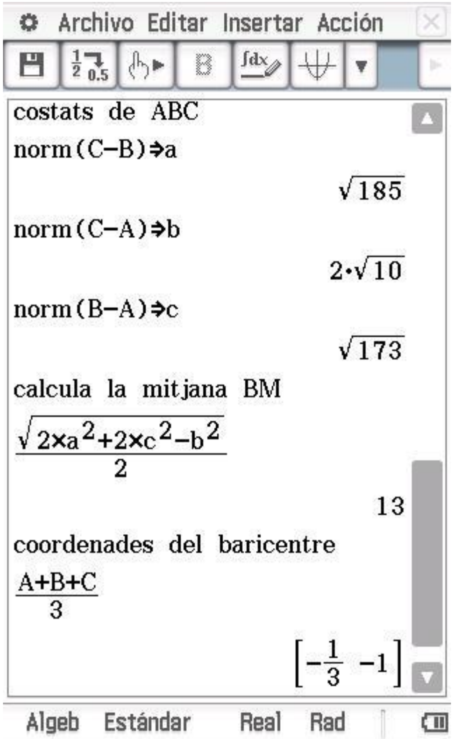
Calculem la longitud de la mitjana:

$\frac{\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}}{2}$

Calculem les coordenades del baricentre:

$\frac{A+B+C}{3}$

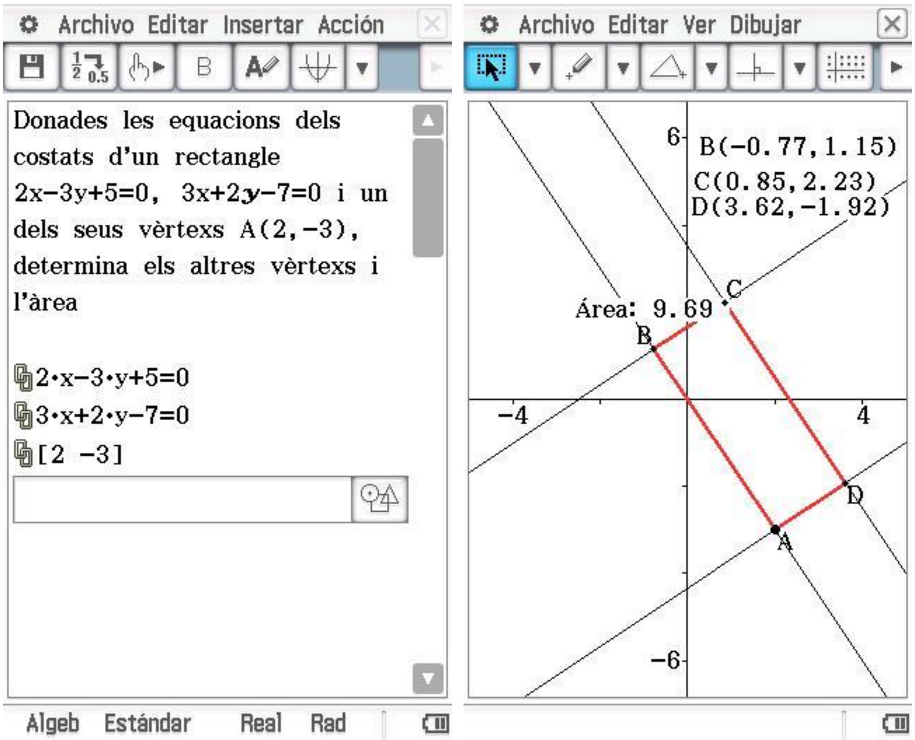




Problema 18 (224)
Donades la rectes d’equacions $r \equiv 2x - 3y + 5 = 0$, $s \equiv 3x + 2y - 7 = 0$ costats d’un rectangle i $A(2, -3)$ un dels seus vèrtexs, determina els altres vèrtexs i l’àrea.

Obrim una eActivity.

Solució geomètrica:
Insertem tres vincles geomètrics amb les rectes $2x - 3y + 5 = 0$, $3x + 2y - 7 = 0$ i el vèrtex $A(2, -3)$.
Obrim la finestra geomètrica en la què arrosseguem els tres vincles.
Seleccionem las dos rectes. La intersecció es el vèrtex C.
Seleccionem el vèrtex A i la recta r. Dibuixem la recta p perpendicular a la recta r que passa por A.
Seleccionem las rectes r i p. La intersecció es el vèrtex B.
Seleccionem el punt B i amb el quadre de mesures determinem les seues coordenades.
Seleccionem el vèrtex A i la recta s. Dibuixem la recta q perpendicular a la recta r que passa por A.
Seleccionem las rectes s i q. La intersecció es el vèrtex D.
Seleccionem el punt D i amb el quadre de mesures determinem les seues coordenades.
Amb l’opció segment, dibuixem el rectangle ABCD.
Seleccionem els 4 costats i amb el quadre de mesures determinem l’àrea.
$B(-0.77, 1.15)$.
$C(0.85, 2.23)$.
$D(3.62, -1.92)$.
L’àrea és 9.69.



Solució analítica:
Observem que les rectes r i s són perpendiculars.

Insertem una fila de càlcul.
Per calcular les coordenades del vèrtex C resolem el sistema format per les rectes r i s:

$$\left\{\begin{array}{l} 2x-3y+5=0 \\ 3x+2y-7=0 \end{array}\right| x,y \; .$$

$$C\left(\frac{-10}{13}, \frac{15}{13}\right)$$

La recta p perpendicular a r que passa per A té equació:

$$y=\frac{-3}{2}(x-2)-3 \; .$$

El vèrtex B és la intersecció de r i p:

$$\left\{\begin{array}{l} 2x-3y+5=0 \\ y=\frac{-3}{2}(x-2)-3 \end{array}\right| x,y$$

$$B\left(\frac{-10}{13}, \frac{15}{13}\right)$$

La recta q perpendicular a s que passa per A té equació:

$$y=\frac{2}{3}(x-2)-3 \; .$$

El vèrtex D és la intersecció de s i q:

$$\left\{\begin{array}{l} 3x+2y-7=0 \\ y=\frac{2}{3}(x-2)-3 \end{array}\right| x,y$$

$$D\left(\frac{47}{13}, \frac{-25}{13}\right)$$

Definim les variables

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow A$$

$$\begin{bmatrix} \frac{-10}{13} & \frac{15}{13} \end{bmatrix} \Rightarrow B$$

$$\begin{bmatrix} \frac{11}{13} & \frac{29}{13} \end{bmatrix} \Rightarrow C$$

$$\begin{bmatrix} \frac{47}{13} & -25 \end{bmatrix} \Rightarrow D$$

Calculem la mesura del costat $\overline{AB}$:

$$\text{norm}(B-A) \Rightarrow a \, .$$

Calculem la mesura del costat $\overline{BC}$:

$$\text{norm}(B-C) \Rightarrow b \, .$$

Calculem l’àrea del rectangle ABCD:

$$a \cdot b = \frac{126}{13} \; .$$

vèrtex C, intersecció r, s

$$\begin{cases} 2x-3y+5=0 \\ 3x+2y-7=0 \end{cases}\Bigg|_{x,\,y}$$

$$\left\{x=\frac{11}{13},\ y=\frac{29}{13}\right\}$$

recta p perpendicular a r que passa per A

$$y=\frac{-3}{2}(x-2)-3$$

$$y=\frac{-3\cdot(x-2)}{2}-3$$

recta q perpendicular a s que passa per A

$$y=\frac{2}{3}(x-2)-3$$

$$y=\frac{2\cdot(x-2)}{3}-3$$

punt B intersec r, p

$$\begin{cases} 2x-3y+5=0 \\ y=\frac{-3}{2}(x-2)-3 \end{cases}\Bigg|_{x,\,y}$$

$$\left\{x=-\frac{10}{13},\ y=\frac{15}{13}\right\}$$

punt D intersec s, q

$$\begin{cases} 3x+2y-7=0 \\ y=\frac{2}{3}(x-2)-3 \end{cases}\Bigg|_{x,\,y}$$

$$\left\{x=\frac{47}{13},\ y=-\frac{25}{13}\right\}$$

$[2\ \ -3] \Rightarrow A$

$$[2\ \ -3]$$

$\left[\frac{-10}{13}\ \ \frac{15}{13}\right] \Rightarrow B$

$$\left[-\frac{10}{13}\ \ \frac{15}{13}\right]$$

$\left[\frac{11}{13}\ \ \frac{29}{13}\right] \Rightarrow C$

$$\left[\frac{11}{13}\ \ \frac{29}{13}\right]$$

$\left[\frac{47}{13}\ \ \frac{-25}{13}\right] \Rightarrow D$

$$\left[\frac{47}{13}\ \ -\frac{25}{13}\right]$$

norm(B−A)⇒a

$$\frac{18\cdot\sqrt{13}}{13}$$

norm(B−C)⇒b

$\left[\frac{47}{13}\ \ \frac{-25}{13}\right] \Rightarrow D$

$$\left[\frac{47}{13}\ \ -\frac{25}{13}\right]$$

norm(B−A)⇒a

$$\frac{18\cdot\sqrt{13}}{13}$$

norm(B−C)⇒b

$$\frac{7\cdot\sqrt{13}}{13}$$

àrea ABCD

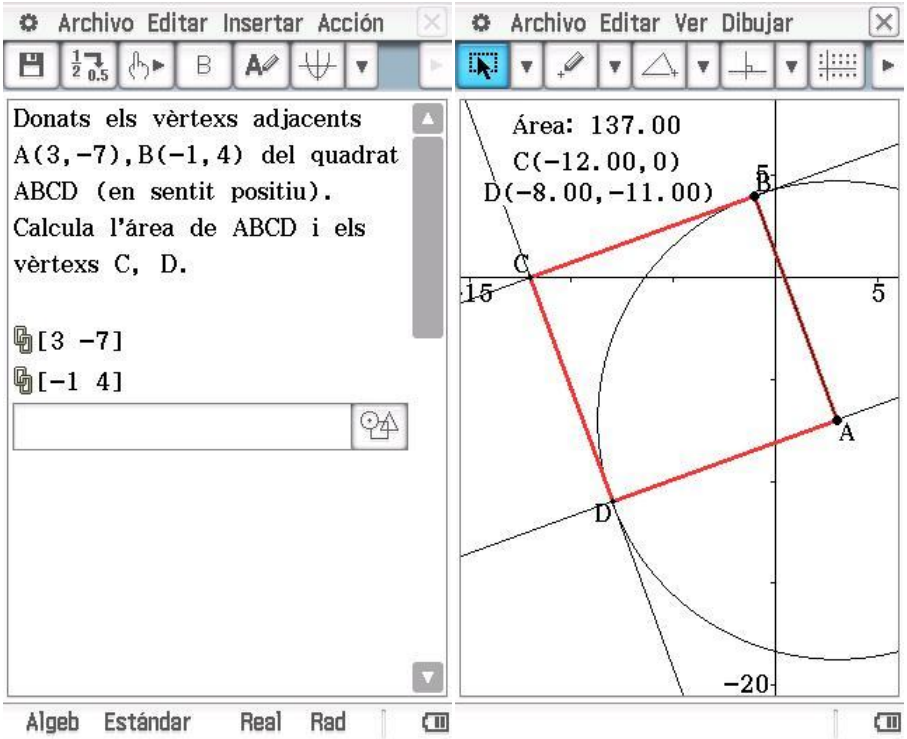
a×b

$$\frac{126}{13}$$

Problema 19 (64)
Donats els vèrtexs adjacents $A(3,-7)$, $B(-1,4)$ del quadrat ABCD, calcula l'àrea i els altres vèrtexs.

Obrim una eActivity.

Solució geomètrica:
Insertem dos vincles geomètrics amb els vèrtexs $A(3,-7)$, $B(-1,4)$.
Obrim la finestra geomètrica en la què arrosseguem els dos vincles.
Dibuixem el segment $\overline{AB}$.
Seleccionem el segment $\overline{AB}$ i el punt A. Dibuixem la recta p perpendicular al segment $\overline{AB}$ que passa por A.
Dibuixem la circumferència de centre A que passa por B.
Seleccionem la recta p i la circumferència. L intersecció es el vèrtex D.
Seleccionem el punt D i amb el quadre de mesures calculem les seues coordenades:
Seleccionem el segment $\overline{AB}$ i el punt B. Dibuixem la recta q perpendicular al segment $\overline{AB}$ que passa por B.
Seleccionem la recta p i el punt D. Dibuixem la recta t perpendicular a la recta p que passa por D.
Seleccionem la recta q i la recta t. La intersecció es el vèrtex C.
Seleccionem el punt C i amb el quadre de mesures calculem les seues coordenades:
Amb l'opció segment, dibuixem el quadrat ABCD.
Seleccionem el quadrat i amb el quadre de mesures calculem la seua àrea:
$C(-12,0)$.
$D(-8,-11)$.
$S_{ABCD}=137$.



Solució analítica:
Insertem una fila de càlcul.
Definim les variables:

$[3 \quad -7] \Rightarrow A$

$[-1 \quad 4] \Rightarrow B$

Calculem el vector $\overrightarrow{AB}$:

$B - A \Rightarrow AB$

Calculem les components del vector $\overrightarrow{AB}$:

$AB[1,1] \Rightarrow AB1$.

$AB[1,2] \Rightarrow AB2$.

Les coordenades de D són:

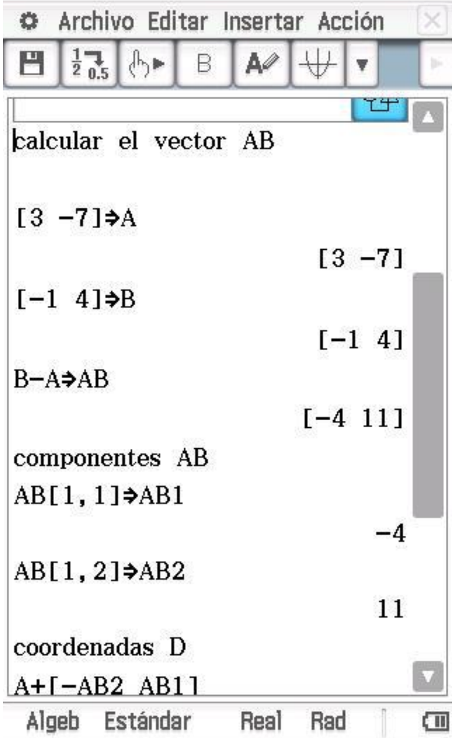
$A + [-AB2 \quad AB1]$.

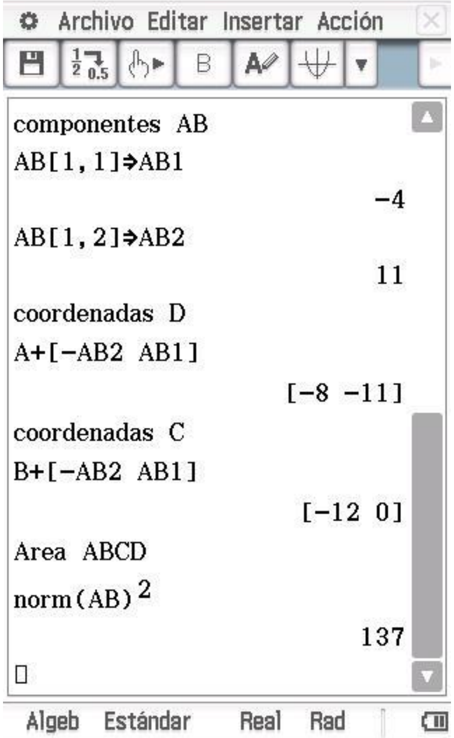
Les coordenades de C són:

$B + [-AB2 \quad AB1]$

L'àrea de quadrat és:

$\text{norm}(AB)^2$

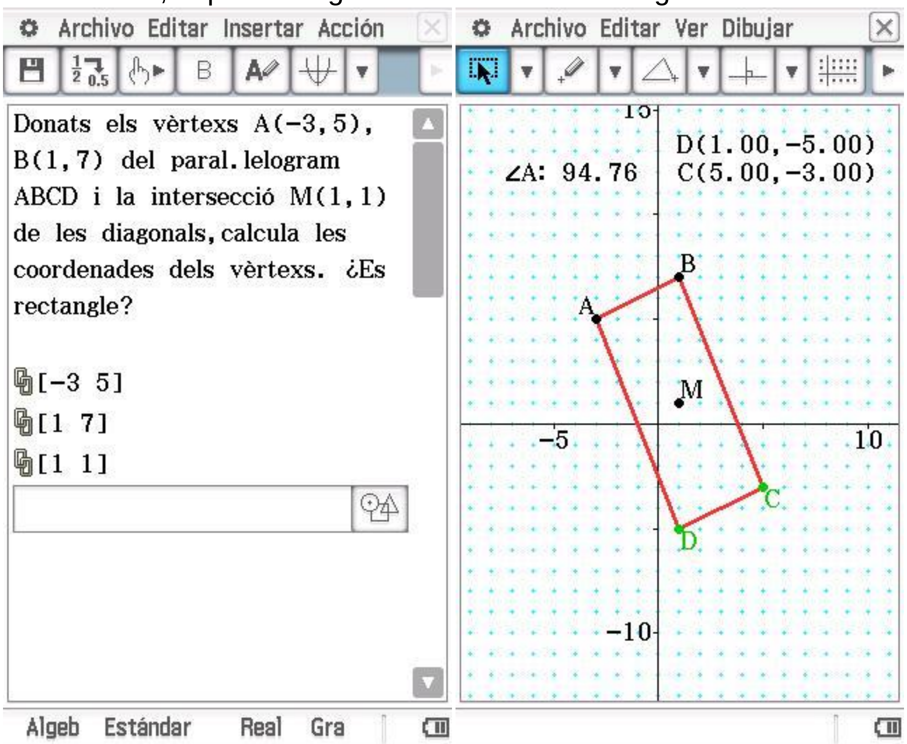




Problema 20 (92)
Donats els vèrtexs $A(-3,5)$, $B(1,7)$ del paral·lelogram ABCD i $M(1,1)$ la intersecció de les diagonals, calcula els vèrtexs C i D. ABCD és un rectangle?.

Obrim una eActivity.

Solució geomètrica:
Insertemn tres vincles geomètrics amb els vèrtexs $A(-3,5)$, $B(1,7)$ i del centre $M(1,1)$ del paral·lelogram ABCD.
Obrim la finestra geomètrica en la què arrosseguem els tres vincles.
El vèrtex C és el punt simètric de A respecto del centre M. Dibuixem el gir de 180º del punt A amb centre M.
El vèrtex D és el punt simètric de B respecto del centre M. Dibuixem el gir de 180º del punt B amb centre M.
Amb l'opció segment, dibuixem el paral·lelogram ABCD.
Seleccionem els costats $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ i amb el quadre de mesures calculem la mesura de l'angle A.
$C(5,-3)$
$D(1,-5)$
$\angle A = 94.76$, el paral·lelogram ABCD no és rectangle.



Solució analítica:
Insertem una fila de càlcul.
Definim les variables:
$[-3 \quad 5] \Rightarrow A$
$[1 \quad 7] \Rightarrow B$
$[1 \quad 1] \Rightarrow M$.
Calculem el vector $\overrightarrow{AM}$.
$M - A \Rightarrow AM$.
Les coordenades de C són:

$M + AM \Rightarrow C$

Calculem el vector $\overrightarrow{BM}$.

$M - B \Rightarrow BM$.

Les coordenades de D són:

$M + BM \Rightarrow D$

Calculem els vectors $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$.

$B - A \Rightarrow AB$

$D - A \Rightarrow AD$

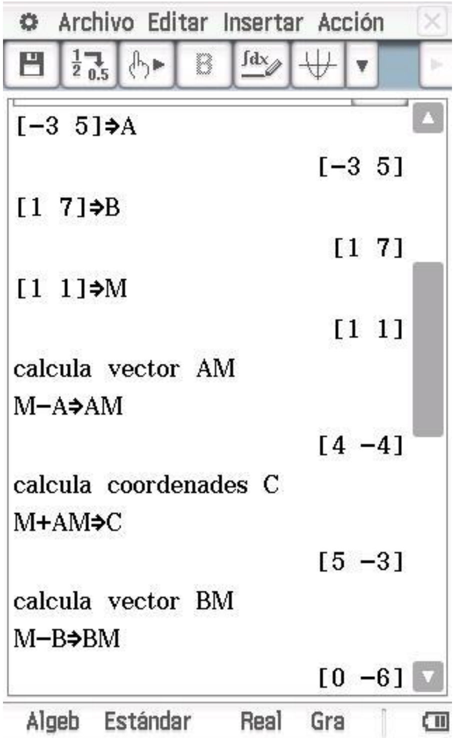
Calculem el producte escalar dels vectors $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$.

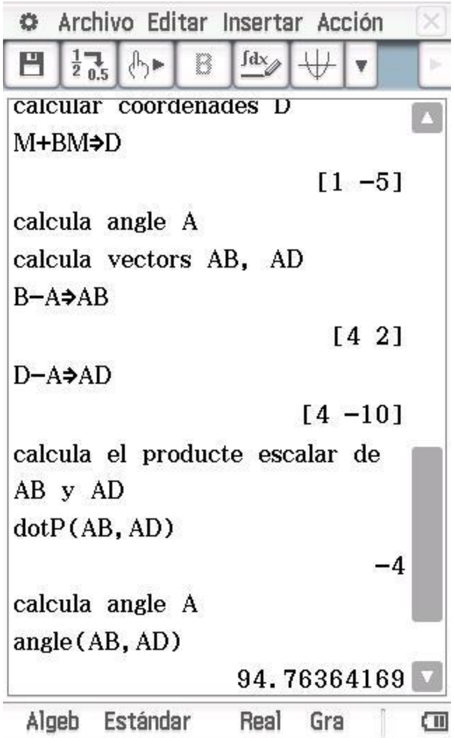
$\text{dotP}(AB, AD) = -4$.

El paral·lelogram no és rectangle ja que el producte escalar no és nul.

Calculem l'angle A:

$\text{angle}(AB, AD) = 94.76364169$.

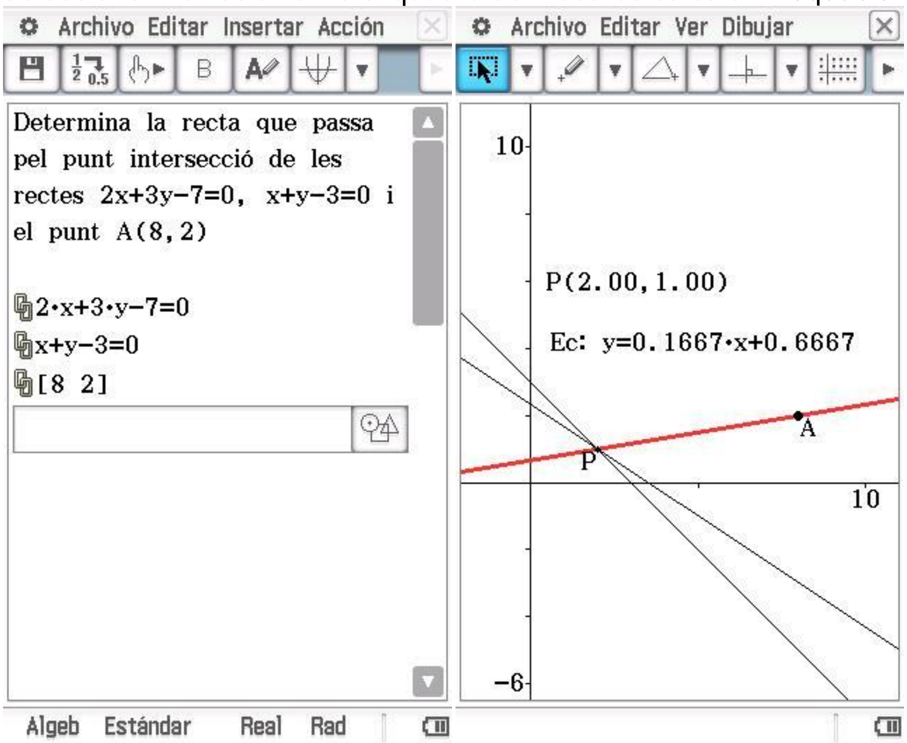




Problema 21
Determina la recta que passa pel punt intersecció de les rectes $r \equiv 2x+3y-7=0$, $s \equiv x+y-3=0$ i pel punt $A(8,2)$.

Obrim una eActivity.

Solució geomètrica:
Insertem tres vincles geomètrics amb les rectes $2x+3y-7=0$, $x+y-3=0$ i el punt $A(8,2)$.
Obrim la finestra geomètrica en la què arrosseguem els tres vincles.
Seleccionem les dues rectes. La intersecció és el vèrtex P.
Dibuixem la recta que passa por A i por P.
Seleccionem la recta i amb el quadre de mesures calculem l'equació de la recta.



Solució analítica:
Insertem una fila de càlcul.
Resolem el sistema format per les equacions de les dos rectes:

$$\left\{\begin{array}{l} 2x+3y-7=0 \\ x+y-3=0 \end{array}\right|_{x,y}$$

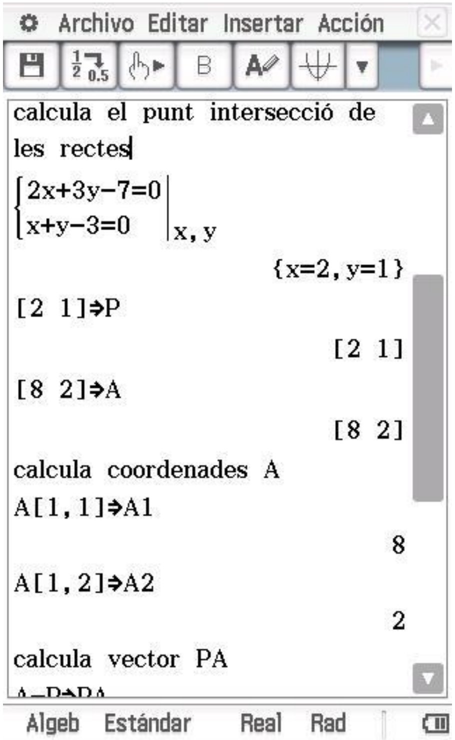
$P(2,1)$
Definim les variables:
$[2 \quad 1] \Rightarrow P$
$[8 \quad 2] \Rightarrow A$
Calculem les coordenades de A:
$A[1,1] \Rightarrow A1$.
$A[1,2] \Rightarrow A2$.
Calculem el vector PA
$A-P \Rightarrow PA$
Calculem el pendent de la recta PA:

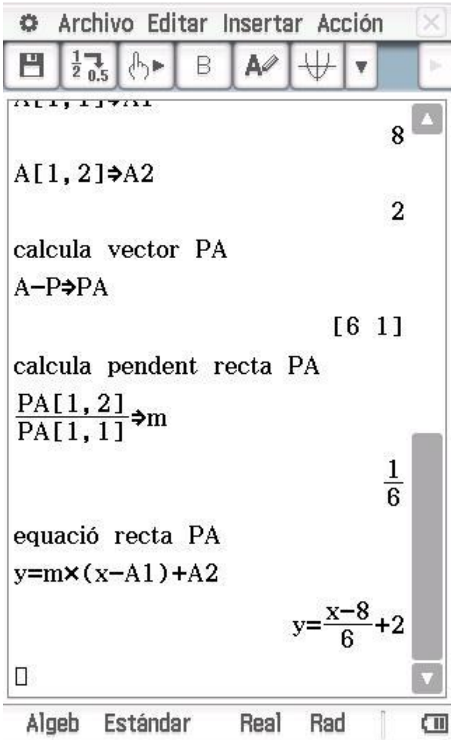
$$\frac{PA[1,2]}{PA[1,1]} \Rightarrow m$$

Calculem l’equació de la recta PA:

$$y = m(x - A1) + A2$$

$$y = \frac{x-8}{6} + 2\,.$$





Problema 22

Calcula l’àrea del pentàgon de vèrtexs $A(-5,-2)$, $B(-2,5)$, $C(2,7)$, $D(5,1)$, $E(2,-4)$.

Obrim una eActivity.

Solució geomètrica:

Insertem cinc vincles geomètrics amb els vèrtexs $A(-5,-2)$, $B(-2,5)$, $C(2,7)$, $D(5,1)$, $E(2,-4)$.

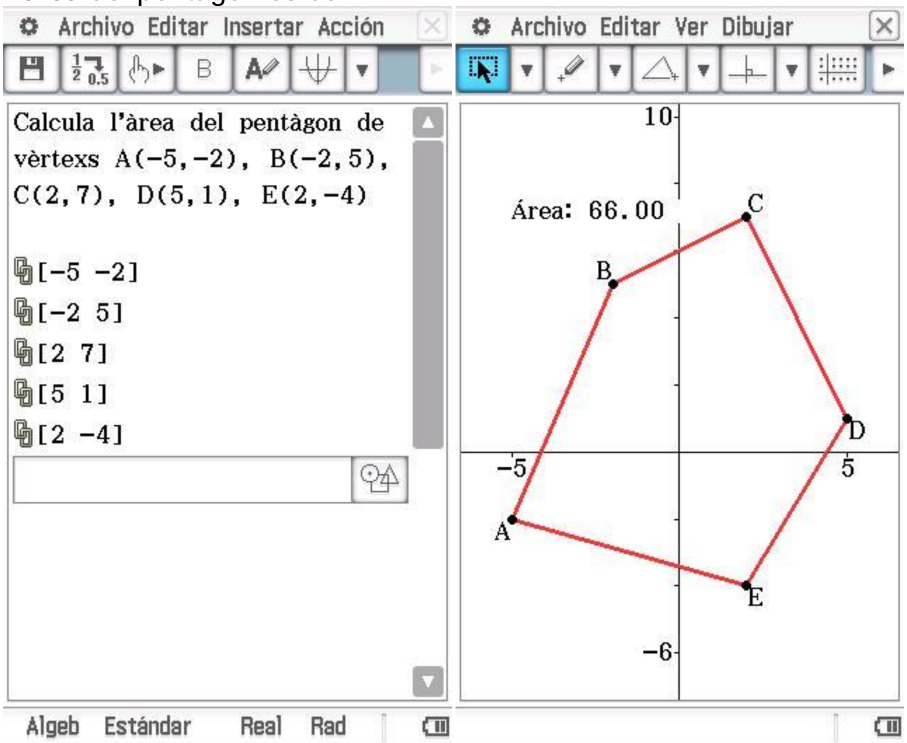
Obrim la finestra geomètrica en la què arrosseguem els cinc vincles.

Amb l’opció segment, dibuixem el pentàgon ABCDE.

Seleccionem els costats del pentàgon ABCDE.

Amb el quadre de mesures calculem l’àrea del pentàgon.

L’àrea del pentàgon és 66.



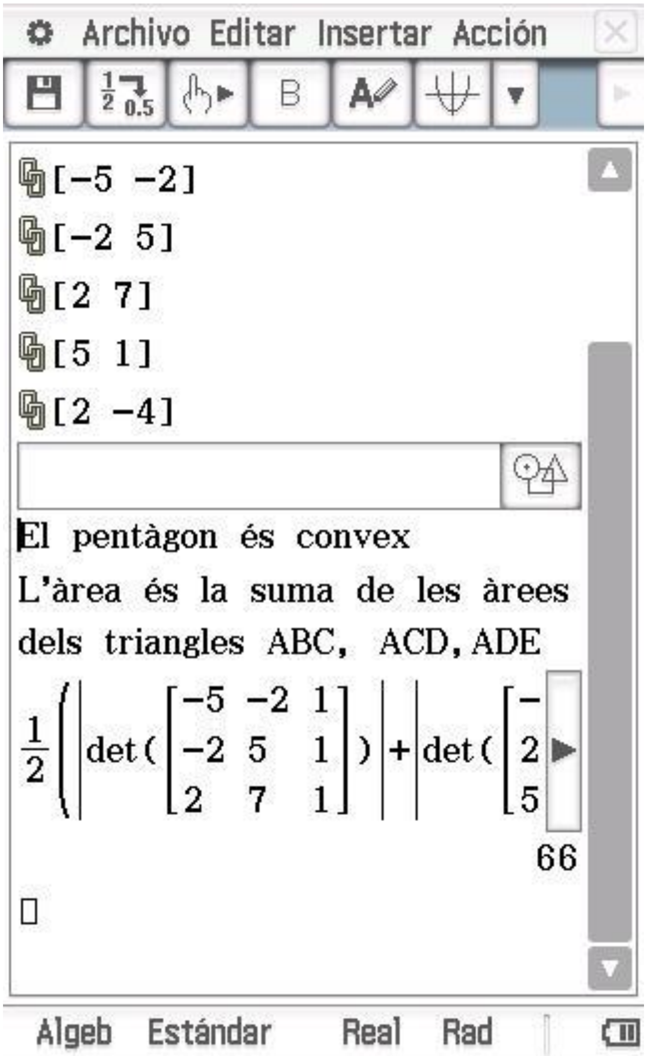
Solució analítica:

Insertem una fila de càlcul.

El pentàgon ABCDE és convex.

$S_{ABCDE} = S_{ABC} + S_{ACD} + S_{ADE}$.

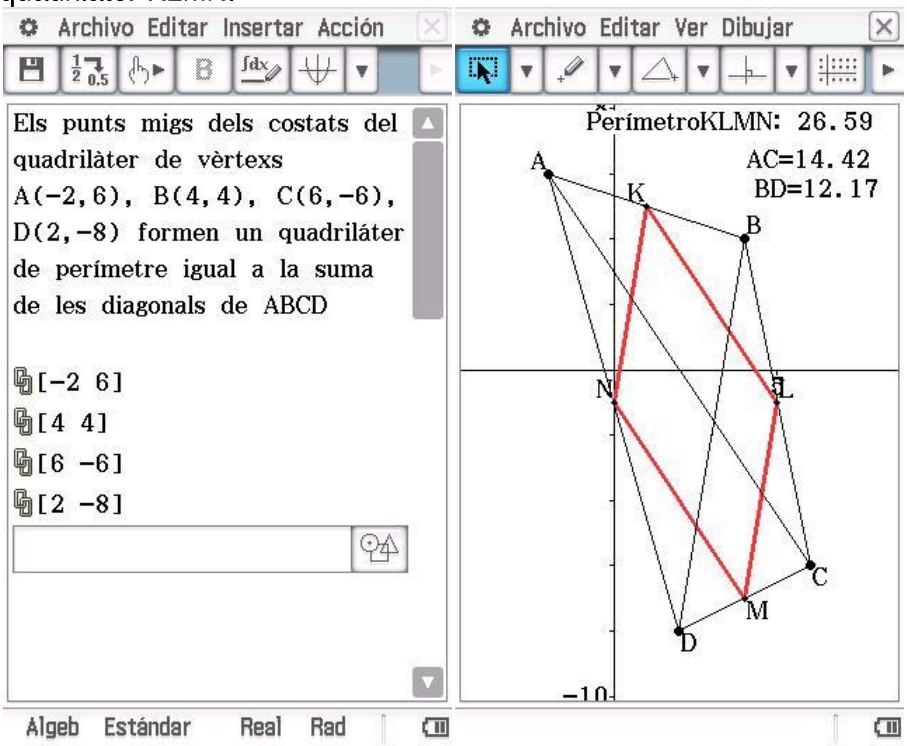
$$S_{ABCDE} = \frac{1}{2}\left(\left|\det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{pmatrix}\right| + \left|\det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \\ d_1 & d_2 & 1 \end{pmatrix}\right| + \left|\det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ d_1 & d_2 & 1 \\ e_1 & 1_2 & 1 \end{pmatrix}\right|\right).$$


Archivo Editar Insertar Acción
[-5 -2]
[-2 5]
[2 7]
[5 1]
[2 -4]
El pentàgon és convex
L'àrea és la suma de les àrees
dels triangles ABC, ACD, ADE
1/2 (|det([-5 -2 1; -2 5 1; 2 7 1])| + |det([-; 2; 5
66
Algeb Estándar Real Rad

Problema 23
Comprova que els punts migs dels costats del quadrilàter de vèrtexs $A(-2,6)$, $B(4,4)$, $C(6,-6)$, $D(2,-8)$ formen un quadrilàter de perímetre igual a la suma de les diagonals del quadrilàter ABCD.

Obrim una eActivity

Solució geomètrica:
Insertem quatre vincles geomètrics amb els vèrtexs $A(-2,6)$, $B(4,4)$, $C(6,-6)$, $D(2,-8)$.
Obrim la finestra geomètrica en la què arrosseguem els quatre vincles.
Amb l'opció segment, dibuixem el quadrilàter ABCD.
Seleccionem cada costat i dibuixem els punts migs dels costats K, L, M, N.
Amb l'opció segment, dibuixem el quadrilàter KLMN.
Seleccionem els costats del quadrilàter KLMN.
Amb el quadre de mesures calculem el perímetre del quadrilàter KLMN.
Dibuixem els segments $\overline{AC}$, $\overline{BD}$.
Seleccionem cadascun dels segments i amb el quadre de mesures calculem la longitud de cada segment.
Observem que la suma de la longitud de les diagonals és igual al perímetre del quadrilàter KLMN.



Solució analítica:
Insertem una fila de càlcul.
Definim les variables:
$[-2 \quad 6] \Rightarrow A$
$[4 \quad 4] \Rightarrow B$
$[6 \quad -6] \Rightarrow C$
$[2 \quad -8] \Rightarrow D$
Calculem els punts migs dels costats del quadrilàter ABCD:

$\frac{A+B}{2} \Rightarrow K$

$\frac{B+C}{2} \Rightarrow L$

$\frac{C+D}{2} \Rightarrow M$

$\frac{A+D}{2} \Rightarrow N$.

Calculem el perímetre del quadrilàter KLMN:

$\text{norm}(L-K)+\text{norm}(M-L)+\text{norm}(N-M)+\text{norm}(N-K)$.

El perímetre es $2\sqrt{37}+4\sqrt{13}$.

Calculem la suma de les longituds de les diagonals de ABCD:

$\text{norm}(C-A)+\text{norm}(D-B)$.

La suma de les longituds de les diagonals és $2\sqrt{37}+4\sqrt{13}$.

El resultat és vàlid per a qualsevol quadrilàter ABCD ja que:

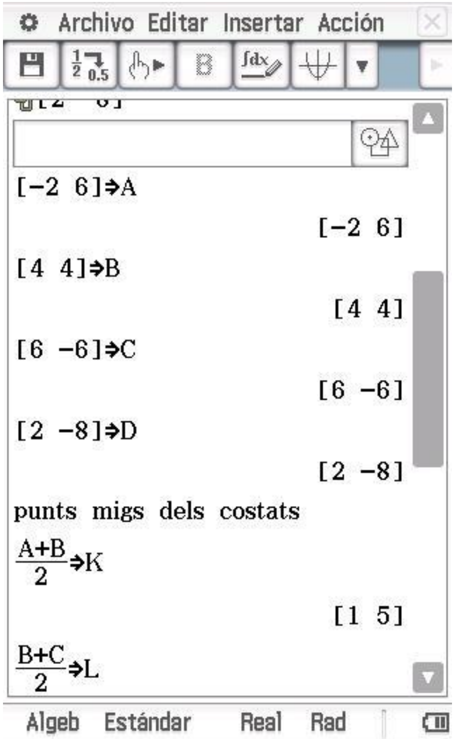
KL és paral·lela mitjana del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

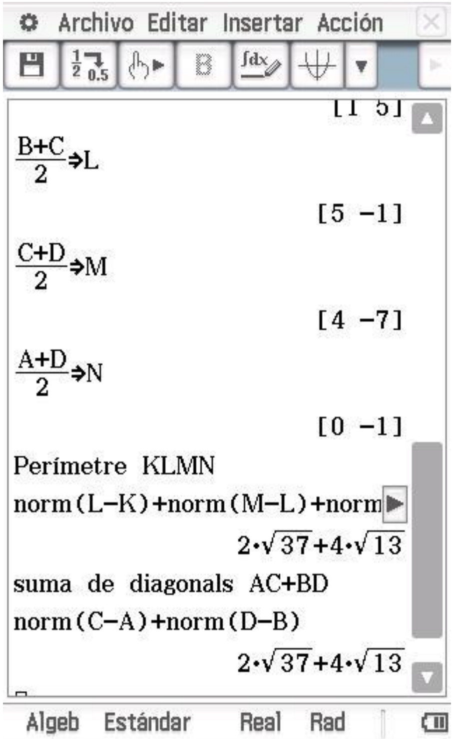
$\overline{MN}$ és paral·lela mitjana del triangle $\overset{\Delta}{ACD}$.

Per tant, $\overline{KL}=\overline{MN}=\frac{1}{2}\overline{AC}$.

Anàlogament, $\overline{LM}=\overline{NK}=\frac{1}{2}\overline{BD}$.

$\overline{KL}+\overline{MN}=\overline{AC}$, $\overline{LM}+\overline{NK}=\overline{BD}$.

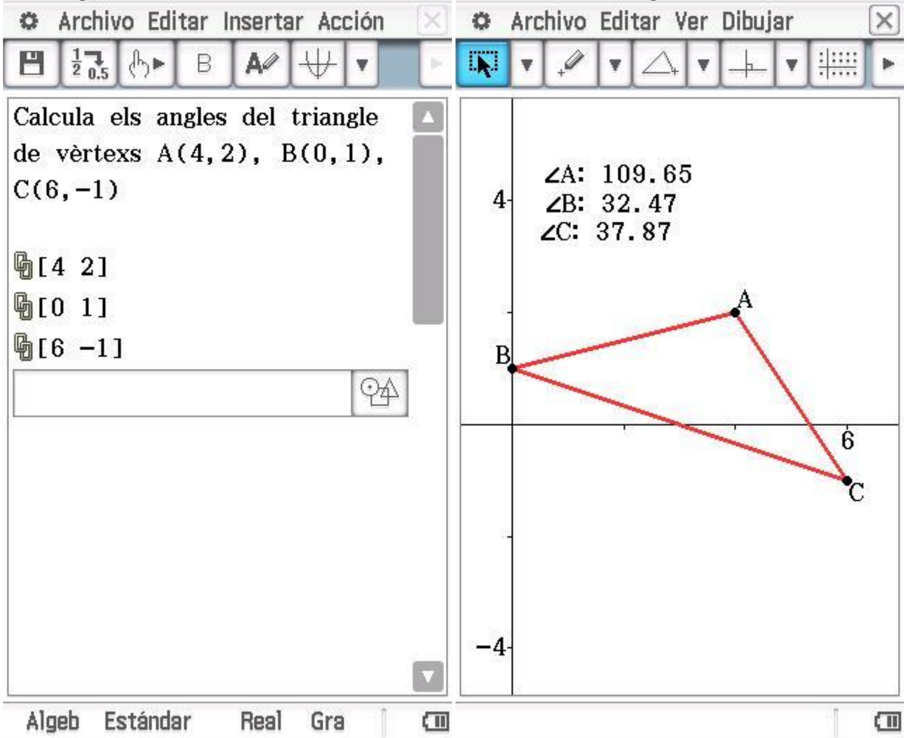




Problema 24
Calcula els angles del triangle de vèrtexs $A(4,2)$, $B(0,1)$, $C(6,-1)$.

Obrim una eActivity.

Solució geomètrica:
Insertem tres vincles geomètrics amb els vèrtexs $A(4,2)$, $B(0,1)$, $C(6,-1)$.
Obrim la finestra geomètrica en la què arrosseguem els tres vincles.
Dibuixem els costats del triangle.
Seleccionem els costats $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ i amb el quadre de mesures calculem l'angle A.
Anàlogament calculem las mesures dels altres angles.



Solució analítica:
Calculem cadascun dels angles per tres mètodes distints.
Insertem una fila de càlcul.
Definim les variables:

$[4 \quad 2] \Rightarrow A$

$[0 \quad 1] \Rightarrow B$

$[6 \quad -1] \Rightarrow C$

Per calcular l'angle A utilitzem la funció angle( ):

$\text{angle}(B-A, C-A)$.

$A = 109.6538241º$

Per calcular l'angle B utilitzem $\cos B = \dfrac{b^2 - a^2 - c^2}{-2ac}$.

Calculem las mesures dels costats del triangle:

$\text{norm}(C-B) \Rightarrow a$

$\text{norm}(C-A) \Rightarrow b$

$\text{norm}(B-A) \Rightarrow c$

$\cos^{-1}\left(\frac{b^2 - a^2 - c^2}{-2 \cdot a \cdot c}\right)$.

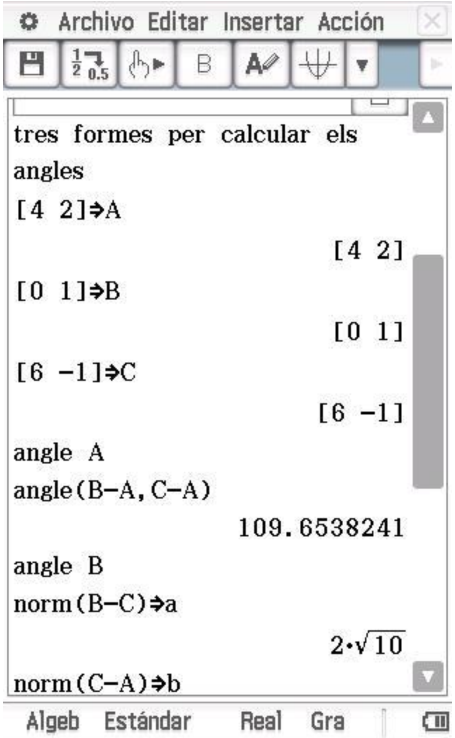
$B = 32.47119229^{\circ}$.

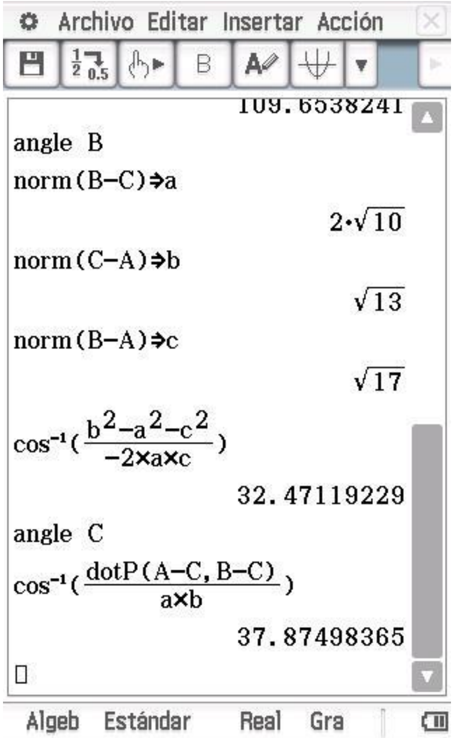
Per calcular l'angle C utilitzem el producte escalar dels vectors que el formen

$\cos C = \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{a \cdot c}$:

$\cos^{-1}\left(\frac{dotP(A - C, B - C}{a \cdot c}\right)$.

$C = 37.87498365^{\circ}$.



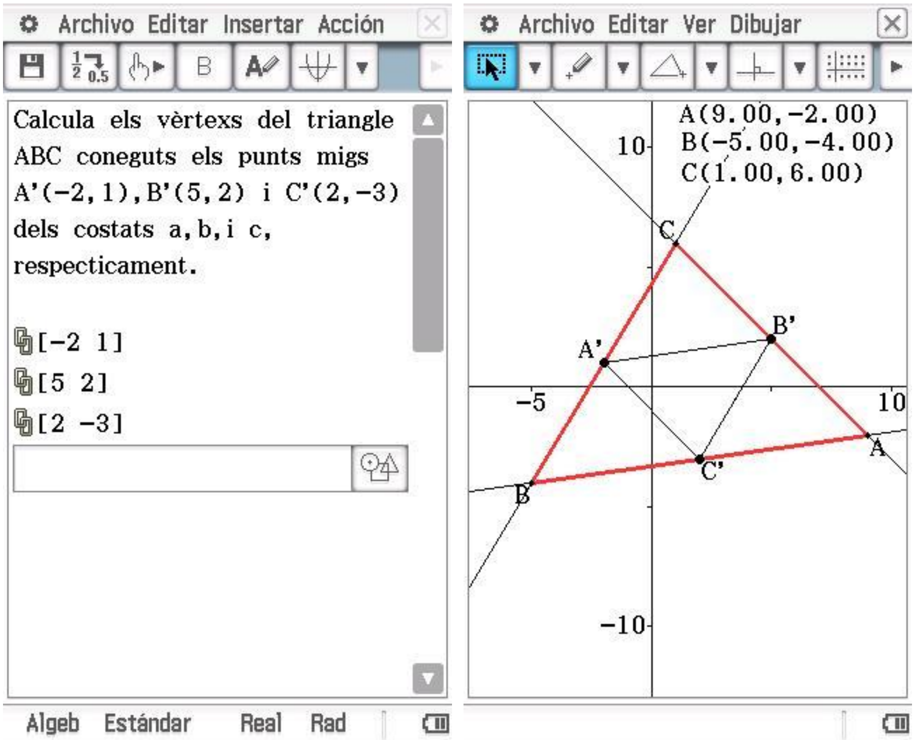


Problema 25

Calcula els vèrtexs del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ coneguts els punts migs $A'(-2,1)$, $B'(5,2)$, $C'(2,-3)$ dels costats a, b i c, respectivament.

Obrim una eActivity.

Solució geomètrica:
Insertem tres vincles geomètrics amb els punts migs $A'(-2,1)$, $B'(5,2)$, $C'(2,-3)$.
Obrim la finestra geomètrica en la què arrosseguem els tres vincles.
Dibuixem els costats del triangle $\overset{\Delta}{A'B'C'}$.
Seleccionem $\overline{B'C'}$ i el punt A'. Dibuixem la recta paral·lela BC al segment $\overline{B'C'}$ que passa pel punt A'
Seleccionem $\overline{A'C'}$ i el punt B'. Dibuixem la recta paral·lela AC al segment $\overline{A'C'}$ que passa pel punt B'
Seleccionem $\overline{A'B'}$ i el punt C'. Dibuixem la recta paral·lela AB al segment $\overline{A'B'}$ que passa pel punt C'
Con la intersecció, dos a dos, de les tres rectes determinem els vèrtexs del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$
Seleccionem cada vèrtex i amb el quadre de mesures calculem les coordenades: $A(9,-2)$, $B(-5,-4)$, $C(1,6)$.



Solució analítica:
Insertem una fila de càlcul.
Definim les variables punts migs dels costats:

$[-2 \quad 1] \Rightarrow Aa$

$[5 \quad 2] \Rightarrow Bb$

$[2 \quad -3] \Rightarrow Cc$

Para determinar el vèrtex A apliquem $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{A'C'}$:

$Ba + Ca - Aa$

$A(9, -2)$.

Anàlogament:

El vèrtex B és:

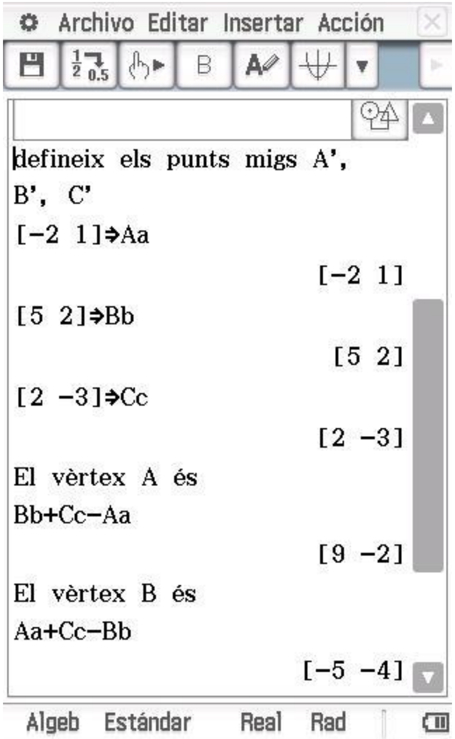
$Aa + Ca - Ba$

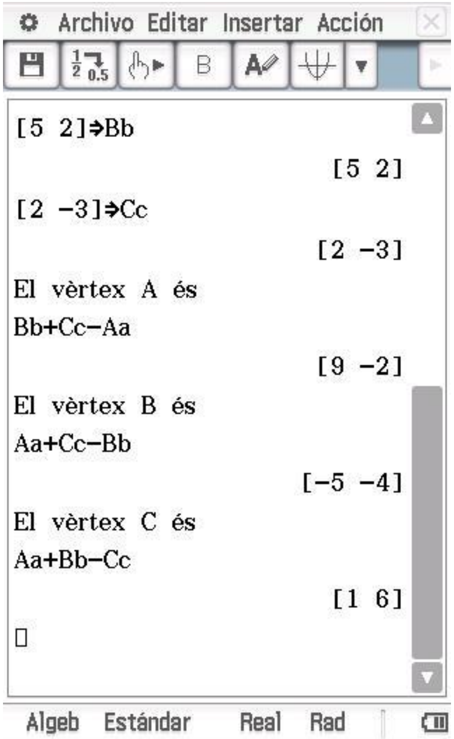
$B(-5, -4)$.

El vèrtex C és:

$Aa + Ba - Ca$

$C(1, 6)$.





Problema 26
PROPIETAT DEL BARICENTRE D'UN TRIANGLE
Siga el triangle de vèrtexs $A(-3,4)$, $B(2,5)$ i $C(1,0)$.
Siga la recta $r \equiv 3x+4y+12=0$ exterior al triangle.

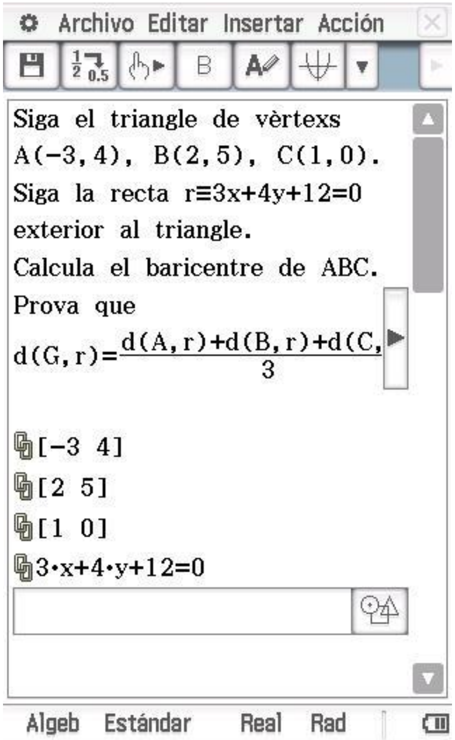
a) Calcula les coordenades del baricentre G del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

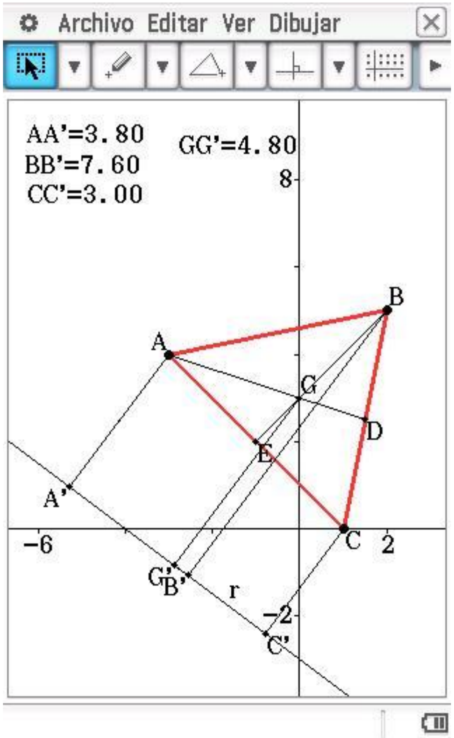
b) Comprova que $d(G,r)=\frac{1}{3}\left(d(A,r)+d(B,r)+d(C,r)\right)$.

Obrim una eActivity

Solució geomètrica:
Insertem quatre vincles geomètrics amb els vèrtexs $A(-3,4)$, $B(2,5)$ i $C(1,0)$, i la recta $3x+4y+12=0$.
Obrim la finestra geomètrica en la què arrosseguem els quatre vincles.
Observem que la recta és exterior al triangle.

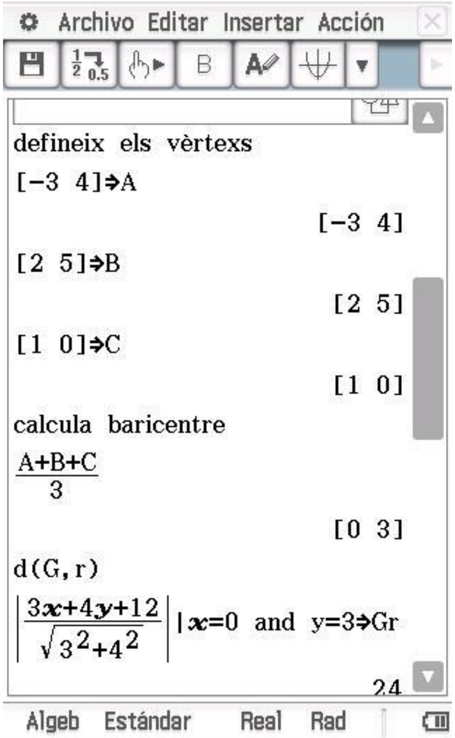
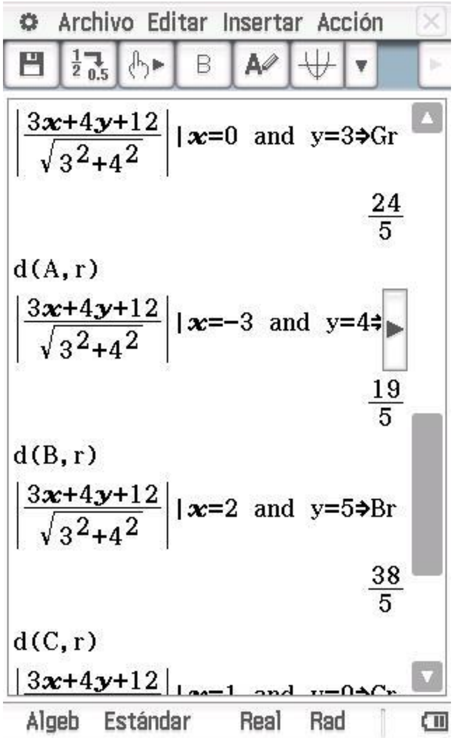
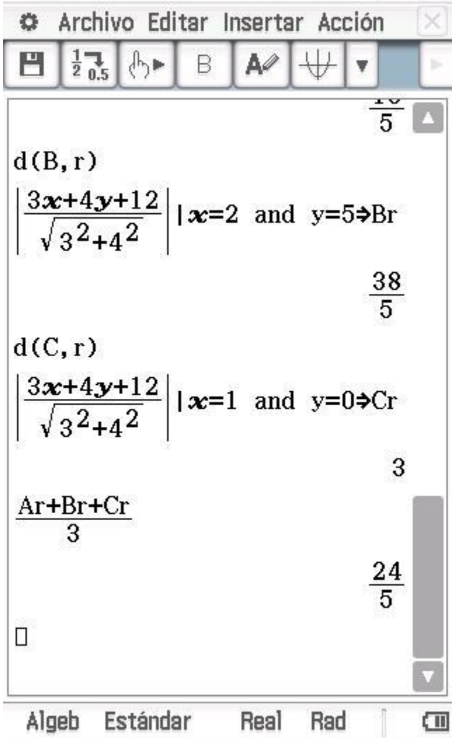
Amb l'opció segment dibuixem el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
Seleccionem el costat $\overline{BC}$ i calculem el punt mig D.
Seleccionem el costat $\overline{AC}$ i calculem el punt mig E.
Dibuixem les mitjanes $\overline{AD}$ i $\overline{BE}$.
Seleccionem les mitjanes $\overline{AD}$ i $\overline{BE}$ calculem la intersecció G, baricentre del triangle.
Seleccionem la recta i el punt G. Amb el quadre de mesures calculem la distància entre els dos objectes.
Anàlogament, calculem la distància dels vèrtexs del triangle a la recta.
Observem que es compleix la propietat $d(G,r)=\frac{1}{3}\left(d(A,r)+d(B,r)+d(C,r)\right)$.



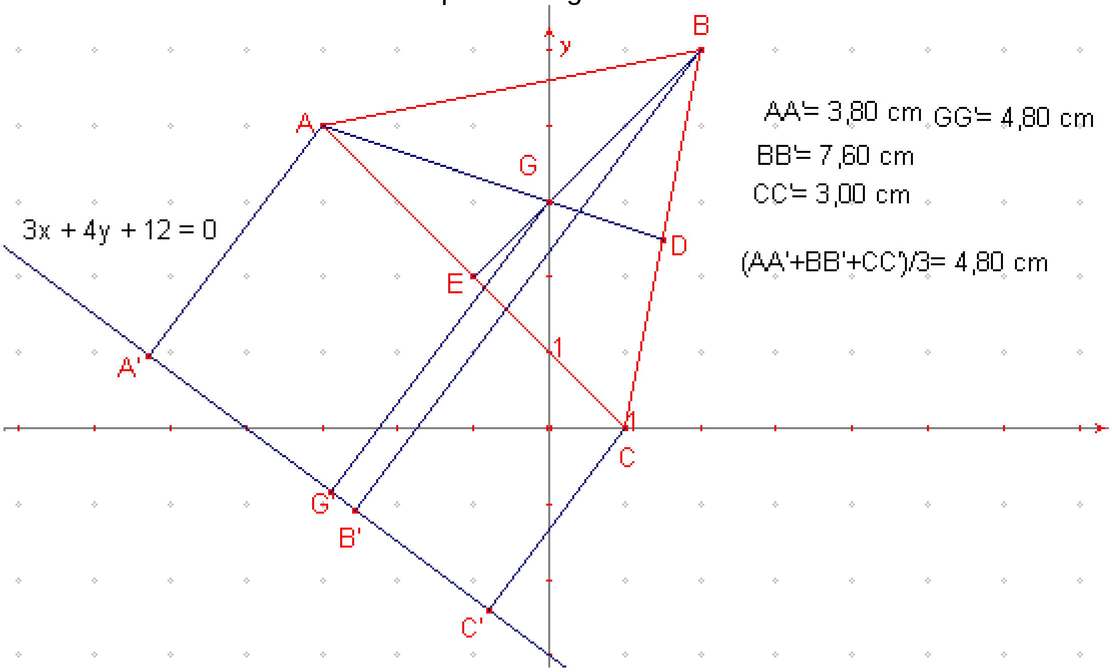


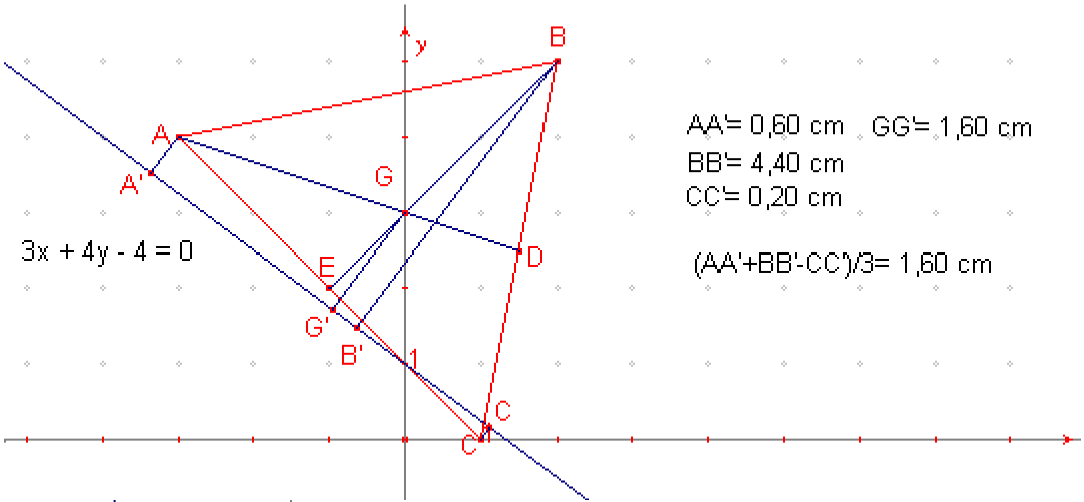
Solució analítica:
Insertem una fila de càlcul.

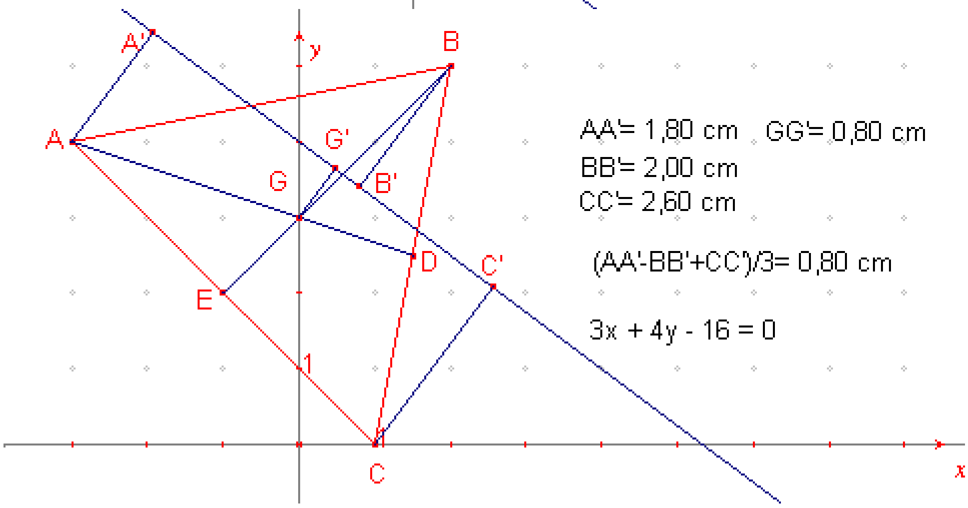
Definim les variables vèrtexs del triangle:
$\begin{bmatrix} -3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A$
$\begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow B$
$\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow C$
Calculem el baricentre G
$$\frac{A+B+C}{3}$$
$G(0,3)$.
Calculem la distància de G a r:
$$\left|\frac{3x+4y+12}{\sqrt{3^2+4^2}}\right| \mid x=0 \text{ and } y=3 \Rightarrow Gr$$
$$d(G,r)=\frac{24}{5}$$
Calculem la distància de A a r:
$$\left|\frac{3x+4y+12}{\sqrt{3^2+4^2}}\right| \mid x=-3 \text{ and } y=4 \Rightarrow Ar$$
$$d(A,r)=\frac{19}{5}$$
Calculem la distància de B a r:
$$\left|\frac{3x+4y+12}{\sqrt{3^2+4^2}}\right| \mid x=2 \text{ and } y=5 \Rightarrow Br$$
$$d(B,r)=\frac{8}{5}$$
Calculem la distància de C a r:
$$\left|\frac{3x+4y+12}{\sqrt{3^2+4^2}}\right| \mid x=1 \text{ and } y=0 \Rightarrow Cr$$
$$d(C,r)=3$$
Calculem:
$$\frac{Ar+Br+Cr}{3}=\frac{24}{5}$$

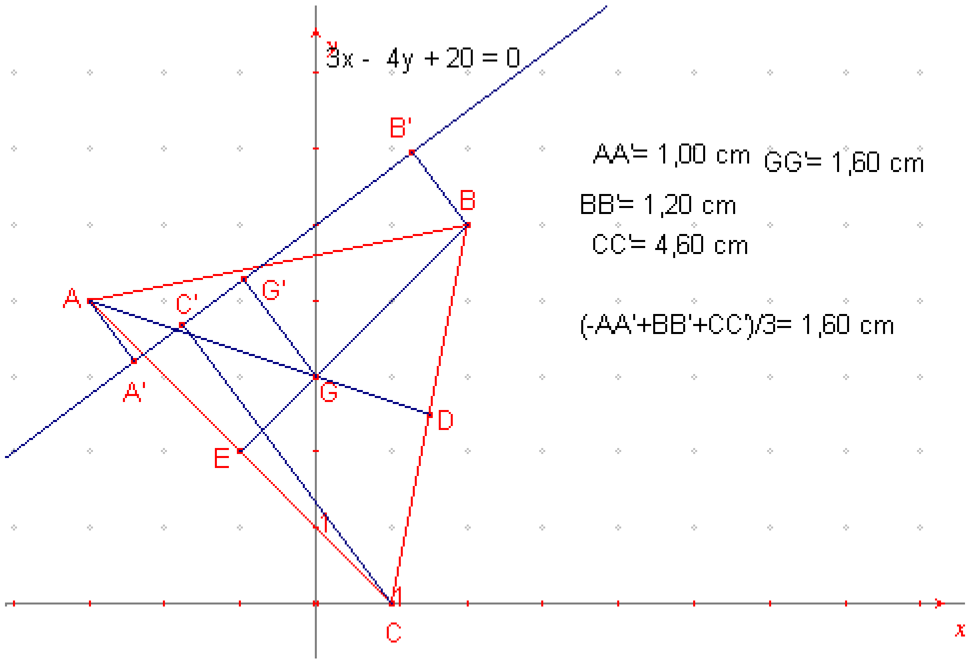

Archivo Editar Insertar Acción
defineix els vèrtexs
[-3 4]⇒A
[-3 4]
[2 5]⇒B
[2 5]
[1 0]⇒C
[1 0]
calcula baricentre
(A+B+C)/3
[0 3]
d(G,r)
|(3x+4y+12)/√(3²+4²)| | x=0 and y=3⇒Gr
Algeb Estándar Real Rad

Archivo Editar Insertar Acción
|(3x+4y+12)/√(3²+4²)| | x=0 and y=3⇒Gr
24/5
d(A,r)
|(3x+4y+12)/√(3²+4²)| | x=−3 and y=4⇒
19/5
d(B,r)
|(3x+4y+12)/√(3²+4²)| | x=2 and y=5⇒Br
38/5
d(C,r)
Algeb Estándar Real Rad

Archivo Editar Insertar Acción
5
d(B,r)
|(3x+4y+12)/√(3²+4²)| | x=2 and y=5⇒Br
38/5
d(C,r)
|(3x+4y+12)/√(3²+4²)| | x=1 and y=0⇒Cr
3
(Ar+Br+Cr)/3
24/5
Algeb Estándar Real Rad

La propietat es compleix per qualsevol triangle i recta exterior.
Si la recta és secant el resultat depén del signe de les distàncies.








3x - 4y + 20 = 0
y
x
A
B
C
A'
B'
C'
G
G'
D
E
1
1
AA'= 1,00 cm
GG'= 1,60 cm
BB'= 1,20 cm
CC'= 4,60 cm
(-AA'+BB'+CC')/3= 1,60 cm

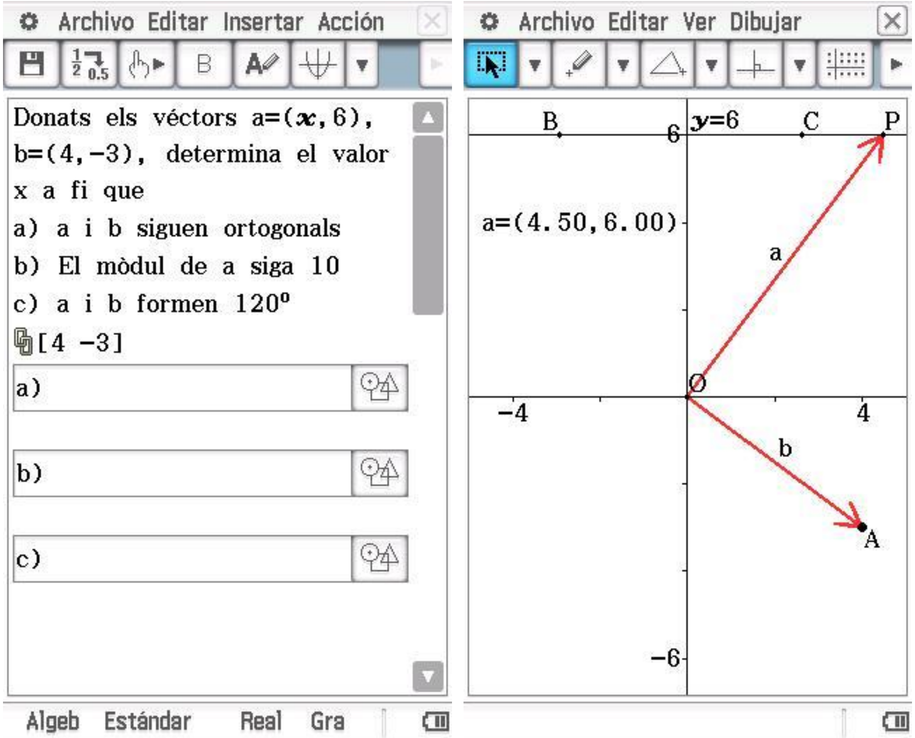
Problema 27

Siguen els vectors $a=(x,6), b=(4,-3)$. Determina x a fi que:

d) Els vectors a, b siguen ortogonals.
e) El vector a tinga mòdul 10.
f) Els vectors a, b formen 120º.

Obrim una eActivity

Solució geomètrica:
Insertem un vincle geomètric amb les components del vector $b=(4,-3)$.
Obrim la finestra geomètrica a) en la què s'arrossega el vincle.
Dibuixem el origen de coordenades $O(0,0)$.
Dibuixem el vector $b=\overrightarrow{OA}$.
Dibuixem la recta $y=6$.
Seleccionem el vector a i el punt O. Dibuixem la recta perpendicular a els objectes.
Seleccionem las dos rectes i s'intersecten en el punt P.
Dibuixem el vector $a=\overrightarrow{OP}$. Amb el quadre de mesures calculem les seues coordenades.



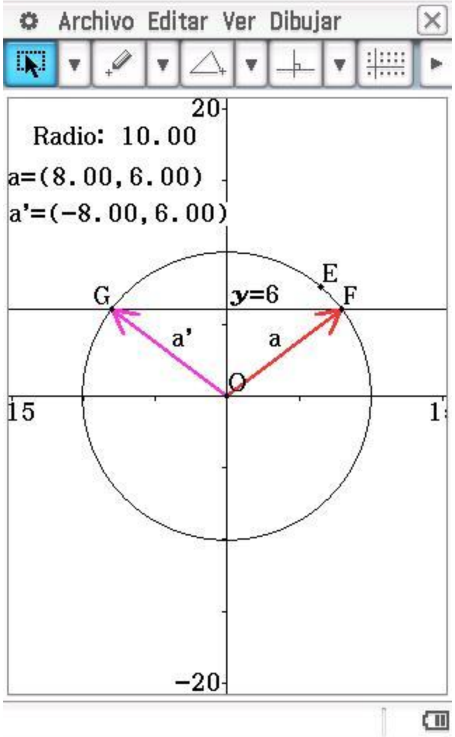
Obrim la finestra geomètrica b).
Dibuixem l'origen de coordenades $O(0,0)$.
Dibuixem la circumferència de centre O i radi 10.
Dibuixem la recta $y=6$.
Seleccionem la recta i la circumferència. Calculem la intersecció.
Siguen F i G els punts intersecció.
Dibuixem els vectors $a=\overrightarrow{OF}$, $a'=\overrightarrow{OG}$. Amb el quadre de mesures calculem les seues coordenades.
Obrim la finestra geomètrica c) en la què s'arrossega el vincle $b=(4,-3)$.
Dibuixem l'origen de coordenades $O(0,0)$.

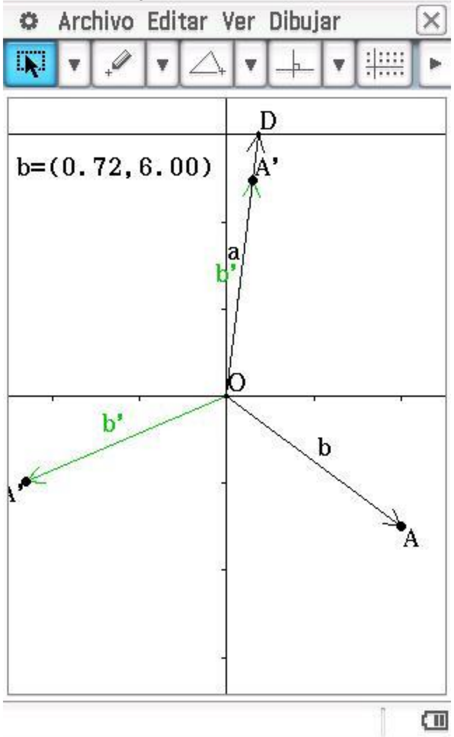
Dibuixem el vector $b = \overrightarrow{OA}$.
Dibuixem la recta $y = 6$.

Efectuem un gir del vector b de centre O i angle 120º. $\overrightarrow{OA'}$.

Efectuem un gir del vector b de centre O i angle -120º. $\overrightarrow{OA''}$.
Dibuixem la semirecta OA’ que talla la recta en el punt D

Dibuixem el vector $a = \overrightarrow{OD}$. Amb el quadre de mesures calculem les seues coordenades.
La semirecta OA’ no talla la recta. Per tant, el problema té una solució.





Solució analítica:
a)
Insertem una fila de càlcul.
Definim les variables vectors a, b:

$[x \quad 6] \Rightarrow a$

$[4 \quad -3] \Rightarrow b$

Calculem el producte escalar dels dos vectors.
Resolem l’equació:

$\mathrm{solve}(\mathrm{dotP}(a,b) = 0)$.

$x = \frac{9}{2}$.

b)
Calculem el mòdul del vector a.
Resolem l’equació:

$\mathrm{solve}(\mathrm{norm}(a) = 10)$.

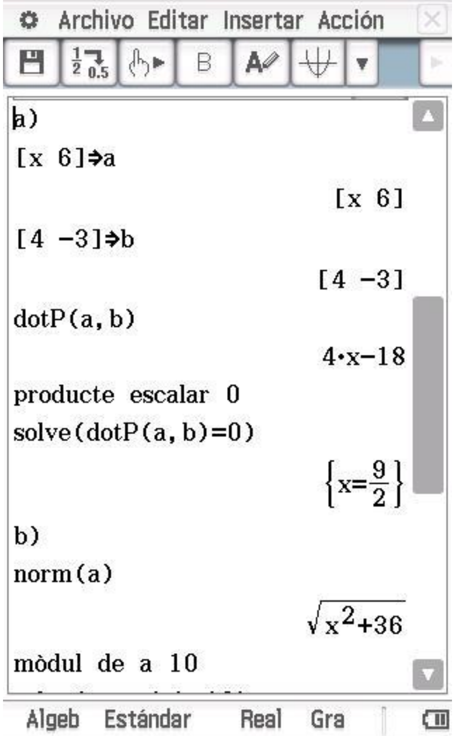
$x = -8, 8$

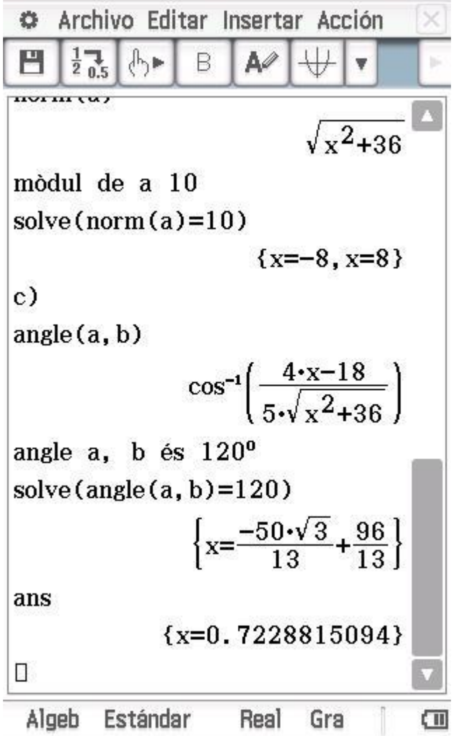
c)
Calculem l’angle dels vectors a, b.
Resolem l’equació:

$\mathrm{solve}(\mathrm{angle}(a,b) = 120)$.

(las mesures angulars han de ser sexagesimals).

$x = \dfrac{96 - 50\sqrt{3}}{13} \approx 0.7228815094$.



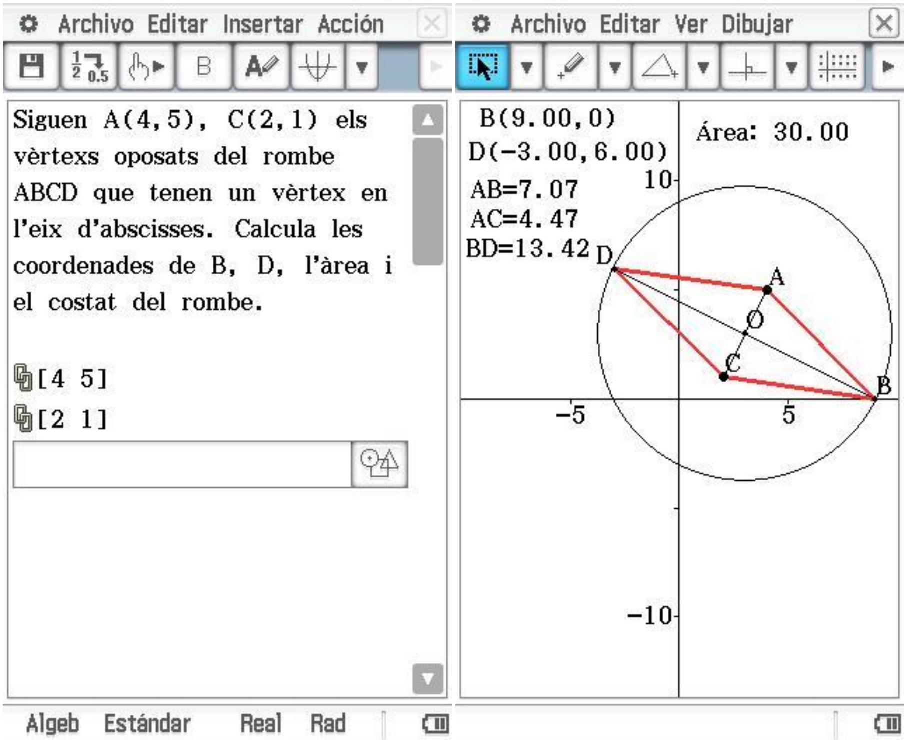


Problema 28

Siguen $A(4,5)$, $C(2,1)$ els vèrtexs oposats del rombe ABCD.
Si el vèrtex B pertany a l'eix de abscisses, calcula:
a) Les coordenades dels vèrtexs.
b) L'àrea del rombe ABCD.
c) El costat del rombe ABCD.

Obrim una eActivity

Solució geomètrica:
Insertem dos vincles geomètrics amb els vèrtexs $A(4,5)$, $C(2,1)$ del rombe ABCD.
Obrim la finestra geomètrica en la què arrosseguem els dos vincles.
Dibuixem el segment $\overline{AC}$.
Seleccionem el segment $\overline{AC}$ i dibuixem el punt mig O.
Seleccionem el segment $\overline{AC}$ i dibuixem la recta mediatriu.
Dibuixem la recta $y=0$.
Seleccionem la recta mediatriu i la recta $y=0$. Dibuixem la intersecció B dels dos objectes.
Dibuixem la circumferència de centre O que passa por B.
Seleccionem la circumferència i la recta mediatriu. Dibuixem la intersecció D dels dos objectes. Dibuixem els segments que formen els costats del rombe.
Seleccionem cadascun dels vèrtexs B i D. Amb el quadre de mesures calculem les seues coordenades.
Seleccionem el costat $\overline{AB}$. Amb el quadre de mesures calculem la mesura del costat del rombe.
Seleccionem els quatre costats del rombe. Amb el quadre de mesures calculem la mesura de l'àrea del rombe.



Solució analítica
Insertem una fila de càlcul.

Definim les variables vèrtexs A i C:

$[4 \quad 5] \Rightarrow A$

$[2 \quad 1] \Rightarrow C$

Calculem el centre O del rombe:

$\frac{A+C}{2} \Rightarrow O.$

Calculem el vector $\overrightarrow{AC}$:

$C - A \Rightarrow v$

Calculem el pendent de la recta mediatriu al segment $\overline{AC}$:

$\frac{-v[1,1]}{v[1,2]} \Rightarrow m$

Calculem les coordenades de O:

$O[1,1] \Rightarrow O1$

$O[1,2] \Rightarrow O2$

Calculem l'equació de la recta mediatriu:

$y = m \cdot (x - O1) + O2$

Calculem la abscissa del vèrtex B:

$\text{solve}(y = m \cdot (x - O1) + O2) \mid y = 0.$

$B(9, 0).$

Definim el vèrtex B:

$[9 \quad 0] \Rightarrow B$

Calculem el vèrtex D:

$O + O - B \Rightarrow D$

Calculem la mesura del costat $\overline{AB}$:

$\text{norm}(B - A)$

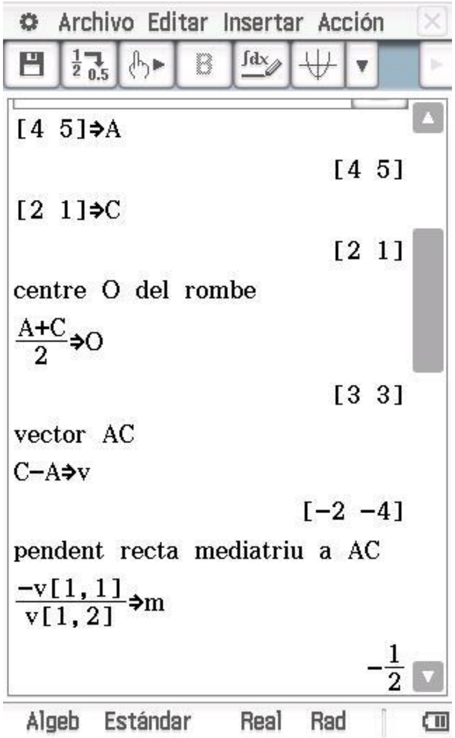
Calculem las mesures de les diagonals:

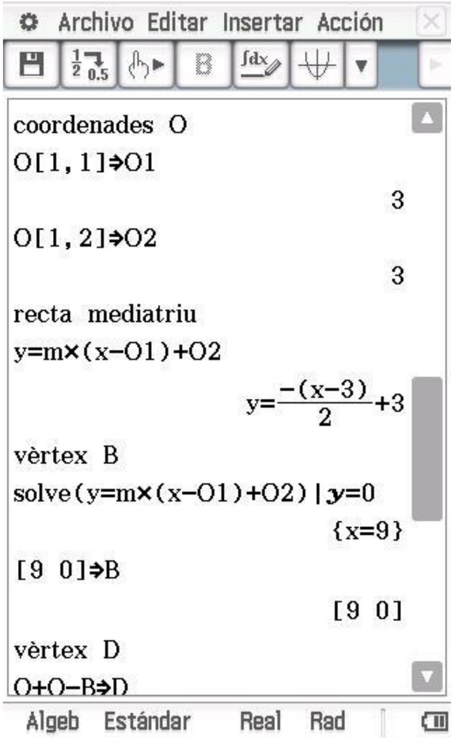
$\text{norm}(C - A) \Rightarrow d1$

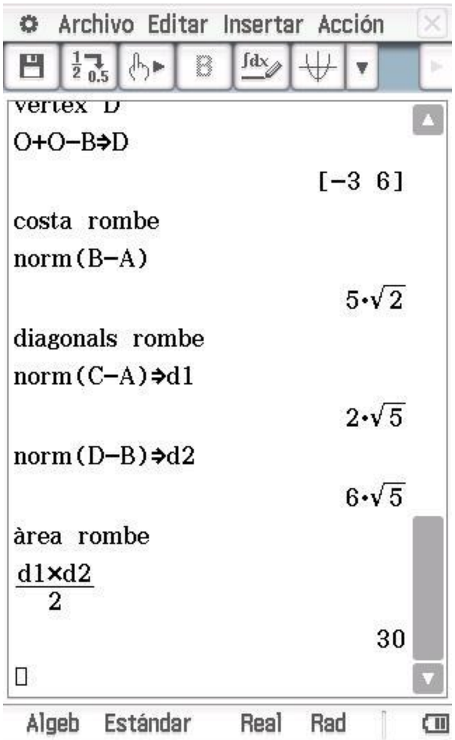
$\text{norm}(D - B) \Rightarrow d2$

Calculem l'àrea del rombe ABCD:

$\frac{d1 \cdot d2}{2}$


Archivo Editar Insertar Acción
[4 5]⇒A
[4 5]
[2 1]⇒C
[2 1]
centre O del rombe
(A+C)/2⇒O
[3 3]
vector AC
C−A⇒v
[−2 −4]
pendent recta mediatriu a AC
−v[1,1]/v[1,2]⇒m
−1/2
Algeb Estándar Real Rad


Archivo Editar Insertar Acción
coordenades O
O[1,1]⇒O1
3
O[1,2]⇒O2
3
recta mediatriu
y=m×(x−O1)+O2
y=−(x−3)/2+3
vèrtex B
solve(y=m×(x−O1)+O2)|y=0
{x=9}
[9 0]⇒B
[9 0]
vèrtex D
O+O−B⇒D
Algeb Estándar Real Rad


Archivo Editar Insertar Acción
vèrtex D
O+O−B⇒D
[−3 6]
costa rombe
norm(B−A)
5·√2
diagonals rombe
norm(C−A)⇒d1
2·√5
norm(D−B)⇒d2
6·√5
àrea rombe
(d1×d2)/2
30
Algeb Estándar Real Rad