

Problema 1 (67)

Donats tres vèrtexs $A(3, -7)$, $B(5, -7)$, $C(-2, 5)$ del paral·lelogram ABCD (el vèrtex D és l'oposat al vèrtex B). Determinar el vèrtex D.
Determina la longitud de les diagonals.

Problema 2 (71)

Demostra que el triangle de vèrtexs $A(1, 1)$, $B(2, 3)$, $C(5, -1)$ és rectangle.
Calcula l'àrea.

Problema 3 (74)

Prova que els punts $A(2, 2)$, $B(-1, 6)$, $C(-5, 3)$, $D(-2, -1)$, són els vèrtexs d'un quadrat. Calcula l'àrea del quadrat ABCD.

Problema 4

Demostra que el triangle de vèrtexs $A(-1, 3)$, $B(1, 2)$, $C(0, 4)$ és acutangle.

Problema 5 (215)

Els costats \overline{AB} , \overline{BC} i \overline{AC} d'un triangle són la intersecció de les rectes

$$r_{AB} \equiv 4x + 3y - 5 = 0, \quad r_{BC} \equiv x - 3y + 10 = 0, \quad r_{AC} \equiv x - 2 = 0.$$

Determina les coordenades dels vèrtexs.

Problema 6

Donats els punts $A(2, 3)$ i $B(-1, 0)$ determina l'equació de la recta que passa per A i és perpendicular al segment \overline{AB} .

Problema 7 (214)

Determina el punt intersecció de les rectes $r \equiv 3x - 4y - 29 = 0$, $s \equiv 2x + 5y + 19 = 0$.

Problema 8 (227)

Determina el punt projecció del punt $P(-6, 4)$ sobre la recta $4x - 5y + 3 = 0$.

Problema 9 (247)

Determina la projecció del punt $P(-8, 12)$ sobre la recta que passa pels punts $A(2, -3)$, $B(-5, 1)$.

Problema 10 (116)

Les coordenades dels vèrtexs d'un triangle són $A(2, -3)$, $B(3, 2)$, $C(-2, 5)$.

Calcula l'àrea del triangle.

Problema 11

Determina l'equació de la recta mediatriu del segment d'extrems $A(1, 4)$, $B(-5, 2)$.

Problema 12

TEOREMA DE VARIGNON

Siguen $A(-1, 2)$, $B(3, 4)$, $C(5, 2)$, $D(1, -2)$ els vèrtexs del quadrilàter ABCD.

Prova que els punts migs del quadrilàter són els vèrtexs d'un paral·lelogram.

Problema 13

Calcula la distància del punt $P(-4, 4)$ a la recta $4x - 3y + 3 = 0$.

Problema 14 (83)

Donats els vèrtexs oposats $A(3, 0)$, $C(-4, 1)$ del quadrat ABCD, determina els altres vèrtexs.

Calcula l'àrea.

Problema 15 (85)

Calcula el centre i el radi de la circumferència circumscrita al triangle de vèrtexs $A(-3, 6)$, $B(9, -10)$ i $C(-5, 4)$.

Problema 16 (78)

Determina en l'eix d'ordenades el punt M, la distància del qual al punt $A(-8, 13)$ siga 17.

Problema 17 (94)

Siga el triangle de vèrtexs $A(1, 4)$, $B(3, -9)$ i $C(-5, 2)$.

a) Determina el punt mig M del costat \overline{AC} .

b) Calcula la longitud de la mitjana \overline{BM} .

c) Comprova que $\overline{BM} = \frac{\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}}{2}$.

d) Calcula el baricentre G del triangle $\triangle ABC$.

Problema 18 (224)

Donades les rectes d'equacions $r \equiv 2x - 3y + 5 = 0$, $s \equiv 3x + 2y - 7 = 0$ costats d'un rectangle i $A(2, -3)$ un dels seus vèrtexs, determina els altres vèrtexs i l'àrea.

Problema 19 (64)

Donats els vèrtexs adjacents $A(3, -7)$, $B(-1, 4)$ del quadrat ABCD, calcula l'àrea i els altres vèrtexs.

Problema 20 (92)

Donats els vèrtexs $A(-3, 5)$, $B(1, 7)$ del paral·lelogram ABCD i $M(1, 1)$ la intersecció de les diagonals, calcula els vèrtexs C i D. ABCD es un rectangle?.

Problema 21

Determina la recta que passa pel punt intersecció de les rectes $r \equiv 2x + 3y - 7 = 0$, $s \equiv x + y - 3 = 0$ i pel punt $A(8, 2)$.

Problema 22

Calcula l'àrea del pentàgon de vèrtexs $A(-5, -2)$, $B(-2, 5)$, $C(2, 7)$, $D(5, 1)$, $E(2, -4)$.

Problema 23

Comprova que els punts migs dels costats del quadrilàter de vèrtexs $A(-2, 6)$, $B(4, 4)$, $C(6, -6)$, $D(2, -8)$ formen un quadrilàter de perímetre igual a la suma de les diagonals del quadrilàter ABCD.

Problema 24

Calcula els angles del triangle de vèrtexs $A(4, 2)$, $B(0, 1)$, $C(6, -1)$.

Problema 25

Calcula els vèrtexs del triangle $\triangle ABC$ coneguts els punts migs $A'(-2, 1)$, $B'(5, 2)$, $C'(2, -3)$ dels costats a , b i c , respectivament.

Problema 26

PROPIETAT DEL BARICENTRE D'UN TRIANGLE

Siga el triangle de vèrtexs $A(-3, 4)$, $B(2, 5)$ i $C(1, 0)$.

Siga la recta $r \equiv 3x + 4y + 12 = 0$ exterior al triangle.

a) Calcula les coordenades del baricentre G del triangle $\triangle ABC$.

b) Comprova que $d(G, r) = \frac{1}{3}(d(A, r) + d(B, r) + d(C, r))$.

Problema 27

Siguen els vectors $a = (x, 6)$, $b = (4, -3)$. Determina x a fi que:

a) Els vectors a , b siguin ortogonals.

b) El vector a tinga mòdul 10.

c) Els vectors a , b formen 120° .

Problema 28

Siguen $A(4, 5)$, $C(2, 1)$ els vèrtexs oposats del rombe ABCD.

Si el vèrtex B pertany a l'eix d'abscisses, calcula:

a) Les coordenades dels vèrtexs.

b) L'àrea del rombe ABCD.

c) El costat del rombe ABCD.

Problema 1 (67)

Donats tres vèrtexs $A(3, -7)$, $B(5, -7)$, $C(-2, 5)$ del paral·lelogram ABCD (el vèrtex D és l'oposat al vèrtex B). Determinar el vèrtex D.
Determinar la longitud de les diagonals.

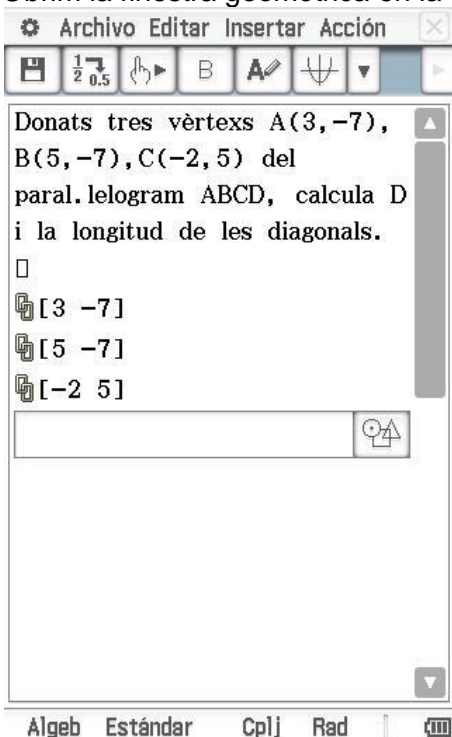
Obrim una eActivity.



Solució geomètrica:

Insertem tres vincles geomètrics amb els vèrtexs $A(3, -7)$, $B(5, -7)$, $C(-2, 5)$.

Obrim la finestra geomètrica en la què arrosseguem els tres vincles.



Dibuixem la recta AB i la recta BC.

Seleccionem el punt C i la recta AB i dibuixem la recta paral·lela a AB que passa per C.

Seleccionem el punt A i la recta BC i dibuixem la recta paral·lela a BC que passa per A.

Seleccionem la dues rectes. Calculem la intersecció d'aquestes dues últimes rectes que és el vèrtex D del paral·lelogram.

Amb el quadre de mesures calculem les seues coordenades.

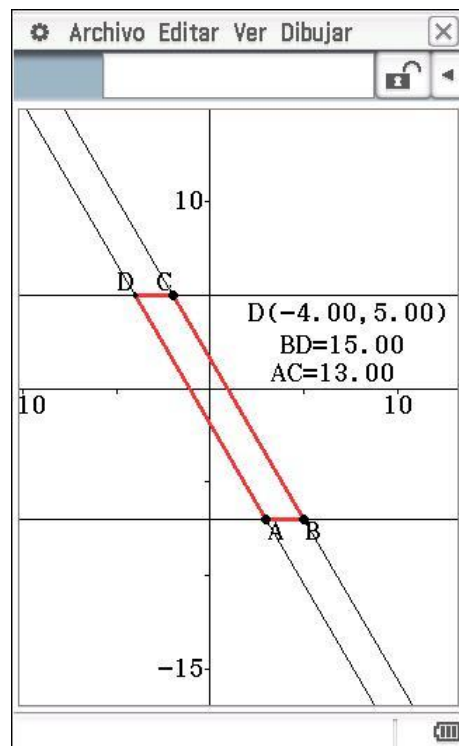
Amb l'opció segment dibuixem els costats del paral·lelogram ABCD

Seleccionem \overline{BD} i amb el quadre de mesures calculem la distància de B a D.

Seleccionem \overline{AC} i amb el quadre de mesures calculem la distància de A a C.

$D(-4, 5)$.

$\overline{BD} = 15$. $\overline{AC} = 13$.



Solució analítica:

Insertem una fila de càlcul.

Definim les variables:

$$[3 \ -7] \Rightarrow A$$

$$[5 \ -7] \Rightarrow B$$

$$[-2 \ 5] \Rightarrow C.$$

Calculem les coordenades del vèrtex D:

$$A - B + C.$$

$$D(-4, 5).$$

Calculem les mesures de les diagonals:

$$\text{norm}(D - B).$$

$$\text{norm}(C - A).$$

$$\overline{BD} = 15.$$

$$\overline{AC} = 13.$$

The screenshot shows a TI-84 Plus calculator interface with a list of calculations and their results. The interface includes a menu bar (Archivo, Editar, Insertar, Acción) and a toolbar with various icons. The main display area shows the following text and results:

defineix els vèrtexs	
[3 -7]⇒A	[3 -7]
[5 -7]⇒B	[5 -7]
[-2 5]⇒C	[-2 5]
A-B+C⇒D	[-4 5]
calcula les diagonals	
norm(D-B)	15
norm(C-A)	13

At the bottom of the screen, there are mode selection options: Algeb, Estándar, Cplj, Rad, and a calculator icon.

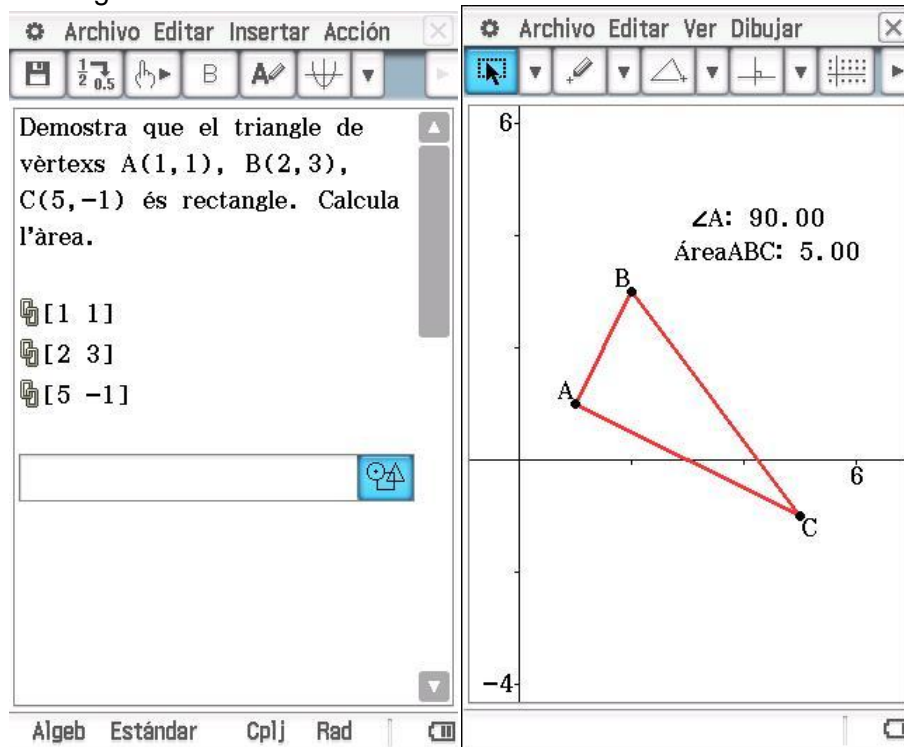
Problema 2 (71)

Demostra que el triangle de vèrtexs $A(1, 1)$, $B(2, 3)$, $C(5, -1)$ és rectangle.
Calcula l'àrea.

Obrim una eActivity.



Solució geomètrica:



Insertem tres vincles geomètrics amb els vèrtexs $A(1, 1)$, $B(2, 3)$, $C(5, -1)$.

Obrim la finestra geomètrica en la què arrosseguem els tres vincles.

Amb l'opció segment dibuixem els costats del triangle.

Seleccionem els costats \overline{AB} i \overline{AC} . Amb el quadre de mesures calculem la mesura de l'angle A.

$$A = 90^\circ.$$

Seleccionem els tres costats del triangle. Amb el quadre de mesures calculem l'àrea del triangle.

$$S_{ABC} = 5.$$

Solució analítica:

Insertem una fila de càlcul.

Definim les variables:

$$[2 \quad -3] \Rightarrow A$$

$$[3 \quad 2] \Rightarrow B$$

$$[-2 \quad 5] \Rightarrow C.$$

Calculem les mesures dels costats del triangle

$$\text{norm}(C - B) \Rightarrow a$$

$$\text{norm}(C - A) \Rightarrow b$$

$$\text{norm}(B - A) \Rightarrow c$$

Observem que a és el costat major.

Apliquem del teorema invers de Pitàgores. Vegem que $a^2 = b^2 + c^2$.

$$a^2 = 25, \quad b^2 + c^2 = 25.$$

Per tant, el triangle és rectangle.

$$\text{Per ser el triangle rectangle } S_{ABC} = \frac{b \cdot c}{2}.$$

L'àrea és 5.

The image shows two screenshots of a graphing calculator interface. The left screenshot shows the definition of points A, B, and C, and the calculation of their coordinates. The right screenshot shows the calculation of the lengths of the sides and the area of the triangle.

Operation	Result
norm(B-A) → c	$\sqrt{5}$
norm(C-A) → b	$2 \cdot \sqrt{5}$
norm(C-B) → a	5
prova t. invers Pitàgores	$a^2 = 25$
calcula àrea	$\frac{b \cdot c}{2} = 5$

Podem variar les coordenades de A, B i C per resoldre altres problemes.

Problema 3 (74)

Prova que els punts $A(2, 2)$, $B(-1, 6)$, $C(-5, 3)$, $D(-2, -1)$, són els vèrtexs d'un quadrat. Calcula l'àrea del quadrat ABCD.

Obrim una eActivity.



Solució geomètrica:

Insertem quatre vincles geomètrics amb els vèrtexs $A(2, 2)$, $B(-1, 6)$, $C(-5, 3)$, $D(-2, -1)$.

Obrim la finestra geomètrica en la què arrosseguem els quatre vincles.

Amb l'opció segment, dibuixem els costats del quadrilàter.

Seleccionem els segments \overline{AB} , \overline{AD} . Amb el quadre de mesures calculem l'angle A.

Seleccionem cadascun dels costats i amb el quadre de mesures calculem cada longitud dels costats i observem que tots són iguals.

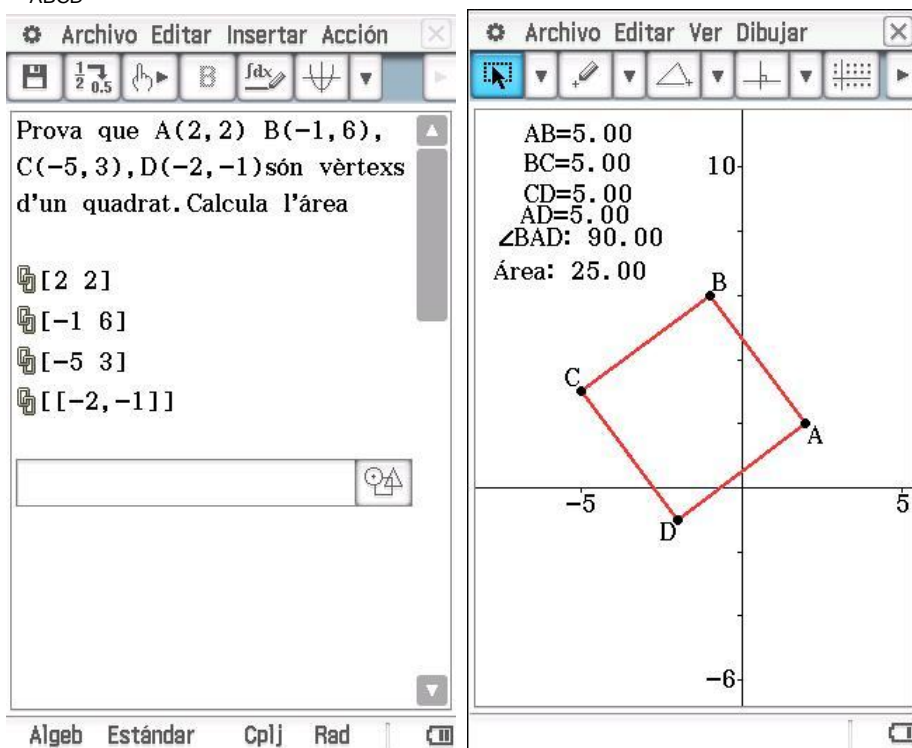
Per tant, ABCD és un quadrat.

Seleccionem tots els costats i amb el quadre de mesures calculem l'àrea.

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{AD} = 5.$$

$$A = 90^\circ.$$

$$S_{ABCD} = 25.$$



Solució analítica:

Insertem una fila de càlcul.

Definim les variables:

$$[2 \ 2] \Rightarrow A$$

$$[-1 \ 6] \Rightarrow B$$

$$[-5 \ 3] \Rightarrow C$$

$$[-5 \ -1] \Rightarrow D$$

Calculem les mesures dels costats del triangle:

$$\text{norm}(B - A) \Rightarrow AB$$

$$\text{norm}(C - B) \Rightarrow BC$$

$$\text{norm}(D - C) \Rightarrow CD$$

$$\text{norm}(D - A) \Rightarrow AD$$

Observem que tots els costats són iguals.

Calculem la mesura de la diagonal \overline{AC} .

$$\text{norm}(C - A) \Rightarrow AC$$

Apliquem del teorema invers de Pitàgores al triangle $\triangle ABC$. Vegem que $AC^2 = AB^2 + BC^2$.

$$AC^2 = 50, AB^2 + BC^2 = 50.$$

Aleshores, al triangle $\triangle ABC$ és rectangle.

Per tant, ABCD és un quadrat.

Calculem l'àrea:

$$\overline{AB}^2 = 25.$$

defineix els vèrtexs

[2 2]⇒A	[2 2]
[-1 6]⇒B	[-1 6]
[-5 3]⇒C	[-5 3]
[-2 -1]⇒D	[-2 -1]

calcula els costats

norm(B-A)⇒AB	5
norm(C-B)⇒BC	5
norm(D-C)⇒CD	5

Algeb Estándar Cplj Rad

norm(D-C)⇒CD	5
norm(D-A)⇒AD	5
calcula la diagonal AC	
norm(C-A)⇒AC	$5\sqrt{2}$
comprova el t. invers Pitàgores	
AC ²	50
AB ² +BC ²	50
AB ²	25
□	

Algeb Estándar Cplj Rad

Problema 4

Demostra que el triangle de vèrtexs $A(-1, 3)$, $B(1, 2)$, $C(0, 4)$ és acutangle.

Obrim una eActivity.



Solució geomètrica:

Insertem tres vincles geomètrics amb els vèrtexs $A(-1, 3)$, $B(1, 2)$, $C(0, 4)$.

Obrim la finestra geomètrica en la què arrosseguem els tres vincles.

Amb l'opció segment dibuixem els costats del triangle.

Seleccionem els costats \overline{AB} i \overline{AC} . Amb el quadre de mesures calculem la mesura de l'angle A.

Seleccionem els costats \overline{AB} i \overline{BC} . Amb el quadre de mesures calculem la mesura de l'angle B.

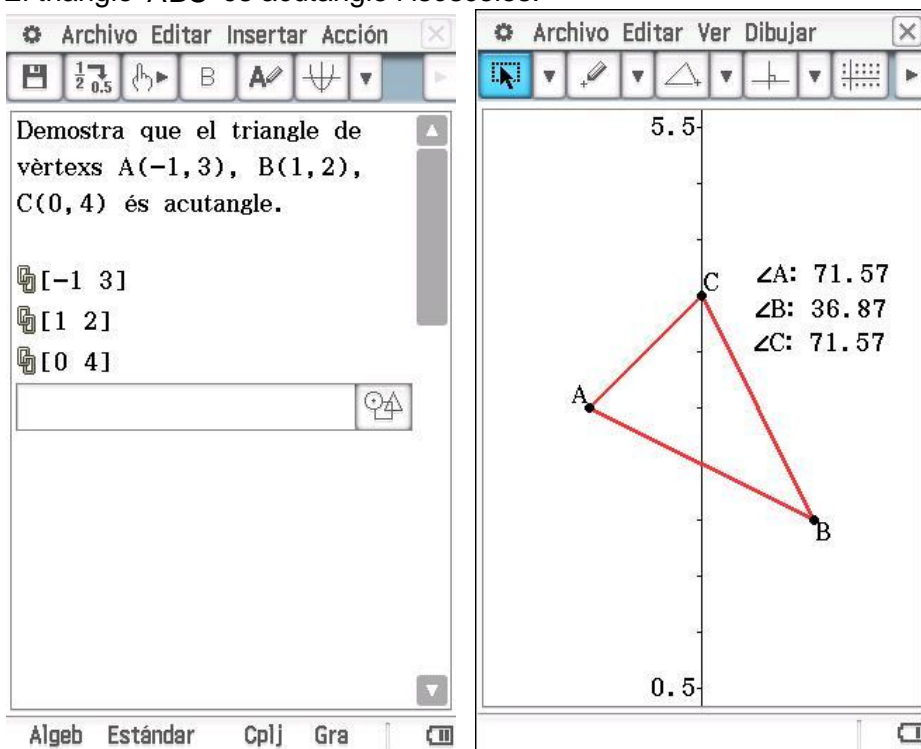
Seleccionem els costats \overline{BC} i \overline{AC} . Amb el quadre de mesures calculem la mesura de l'angle C.

$$A = 71.57^\circ$$

$$B = 36.87^\circ$$

$$C = 71.57^\circ$$

El triangle $\triangle ABC$ és acutangle i isòsceles.



Solució analítica:

Insertem una fila de càlcul.

Definim les variables:

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow B$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow C.$$

Calculem les mesures dels costats del triangle:

$$\text{norm}(C - B) \Rightarrow a$$

$$\text{norm}(C - A) \Rightarrow b$$

$$\text{norm}(B - A) \Rightarrow c$$

$$a = c = \sqrt{5}, b = \sqrt{2}.$$

El triangle és isòsceles i el costat menor és el menor, per tant, el triangle és acutangle.

Calculem els angles:

Per calcular l'angle A utilitzem la funció angle():

$$\text{angle}(B - A, C - A).$$

$$A = 71.56505118^\circ.$$

Per calcular l'angle B utilitzem la funció angle():

$$\text{angle}(A - B, C - B).$$

$$B = 36.86989765^\circ.$$

Per calcular l'angle C utilitzem la funció angle():

$$\text{angle}(A - C, B - C).$$

$$C = 71.56505118^\circ.$$

Podem aplicar també el teorema invers de Pitàgores.

The image shows two screenshots of a TI-84 Plus calculator interface. The left screenshot shows the input of vertex coordinates and the calculation of side lengths. The right screenshot shows the calculation of the angles and the conclusion that the triangle is isosceles and acute.

Left Screenshot:

- Menu: Archivo Editar Insertar Acción
- Defineix els vèrtexs
- $[-1 \ 3] \Rightarrow A$
- $[1 \ 2] \Rightarrow B$
- $[0 \ 4] \Rightarrow C$
- calcula els costats
- $\text{norm}(B-A) \Rightarrow c$
- $\text{norm}(C-A) \Rightarrow b$
- $\text{norm}(C-B) \Rightarrow a$
- el triangle és isòsceles i el

Right Screenshot:

- Menu: Archivo Editar Insertar Acción
- el triangle és isòsceles i el costat desigual és el menor. Per tant és acutangle.
- calculando los ángulos
- ángulo A
- $\text{angle}(B-A, C-A)$
- 71.56505118
- ángulo B
- $\text{angle}(A-B, C-B)$
- 36.86989765
- ángulo C
- $\text{angle}(A-C, B-C)$
- 71.56505118
-

Problema 5 (215)

Els costats \overline{AB} , \overline{BC} i \overline{AC} d'un triangle són la intersecció de les rectes $r_{AB} \equiv 4x + 3y - 5 = 0$, $r_{BC} \equiv x - 3y + 10 = 0$, $r_{AC} \equiv x - 2 = 0$.
Determina les coordenades dels vèrtexs.

Obrim una eActivity.



Solució geomètrica:

Insertem tres vincles geomètrics amb les rectes que formen els costats $r_{AB} \equiv 4x + 3y - 5 = 0$, $r_{BC} \equiv x - 3y + 10 = 0$, $r_{AC} \equiv x - 2 = 0$.

Obrim la finestra geomètrica en la què arrosseguem els tres vincles.

El vèrtex A és la intersecció de les rectes r_{AB} , r_{AC} .

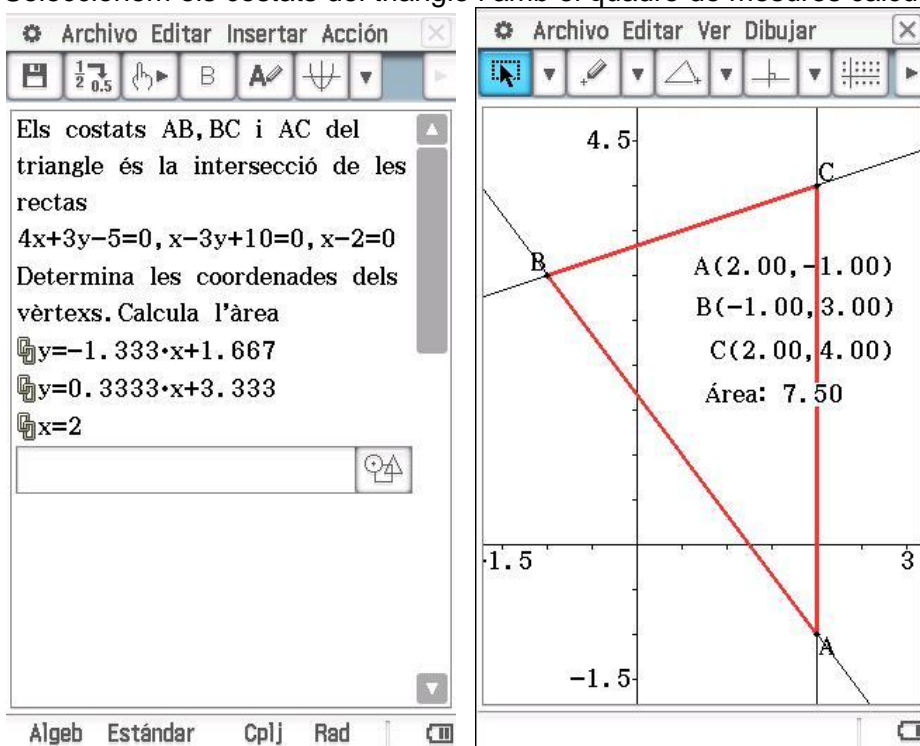
El vèrtex B és la intersecció de les rectes r_{AB} , r_{BC} .

El vèrtex C és la intersecció de les rectes r_{BC} , r_{AC} .

Amb el quadre de mesures, calculem les coordenades dels vèrtexs.

Amb l'opció segment dibuixem el triangle $\triangle ABC$.

Seleccionem els costats del triangle i amb el quadre de mesures calculem l'àrea.



Solució analítica:

Insertem una fila de càlcul.

Per calcular el vèrtex A resollem el sistema format per les rectes r_{AB} , r_{AC} :

$$\begin{cases} 4x + 3y - 5 = 0 \\ x - 2 = 0 \end{cases} \Big| x, y$$

A(2, -1).

Per calcular el vèrtex B resollem el sistema format per les rectes r_{AB} , r_{BC} :

$$\begin{cases} 4x + 3y - 5 = 0 \\ x - 3y + 10 = 0 \end{cases} \Big| x, y$$

B(-1, 3).

Per calcular el vèrtex C resollem el sistema format per les rectes r_{BC} , r_{AC} :

$$\begin{cases} x - 3y + 10 = 0 \\ x - 2 = 0 \end{cases} \Big| x, y$$

C(2, 4).

Per calcular l'àrea apliquem la fórmula $\frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \frac{15}{2}.$$

The image shows two screenshots of a TI-84 Plus calculator interface. The left window shows the solution of a system of linear equations for three vertices (A, B, and C). The right window shows the calculation of the area of a triangle formed by these vertices.

Left Window:

- Menu: Archivo, Editar, Insertar, Acción
- Toolbar: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{0.5}$, \leftarrow , \rightarrow , B, A, $\sqrt{}$, ∇
- Input: $\{x=2, y=-1\}$
- Text: calcula A
- Equation: $\begin{cases} 4x+3y-5=0 \\ x-2=0 \end{cases} \Big| x, y$
- Text: calcula B
- Equation: $\begin{cases} 4x+3y-5=0 \\ x-3 \cdot y+10=0 \end{cases} \Big| x, y$
- Text: calcula C
- Equation: $\begin{cases} x-3y+10=0 \\ x-2=0 \end{cases} \Big| x, y$
- Text: calcula l'àrea
- Equation: $\frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$
- Bottom: Algeb, Estándar, Cplj, Rad, \square

Right Window:

- Menu: Archivo, Editar, Insertar, Acción
- Toolbar: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{0.5}$, \leftarrow , \rightarrow , B, A, $\sqrt{}$, ∇
- Input: $\{x=-1, y=3\}$
- Text: calcula C
- Equation: $\begin{cases} x-3y+10=0 \\ x-2=0 \end{cases} \Big| x, y$
- Text: calcula l'àrea
- Equation: $\frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$
- Result: $\frac{15}{2}$
- Bottom: Algeb, Estándar, Cplj, Rad, \square

Problema 6

Donats els punts $A(2, 3)$ i $B(-1, 0)$ determina l'equació de la recta que passa per A i és perpendicular al segment \overline{AB} .

Obrim una eActivity.



Solució geomètrica:

Insertem dos vincles geomètrics amb els punts $A(2, 3)$ i $B(-1, 0)$

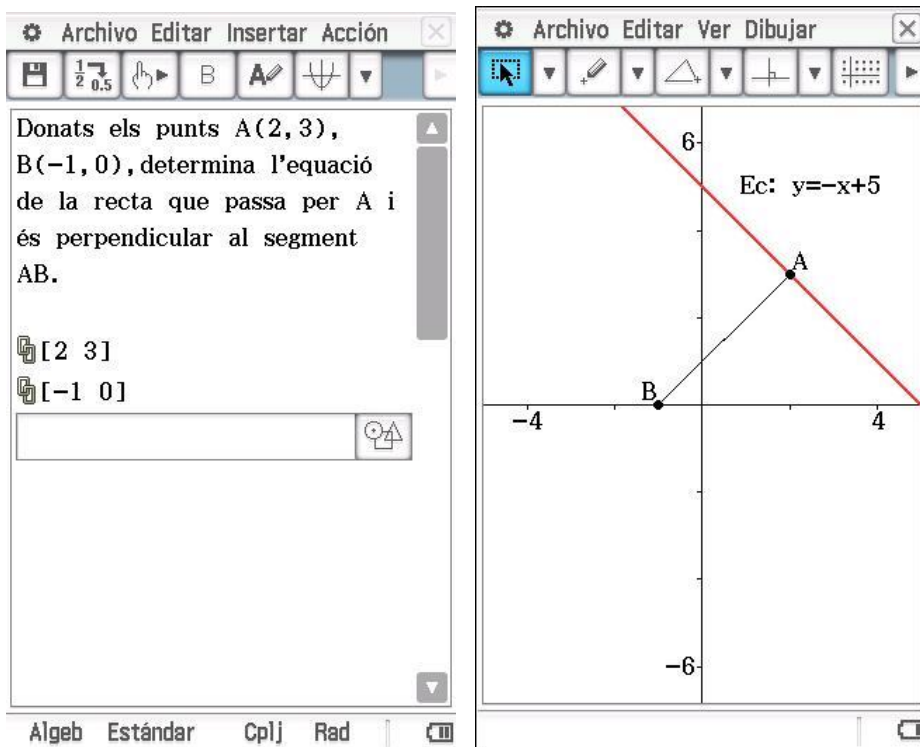
Obrim la finestra geomètrica en la què arrosseguem els dos vincles.

Dibuixem el segment \overline{AB} .

Seleccionem el segment \overline{AB} i el punt A. Apliquem l'opció recta perpendicular.

Seleccionem la recta perpendicular. Amb el quadre de mesures calculem l'equació de la recta.

L'equació es $y = -x + 5$.



Solució analítica:

Insertem una fila de càlcul.

Definim les variables:

$$[2 \ 3] \Rightarrow A$$

$$[-1 \ 0] \Rightarrow B$$

Calculem les coordenades de A:

$$A[1, 1] \Rightarrow A1.$$

$$A[1, 2] \Rightarrow A2$$

Calculem les components del vector \overline{BA} :

$$A - B \Rightarrow v$$

Calculem el pendent de la recta AB:

$$\frac{v[1, 2]}{v[1, 1]} \Rightarrow m$$

Calculem l'equació de la recta perpendicular a AB que passa per A:

$$y = \frac{-1}{m}(x - A_1) + A_2.$$

L'equació és $y = -x + 5$.

Archivo Editar Insertar Acción

defineix el punt A
 $[2\ 3] \rightarrow A$

coordenades del punt A
 $A[1,1] \rightarrow A_1$

$A[1,2] \rightarrow A_2$

$[-1\ 0] \rightarrow B$

vector director recta AB
 $A-B \rightarrow v$

pendent recta AB
 $v[1,2]$

Algeb Estándar Cplj Rad

Archivo Editar Insertar Acción

vector director recta AB
 $A-B \rightarrow v$

pendent recta AB
 $\frac{v[1,2]}{v[1,1]} \rightarrow m$

recta perpendicular a AB que
 passa per A

$y = \frac{-1}{m}(x - A_1) + A_2$

simplify(ans)

$y = -x + 5$

$y = -x + 5$

Algeb Estándar Cplj Rad

Problema 7 (214)

Determina el punt intersecció de les rectes $r \equiv 3x - 4y - 29 = 0$, $s \equiv 2x + 5y + 19 = 0$.

Obrim una eActivity.



Solució geomètrica:

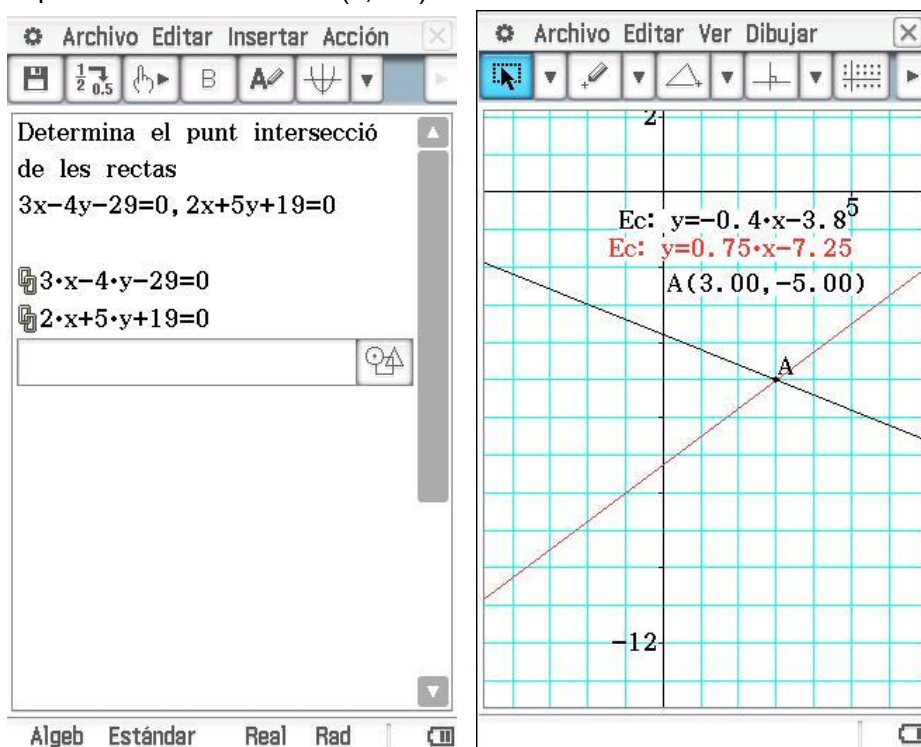
Insertem dos vincles geomètrics amb les equacions de les dues rectes.

$r \equiv 3x - 4y - 29 = 0$, $s \equiv 2x + 5y + 19 = 0$.

Obrim la finestra geomètrica en la què arrosseguem els dos vincles.

Seleccionem las dues rectes i calculem el punt d'intersecció.

El punt d'intersecció és $A(3, -5)$.



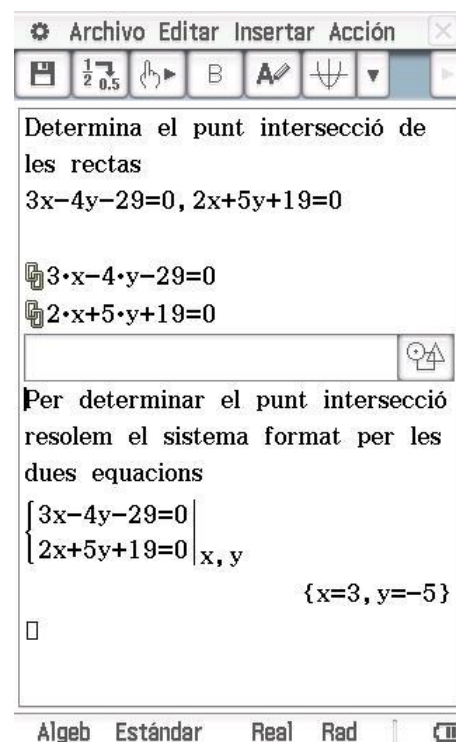
Solució analítica:

Insertem una fila de càlcul.

Per calcular el punt A intersecció de les dues rectes resollem el sistema format per les rectes.

$$\begin{cases} 3x - 4y - 29 = 0 \\ 2x + 5y + 19 = 0 \end{cases} \Big|_{x, y}$$

La solució és $A(3, -5)$.



Problema 8 (227)

Determina el punt projecció del punt $P(-6, 4)$ sobre la recta $4x - 5y + 3 = 0$.

Obrim una eActivity.



Solució geomètrica:

Insertem dos vincles geomètrics amb el punt $P(-6, 4)$ i l'equació de la recta $4x - 5y + 3 = 0$.

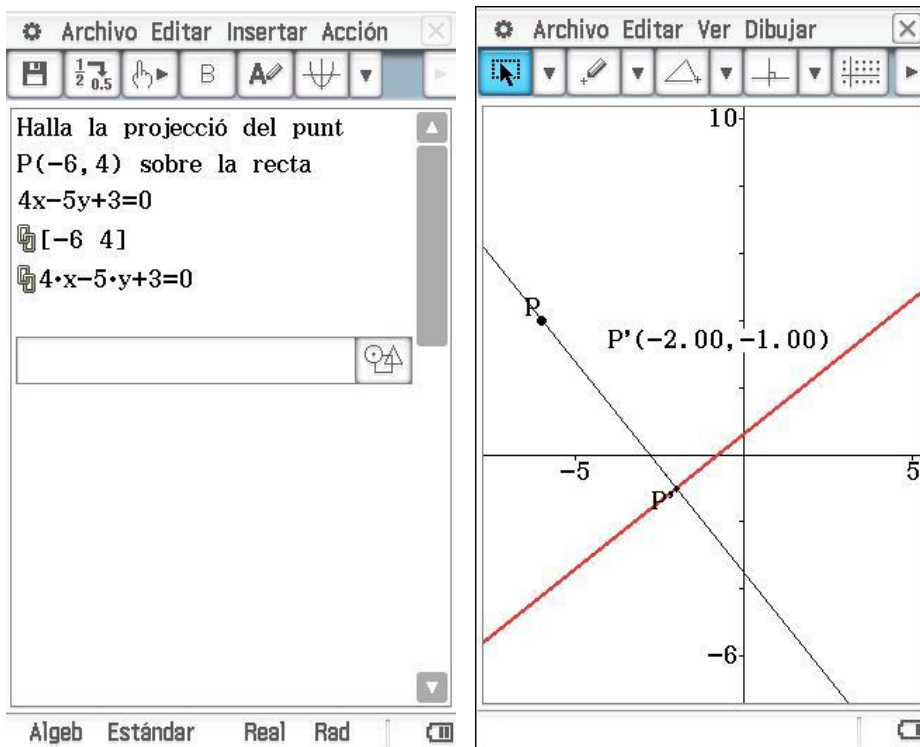
Obrim la finestra geomètrica en la què arrosseguem els dos vincles.

Seleccionem el punt i la recta. Dibuixem la recta perpendicular amb els dos objectes.

Seleccionem las dos rectes i efectuem la intersecció de les dues rectes.

Seleccionem el punt projecció i amb el quadre de mesures calculem les seues coordenades.

$P'(-2, -1)$.



Solució analítica:

Insertem una fila de càlcul.

Definim el pendent de la recta perpendicular a r :

$$\frac{-5}{4} \Rightarrow m.$$

Definim la variable:

$$[-6 \quad 4] \Rightarrow P$$

Calculem les coordenades de P :

$$P[1, 1] \Rightarrow P1$$

$$P[1, 2] \Rightarrow P2$$

L'equació de la recta perpendicular a la recta r que passa per P té equació:

$$y = m \cdot (x - P1) + P2.$$

Per calcular el punt projecció resollem el sistema format por dues rectes:

$$\begin{cases} 4x - 5y + 3 = 0 \\ y = m(x - P_1) + P_2 \end{cases} \Big|_{x, y}$$

La solució és $P'(-2, -1)$.

The image shows two screenshots of a mathematical software interface, likely a graphing calculator or algebra software, demonstrating the steps to find the intersection of two lines.

Left Screenshot:

- Menu: Archivo Editar Insertar Acción
- Toolbar: Save, Fraction (1/2, 0.5), Undo, Bold, Formula, Graph, etc.
- Text: "Siga la recta $Ax+By+C=0$ "
- Equation: $4 \cdot x - 5 \cdot y + 3 = 0$
- Equation: $4 \cdot x - 5 \cdot y + 3 = 0$
- Text: "pendent recta perpendicular és"
- Equation: $\frac{B}{A}$
- Equation: $\frac{-5}{4} \rightarrow m$
- Equation: $-\frac{5}{4}$
- Text: "coordenades P"
- Equation: $[-6 \ 4] \Rightarrow P$
- Equation: $[-6 \ 4]$
- Equation: $P[1, 1] \Rightarrow P_1$
- Equation: -6
- Mode: Álgeb Estándar Real Rad

Right Screenshot:

- Menu: Archivo Editar Insertar Acción
- Toolbar: Save, Fraction (1/2, 0.5), Undo, Bold, Formula, Graph, etc.
- Equation: $-\frac{5}{4}$
- Text: "coordenades P"
- Equation: $[-6 \ 4] \Rightarrow P$
- Equation: $[-6 \ 4]$
- Equation: $P[1, 1] \Rightarrow P_1$
- Equation: -6
- Equation: $P[1, 2] \Rightarrow P_2$
- Equation: 4
- Equation: $y = m \times (x - P_1) + P_2$
- Equation: $y = \frac{-5 \cdot (x + 6)}{4} + 4$
- Equation: $\begin{cases} 4 \cdot x - 5 \cdot y + 3 = 0 \\ y = m \times (x - P_1) + P_2 \end{cases} \Big|_{x, y}$
- Equation: $\{x = -2, y = -1\}$
- Equation: \square
- Mode: Álgeb Estándar Real Rad

Problema 9 (247)

Determina la projecció del punt $P(-8, 12)$ sobre la recta que passa pels punts $A(2, -3)$, $B(-5, 1)$.

Obrim una eActivity.



Solució geomètrica:

Insertem tres vincles geomètrics amb els punts $P(-8, 12)$, $A(2, -3)$, $B(-5, 1)$.

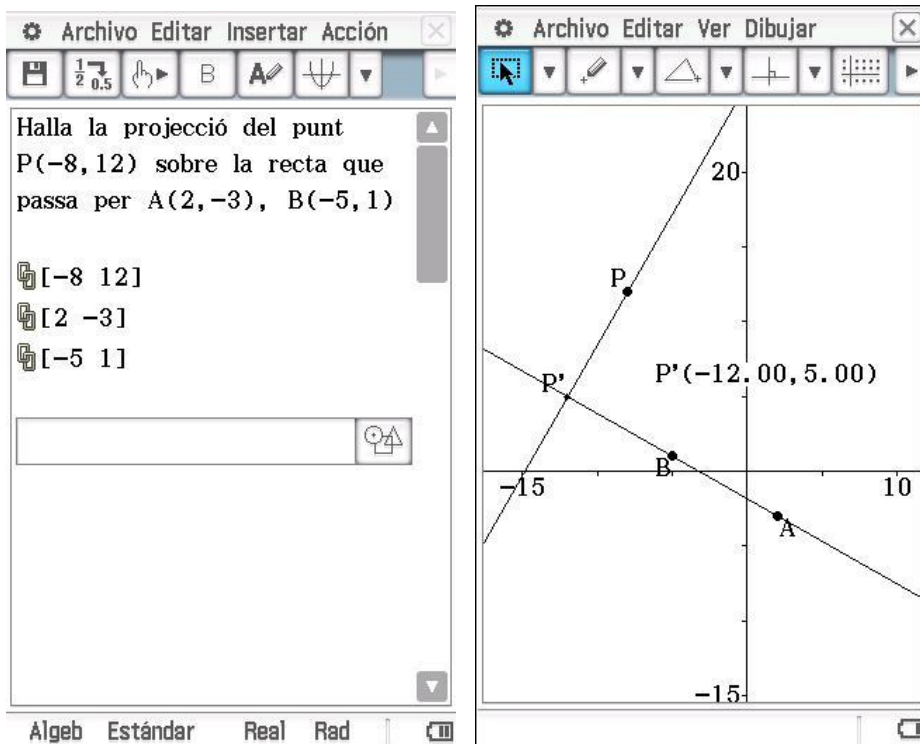
Obrim una finestra geomètrica, en la què arrosseguem els tres vincles.

Dibuixem la recta AB .

Seleccionem el segment i el punt P i dibuixem la recta perpendicular a la recta AB que passa per P .

Seleccionem la recta AB i la recta perpendicular. La intersecció és el punt projecció de P sobre el segment \overline{AB} .

Seleccionem el punt projecció i en el quadre de mesures, calculem les seues coordenades.



Solució analítica:

Insertem una fila de càlcul.

Definim les variables:

$$[-8 \ 12] \Rightarrow P$$

$$[2 \ -3] \Rightarrow A$$

$$[-5 \ 1] \Rightarrow B$$

Calculem les coordenades de A i de P :

$$A[1, 1] \Rightarrow A1.$$

$$A[1, 2] \Rightarrow A2$$

$$P[1, 1] \Rightarrow P1.$$

$$P[1, 2] \Rightarrow P2$$

Calculem el vector \overline{AB} .

$$B - A \Rightarrow v.$$

Calculem el pendent de la recta AB:

$$\frac{v[1, 2]}{v[1, 1]} \Rightarrow m$$

L'equació de la recta AB és:

$$y = m(x - A1) + A2.$$

L'equació de la recta perpendicular a AB que passa per P és:

$$y = \frac{-1}{m}(x - P1) + P2.$$

El punt projecció és la intersecció de les dues rectes:

$$\begin{cases} y = m(x - A1) + A2 \\ y = \frac{-1}{m}(x - P1) + P2 \end{cases} x, y$$

Les coordenades del punt projecció P' són:

$$P'(-12, 5)$$

The image shows two screenshots of a graphing calculator interface, likely a TI-84 Plus CE, used for solving a geometry problem. The calculator is in the 'Algebra' mode.

Left Screenshot: Shows the input of coordinates for points A and P.

- Point A: $[2 \ -3] \Rightarrow A$ with coordinates $[2 \ -3]$
- Point B: $[-5 \ 1] \Rightarrow B$ with coordinates $[-5 \ 1]$
- Point P: $[-8 \ 12] \Rightarrow P$ with coordinates $[-8 \ 12]$

Right Screenshot: Shows the calculation of the projection of point P onto line AB.

- Input: $P[1, 2] \Rightarrow P2$ with value 12
- Label: "vector director recta AB"
- Input: $B-A \Rightarrow v$ with result $[-7 \ 4]$
- Label: "pendent recta AB"
- Input: $\frac{v[1, 2]}{v[1, 1]} \Rightarrow m$ with result $-\frac{4}{7}$
- Label: "equació de la recta AB"
- Equation: $y = m \times (x - A1) + A2$
- Equation: $y = \frac{-4 \cdot (x - 2)}{7} - 3$
- Label: "equació de la recta perpendicular a AB que passa per P"

Archivo Editar Insertar Acción

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{0.5}$ \rightarrow **B** $\int dx$ \int

equació de la recta AB

$$y = m \times (x - A1) + A2$$

$$y = \frac{-4 \cdot (x - 2)}{7} - 3$$

equació de la recta perpendicular a AB que passa per P

$$y = \frac{-1}{m} (x - P1) + P2$$

$$y = \frac{7 \cdot (x + 8)}{4} + 12$$

Punt projecció

$$\begin{cases} y = m \times (x - A1) + A2 \\ y = \frac{-1}{m} \times (x - P1) + P2 \end{cases} \quad x, y$$

$$\{x = -12, y = 5\}$$

□

Algeb Estándar Real Rad $\frac{1}{1}$

Podem variar les coordenades de A, B, i P per resoldre altres problemes

Problema 10 (116)

Les coordenades dels vèrtexs d'un triangle són $A(2, -3)$, $B(3, 2)$, $C(-2, 5)$.
Calcula l'àrea del triangle.

Obrim una eActivity.



Solució geomètrica:

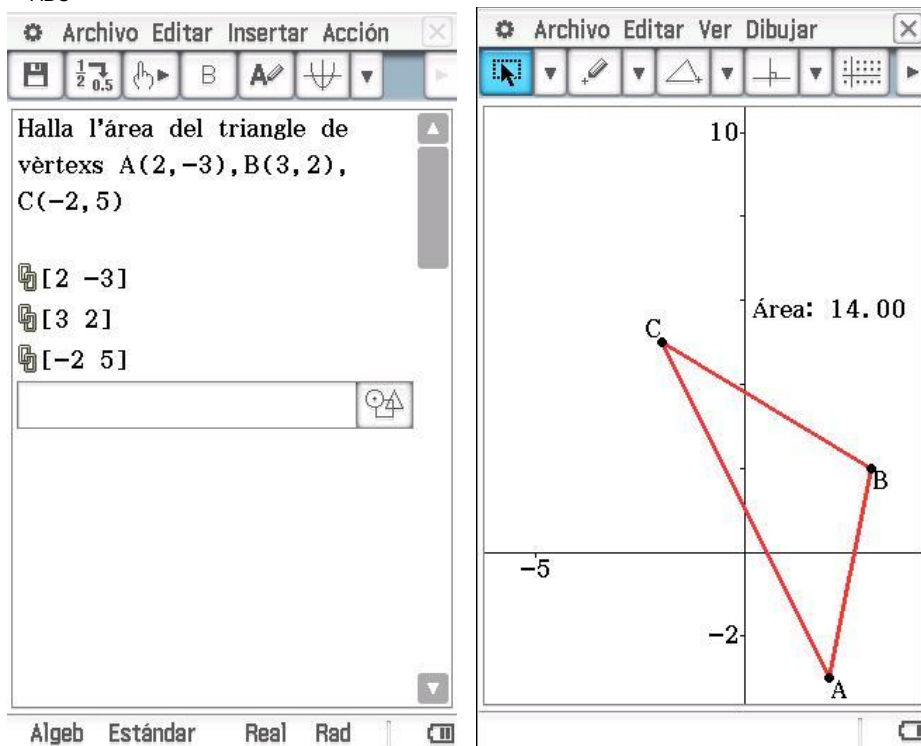
Insertem tres vincles geomètrics amb els vèrtexs $A(2, -3)$, $B(3, 2)$, $C(-2, 5)$.

Obrim la finestra geomètrica en la què arrosseguem els tres vincles.

Amb l'opció segment dibuixem els costats del triangle.

Seleccionem els costats del triangle i amb el quadre de mesures calculem l'àrea:

$$S_{ABC} = 14.$$



Solució analítica 1:

Apliquem la fórmula:
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solució analítica 2:

Apliquem la fórmula de Heró:
$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}{2} ;$$

Insertem una fila de càlcul.

Definim les variables:

$$[2 \ -3] \Rightarrow A$$

$$[3 \ 2] \Rightarrow B$$

$$[-2 \ 5] \Rightarrow C.$$

Calculem les mesures dels costats del triangle

$$\text{norm}(C-B) \Rightarrow a$$

$$\text{norm}(C - A) \Rightarrow b$$

$$\text{norm}(B - A) \Rightarrow c$$

$$\text{Calculem } \frac{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}{2}.$$

Solució analítica 3:

$$\text{Apliquem la fórmula trigonomètrica } S_{ABC} = \frac{bc \cdot \sin A}{2}.$$

Calculem l'angle A:

$$\frac{\text{dotP}(B - A, C - A)}{b \cdot c} \Rightarrow \cos A.$$

Calculem l'angle A:

$$\cos^{-1}(\cos A) \Rightarrow aA.$$

Calculem l'àrea con la fórmula trigonomètrica:

$$\frac{b \cdot c \cdot \sin(aA)}{2}.$$

Per calcular l'angle podem utilitzar l'opció:

$$\text{angle}(B - A, C - A).$$

The image shows two screenshots of a graphing calculator interface, likely TI-84 Plus, demonstrating the calculation of the area of a triangle and the lengths of its sides using vectors.

Left Screenshot: Shows the calculation of the area of a triangle using Heron's formula. The input is a 3x3 matrix with columns [2, -3, 1], [3, 2, 1], and [-2, 5, 1]. The determinant is calculated as 14, and the area is shown as $\frac{1}{2} \det(\dots) = 14$. The text below reads: "calcula la mesura dels costats i aplica la fórmula d'Heró [2 -3]⇒A".

Right Screenshot: Shows the calculation of the lengths of the sides of the triangle using vector norms. The input is a 3x3 matrix with columns [2, -3], [3, 2], and [-2, 5]. The norms are calculated as follows:

- norm(C-B) ⇒ a = $\sqrt{34}$
- norm(C-A) ⇒ b = $4\sqrt{5}$
- norm(B-A) ⇒ c = $\sqrt{26}$

 The text below reads: "calcula la mesura dels costats i aplica la fórmula d'Heró [2 -3]⇒A".

Archivo Editar Insertar Acción

$\frac{1}{2}$ 0.5 \leftarrow \rightarrow B $\int dx$ $\int dx$ $\int dx$

$$\frac{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}{4}$$

$$\sqrt{(\sqrt{34}+\sqrt{26}+4\sqrt{5})\cdot(\sqrt{34}+\sqrt{26}-4\sqrt{5})}$$

simplify (ans)

14

aplicant la fórmula trigonomètrica $\frac{bc \sin(A)}{2}$

calculem l'angle A amb el producte escalar

$$\frac{\text{dotP}(B-A, C-A)}{c \times b} \Rightarrow \cos A$$

$$\frac{9 \cdot \sqrt{130}}{130}$$

Algeb Estándar Real Rad

Archivo Editar Insertar Acción

$\frac{1}{2}$ 0.5 \leftarrow \rightarrow B $\int dx$ $\int dx$ $\int dx$

aplicant la fórmula trigonomètrica $\frac{bc \sin(A)}{2}$

calculem l'angle A amb el producte escalar

$$\frac{\text{dotP}(B-A, C-A)}{c \times b} \Rightarrow \cos A$$

$$\frac{9 \cdot \sqrt{130}}{130}$$

$$\cos^{-1}(\cos A) \Rightarrow aA$$

$$\cos^{-1}\left(\frac{9 \cdot \sqrt{130}}{130}\right)$$

$$\frac{b \times c \times \sin(aA)}{2}$$

14

□

Algeb Estándar Real Rad

Problema 11

Determina l'equació de la recta mediatriu del segment d'extremes $A(1, 4)$, $B(-5, 2)$.

Obrim una eActivity.



Solució geomètrica:

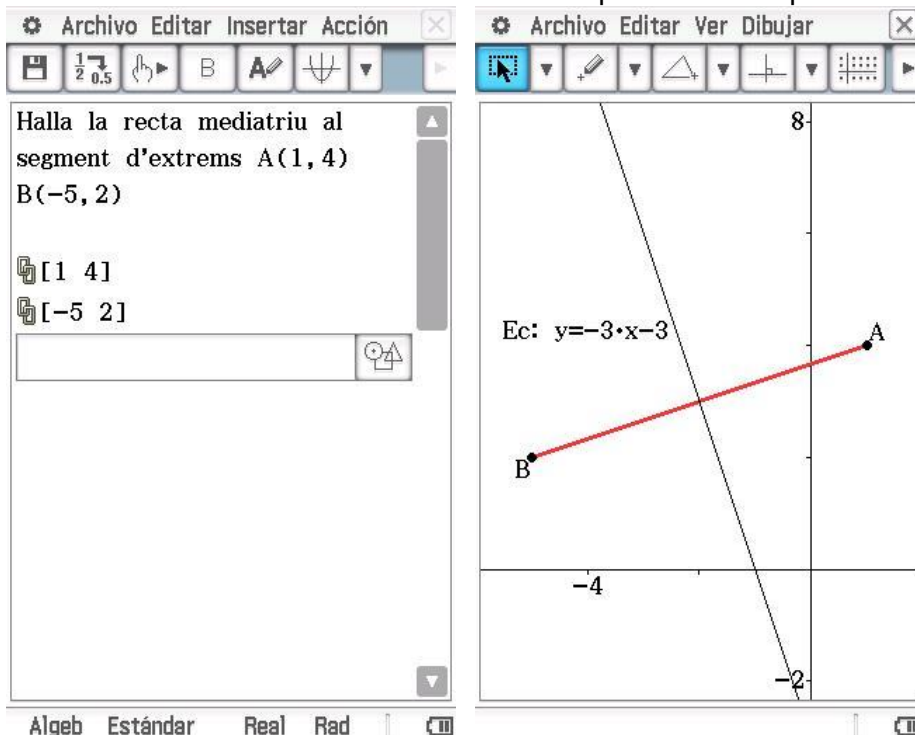
Insertem dos vincles geomètrics amb les coordenades dels extrems $A(1, 4)$, $B(-5, 2)$.

Obrim una finestra geomètrica en la què arrosseguem els dos vincles.

Dibuixem el segment \overline{AB} .

Seleccionem el segment i dibuixem la recta mediatriu.

Seleccionem la recta i determinem la seua equació amb el quadre de mesures



Solució analítica:

Insertem una fila de càlcul.

Definim les variables:

$$[1 \ 4] \Rightarrow A$$

$$[-5 \ 2] \Rightarrow B$$

Calculem el punt mig:

$$\frac{A + B}{2} \Rightarrow M.$$

Calculem les coordenades de M:

$$M[1, 1] \Rightarrow M1$$

$$M[1, 2] \Rightarrow M2$$

Calculem el vector \overrightarrow{AB} :

$$B - A \Rightarrow v.$$

Calculem el pendent del vector \overrightarrow{AB} :

$$\frac{v[1, 2]}{v[1, 1]} \Rightarrow m.$$

La recta mediatriu és:

$$y = \frac{-1}{m}(x - M1) + M2.$$

La solució és:

$$y = -3(x + 2) + 3$$

Desem la eActivity.

The image shows two screenshots of a TI-84 Plus calculator interface, likely a TI-84 Plus CE, used for solving a geometry problem. The calculator is in the 'Algebra' mode.

Left Screenshot:

- Menu: Archivo Editar Insertar Acción
- Inputs:
 - [1 4] → A
 - [-5 2] → B
 - $\frac{A+B}{2} \rightarrow M$
 - M[1, 1] → M1
 - M[1, 2] → M2
- Output: [-2 3]
- Text: "calculamos el punto medio del segmento AB"
- Text: "calcula el vector AB"

Right Screenshot:

- Menu: Archivo Editar Insertar Acción
- Inputs:
 - M[1, 2] → M2
 - B - A → v
 - $\frac{v[1, 2]}{v[1, 1]} \rightarrow m$
- Output: [-6 -2]
- Text: "calcula la pedent de AB"
- Text: "equació recta mediatriu"
- Equation: $y = \frac{-1}{m}(x - M1) + M2$
- Equation: $y = -3 \cdot (x + 2) + 3$

At the bottom of both screenshots, the calculator mode is set to 'Algeb' (Algebra).

Podem variar les coordenades de A i B per resoldre altres problemes.

Problema 12

TEOREMA DE VARIGNON

Siguen $A(-1, 2)$, $B(3, 4)$, $C(5, 2)$, $D(1, -2)$ els vèrtexs del quadrilàter ABCD.

Prova que els punts migs del quadrilàter són els vèrtexs d'un paral·lelogram.

Obrim una eActivity.



Solució geomètrica:

Insertem quatre vincles geomètrics amb les coordenades dels punts $A(-1, 2)$, $B(3, 4)$, $C(5, 2)$, $D(1, -2)$ vèrtexs del quadrilàter.

Obrim una finestra geomètrica en la què arrosseguem els quatre vincles.

Amb l'opció segment dibuixem el quadrilàter ABCD.

Seleccionem cada costat i dibuixem els punts migs K , L , M , N .

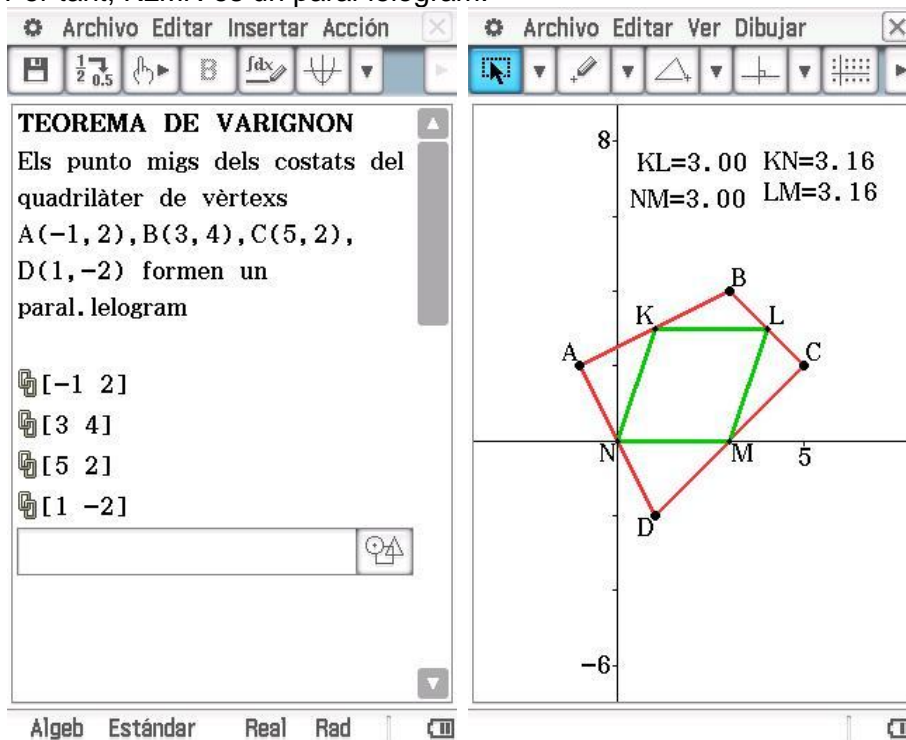
Amb l'opció segment dibuixem el quadrilàter KLMN.

Calculem las mesures dels costats del quadrilàter KLMN (quadre de mesura).

Observem que els costats oposats són iguals.

$$\overline{KL} = \overline{NM} = 3, \quad \overline{KN} = \overline{LM} = 3.16.$$

Per tant, KLMN es un paral·lelogram.



Solució analítica:

Insertem una fila de càlcul.

Definim les variables:

$$[-1 \ 2] \Rightarrow A$$

$$[3 \ 4] \Rightarrow B$$

$$[5 \ 2] \Rightarrow C$$

$$[1 \ -2] \Rightarrow D$$

Calculem els punts migs dels costats del quadrilàter ABCD:

$$\frac{A+B}{2} \Rightarrow K$$

$$\frac{B+C}{2} \Rightarrow L$$

$$\frac{C+D}{2} \Rightarrow M$$

$$\frac{A+D}{2} \Rightarrow N.$$

Calculem les components dels vectors \overrightarrow{NK} , \overrightarrow{ML} .

$$K - N$$

$$L - M$$

Observem que $\overrightarrow{NK} = \overrightarrow{ML} = (1, 3)$.

Per tant, KLMN és un paral·lelogram.

The image shows two screenshots of a graphing calculator interface. The left window displays the following data:

- [-1 2] → A
- [3 4] → B
- [5 2] → C
- [1 -2] → D
- punts migs dels costats
- $\frac{A+B}{2}$ → K
- $\frac{B+C}{2}$ → L

The right window displays the same data plus the following calculations:

- $\frac{B+C}{2}$ → L
- $\frac{C+D}{2}$ → M
- $\frac{A+D}{2}$ → N
- calcula components dels vectors NK, ML
- K-N
- L-M

Both windows show the resulting vectors as [1 3].

Podem variar les coordenades de A, B, C i D per resoldre altres problemes i poder fer la conjetura del teorema.

Problema 13

Calcula la distància del punt $P(-4, 4)$ a la recta $4x - 3y + 3 = 0$.

Obrim una eActivity.



Solució geomètrica:

Insertem dos vincles geomètrics amb les coordenades del punt $P(-4, 4)$, i la recta $4x - 3y + 3 = 0$.

Obrim una finestra geomètrica en la què arrosseguem els dos vincles.

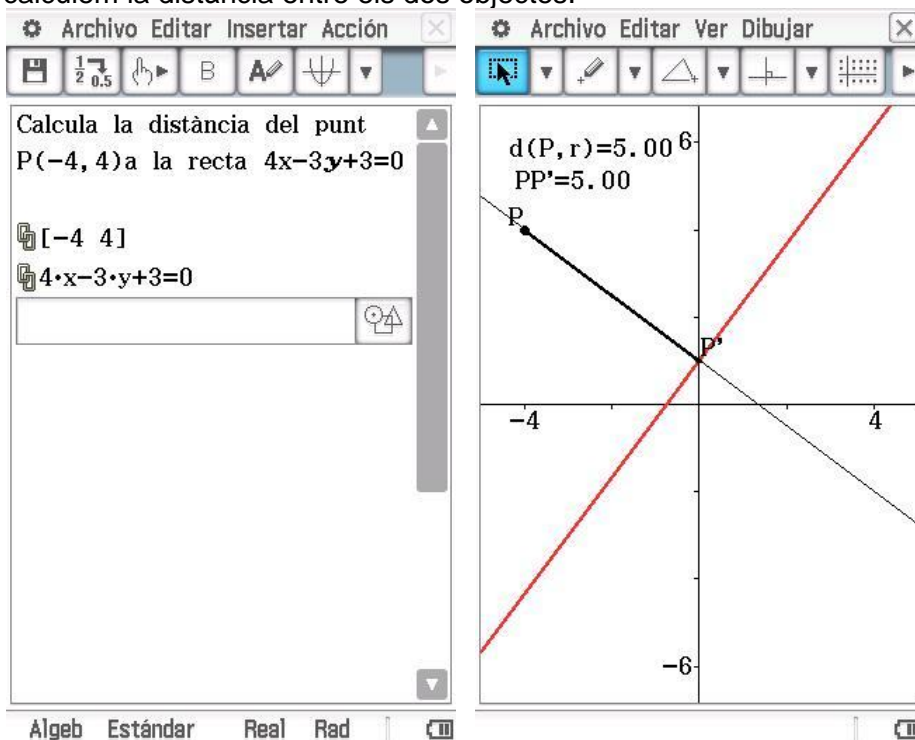
Seleccionem el punt i la recta dibuixem la recta perpendicular.

Intersectem les dues rectes que és el punt projecció P' .

Dibuixem el segment $\overline{PP'}$.

Seleccionem el segment i amb el quadre de mesures calculem la seua longitud que és la distància del punt a la recta.

Seleccionem el punt $P(-4, 4)$ i la recta $4x - 3y + 3 = 0$. Amb el quadre de mesures calculem la distància entre els dos objectes.



Solució analítica:

La distància del punt a la recta es:

$$\frac{|4 \cdot (-4) - 3 \cdot 4 + 3|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = 5.$$

Archivo Editar Insertar Acción

Calcula la distància del punt
P(-4, 4) a la recta $4x - 3y + 3 = 0$

$[-4 \ 4]$
 $4 \cdot x - 3 \cdot y + 3 = 0$

Calcula la distància amb la
fórmula

$$\frac{|4 \times (-4) - 3 \times 4 + 3|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}}$$

5

Algeb Estàndar Real Rad

Problema 14 (83)

Donats els vèrtexs oposats $A(3, 0)$, $C(-4, 1)$ del quadrat ABCD, determina els altres vèrtexs.

Calcula l'àrea.

Obrim una eActivity.



Solució geomètrica:

Insertem dos vincles geomètrics amb les coordenades dels vèrtexs $A(3, 0)$, $C(-4, 1)$

Obrim la finestra geomètrica en la que arrosseguem els tres vincles.

Dibuixem el segment \overline{AC} .

Seleccionem el segment \overline{AC} i dibuixem el punt mig O.

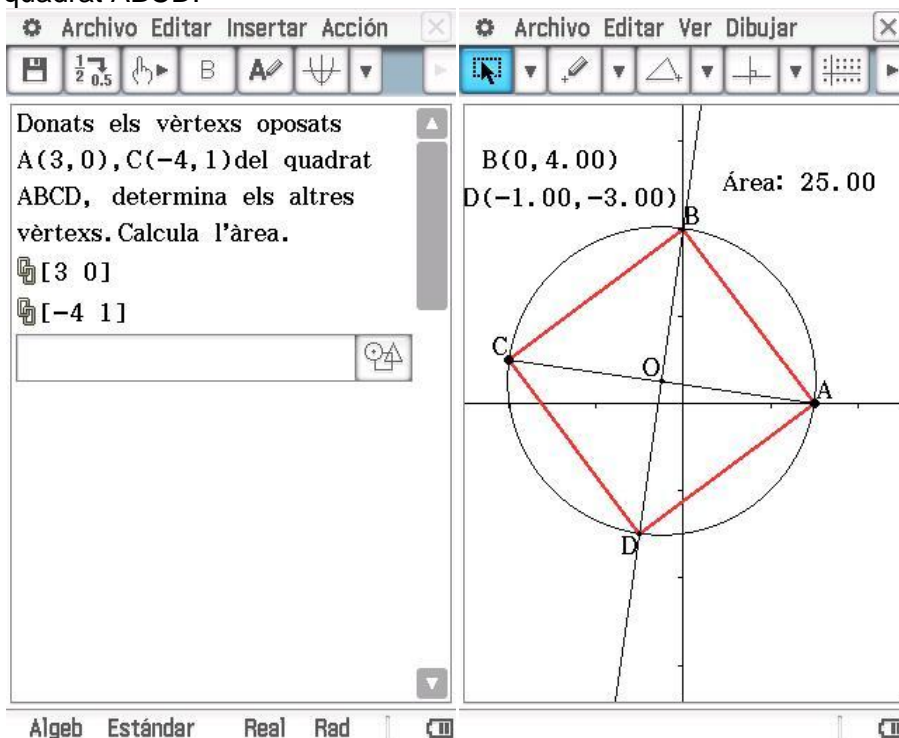
Seleccionem el segment \overline{AC} i dibuixem la recta mediatriu.

Dibuixem la circumferència de centre O que passa per A.

Seleccionem la circumferència i la recta mediatriu. La intersecció són els vèrtexs B, D.

Amb l'opció segment, dibuixem el quadrat ABCD.

Seleccionem els costats del quadrat i amb el quadre de mesures, calculem l'àrea del quadrat ABCD.



Solució analítica:

Insertem una fila de càlcul.

Definim les variables:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A$$

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow C$$

Calculem el centre del quadrat:

$$\frac{A + C}{2} \Rightarrow O$$

Calculem les components del vector \overrightarrow{OA} :

$$A - O \Rightarrow OA$$

$$OA[1, 1] \Rightarrow OA1.$$

$$OA[1, 2] \Rightarrow OA2.$$

Calculem les coordenades de B:

$$[-OA2, OA1] + O \Rightarrow B$$

Calculem les coordenades de D:

$$[OA2, -OA1] + O \Rightarrow D.$$

Calculem l'àrea del quadrat ABCD, \overline{AB}^2 :

$$\text{norm}(B - A)^2.$$

The image shows two screenshots of a mathematical software interface, likely a graphing calculator or CAS, used for solving a geometry problem. Both windows have a menu bar with 'Archivo', 'Editar', 'Insertar', and 'Acción', and a toolbar with various mathematical symbols and functions.

The left window shows the following steps and results:

- calcula el centre de ABCD
- $[3 \ 0] \Rightarrow A$
- $[3 \ 0]$
- $[-4 \ 1] \Rightarrow C$
- $[-4 \ 1]$
- $\frac{A+C}{2} \Rightarrow O$
- $\left[-\frac{1}{2} \ \frac{1}{2}\right]$
- calcula el vector OA
- $A - O \Rightarrow OA$
- $\left[\frac{7}{2} \ -\frac{1}{2}\right]$
- calcula les components del vector OA

The right window shows the following steps and results:

- $OA[1, 1] \Rightarrow OA1$
- $\frac{7}{2}$
- $OA[1, 2] \Rightarrow OA2$
- $-\frac{1}{2}$
- calcula les coordenades del vèrtex B
- $[-OA2 \ OA1] + O \Rightarrow B$
- $[0 \ 4]$
- $[OA2 \ -OA1] + O \Rightarrow D$
- $[-1 \ -3]$
- calcula l'àrea de ABCD \overline{AB}^2
- $\text{norm}(B - A)^2$
- 25

At the bottom of both windows, there is a mode selector with options: 'Algeb', 'Estándar', 'Real', 'Rad'.

Podem variar les coordenades de A i C per resoldre altres problemes

Problema 15 (85)

Calcula el centre i el radi de la circumferència circumscrita al triangle de vèrtexs $A(-3, 6)$, $B(9, -10)$ i $C(-5, 4)$.

Obrim una eActivity.



Solució geomètrica:

Insertem tres vincles geomètrics amb els vèrtexs $A(-3, 6)$, $B(9, -10)$ i $C(-5, 4)$.

Obrim la finestra geomètrica en la què arrosseguem els tres vincles.

Dibuixem els costats del triangle.

Seleccionem el costat \overline{BC} i dibuixem la mediatriu.

Seleccionem el costat \overline{AB} i dibuixem la mediatriu.

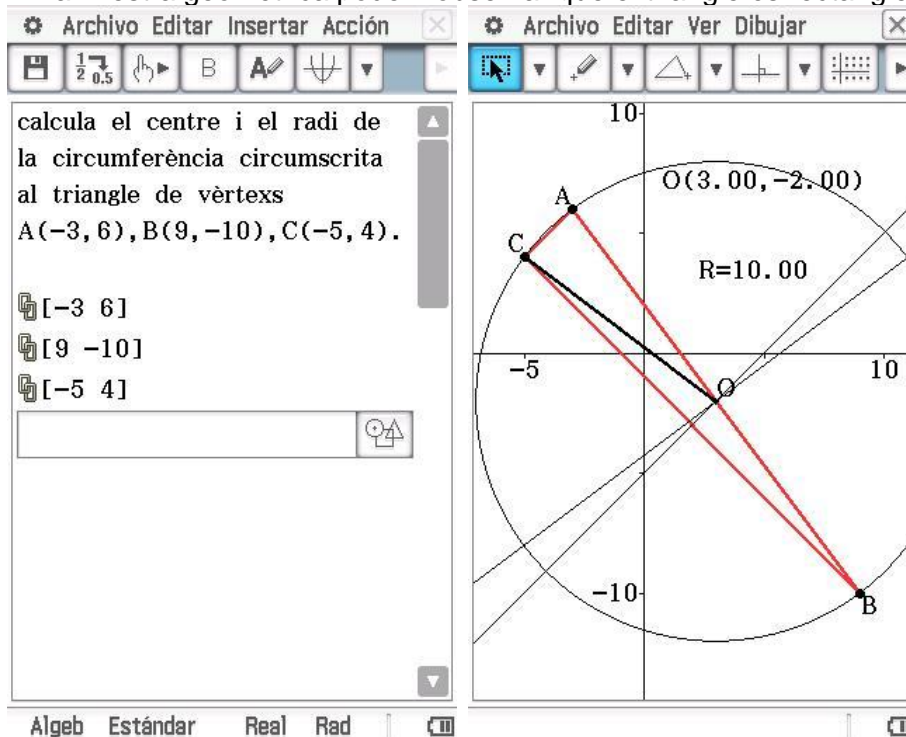
Seleccionem les dues mediatrins. La intersecció és el centre O de la circumferència circumscrita.

Seleccionem el punt O . Amb el quadre de mesures calculem les seues coordenades.

Dibuixem el segment \overline{OA} . Amb el quadre de mesures calculem el radi de la circumferència.

$O(3, -2)$, $R = 10$.

En la finestra geomètrica podem observar que el triangle és rectangle.



Solució analítica:

Insertem una fila de càlcul.

Definim les variables:

$$[-3 \ 6] \Rightarrow A$$

$$[9 \ -10] \Rightarrow B$$

$$[-5 \ 4] \Rightarrow C.$$

Calculem les mesures dels costats del triangle

$$\text{norm}(C - B) \Rightarrow a$$

$$\text{norm}(C - A) \Rightarrow b$$

$$\text{norm}(B - A) \Rightarrow c$$

Amb el teorema invers de Pitàgores, se demostra que el triangle és rectangle:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Per tant, $C = 90^\circ$.

En un triangle rectangle el centre de la circumferència circumscrita és el punt mig de la hipotenusa i el radi és la meitat de la hipotenusa.

$$\frac{A + B}{2} \Rightarrow O.$$

$$O(3, -2).$$

El radi és:

$$\text{norm}(C - O).$$

$$R = 10.$$

The image shows two screenshots of a graphing calculator interface, likely a TI-84 Plus, used for solving a geometry problem. The calculator is in the 'Algeb' (Algebra) mode.

Left Screenshot: Shows the calculation of the norm of vectors representing the sides of a triangle. The text 'vegem que el triangle és rectangle.' is entered. The coordinates of points A, B, and C are entered as vectors: $A = [-3 \ 6]$, $B = [9 \ -10]$, and $C = [-5 \ 4]$. The calculations are: $\text{norm}(C-B) \Rightarrow a = 14\sqrt{2}$, $\text{norm}(C-A) \Rightarrow b = 2\sqrt{2}$, and $\text{norm}(B-A) \Rightarrow c = 20$.

Right Screenshot: Shows the verification of the Pythagorean theorem: $c^2 = 400$ and $a^2 + b^2 = 400$. The text 'El triangle és rectangle C=90' is entered. The center of the circumcircle is calculated as the midpoint of the hypotenuse AB: $\frac{A+B}{2} \Rightarrow O = [3 \ -2]$. The radius is calculated as the norm of the vector from the center O to point C: $\text{norm}(C-O) = 10$.

Podem variar les coordenades de A, B i C per resoldre altres problemes

Problema 16 (78)

Determina en l'eix d'ordenades el punt M, la distància del qual al punt A(-8, 13) siga 17.

Obrim una eActivity.



Solució geomètrica:

Insertem un vincle geomètric amb el punt A(-8, 13).

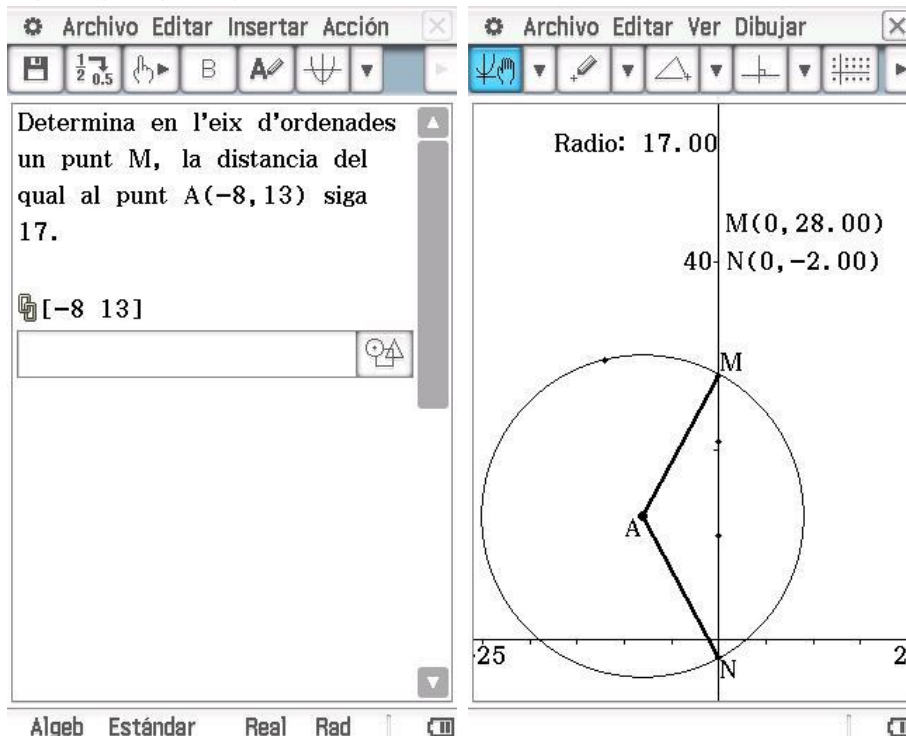
Obrim la finestra geomètrica en la qual s'arrossega el vincle.

Dibuixem una circumferència de centre A.

En el quadre de mesures assignem 17 al radi.

Dibuixem la recta $x = 0$, eix d'ordenades.

Seleccionem la circumferència i la recta. La intersecció són els punts M, N buscats.
M(0, 28), N(0, -2).



Solució analítica:

Insertem una fila de càlcul.

Definim la variables:

$$[-8 \quad 13] \Rightarrow A$$

Calculem les coordenades de A:

$$A[1, 1] \Rightarrow A1.$$

$$A[1, 2] \Rightarrow A2$$

Resolem l'equació tal que la distància del punt A al punt P(0, y) siga 17:

$$\sqrt{A1^2 + (y - A2)^2} = 17$$

$$\text{solve}\left(\sqrt{A1^2 + (y - A2)^2} = 17\right) = 0$$

Las soluciones són $y = -2, 28$.

Els punts buscats són M(0, 28), N(0, -2).

Archivo Editar Insertar Acción ✕

📄 1/2 0.5 🔍 B ✍️ 📐 ▼ ▶

📄 [-8 13] ▲

📄

[-8 13] → A

[-8 13]

coordenades punt A

A[1, 1] → A1

-8

A[1, 2] → A2

13

$\sqrt{A1^2 + (y - A2)^2} = 17$

$\sqrt{y^2 - 26 \cdot y + 233} = 17$

solve($\sqrt{A1^2 + (y - A2)^2} = 17, y$)

{y = -2, y = 28}

□ ▼

Algeb Estándar Real Rad 📄

Problema 17 (94)

Siga el triangle de vèrtexs $A(1, 4)$, $B(3, -9)$ i $C(-5, 2)$.

a) Determina el punt mig M del costat \overline{AC} .

b) Calcula la longitud de la mitjana \overline{BM} .

c) Comprova que $\overline{BM} = \frac{\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}}{2}$.

d) Calcula el baricentre G del triangle $\triangle ABC$.

Obrim una eActivity.



Solució geomètrica:

Insertem tres vincles geomètrics amb els vèrtexs $A(1, 4)$, $B(3, -9)$ i $C(-5, 2)$.

Obrim la finestra geomètrica en la què arrosseguem els tres vincles.

Dibuixem els costats del triangle.

Seleccionem el costat \overline{AC} i dibuixem el punt mig M .

Seleccionem el punt M i amb el quadre de mesures calculem les seues coordenades.

Dibuixem la mitjana \overline{BM} i amb el quadre de mesures calculem la seua longitud.

Seleccionem el costat \overline{BC} i dibuixem el punt mig N .

Dibuixem la mitjana \overline{AN} .

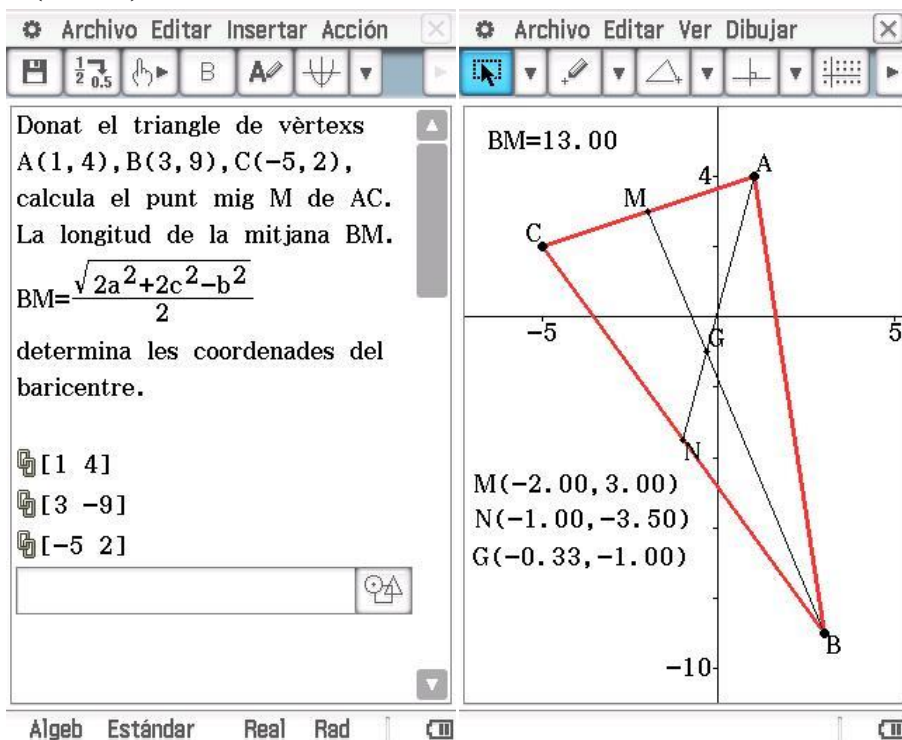
Seleccionem las dos mitjanes i dibuixem la intersecció que es el baricentre G .

Seleccionem el punt G i amb el quadre de mesures calculem les seues coordenades.

$\overline{BM} = 13$.

$M(-2, 3)$.

$G\left(\frac{-1}{3}, -1\right)$.



Solució analítica:

Insertem una fila de càlcul.

Definim les variables:

$$[1 \ 6] \Rightarrow A$$

$$[3 \ -9] \Rightarrow B$$

$$[-5 \ 2] \Rightarrow C.$$

Calculem el punt mig M del segment \overline{AC} :

$$\frac{A+C}{2} \Rightarrow M$$

Calculem la longitud de la mitjana:

$$\text{norm}(M-B)$$

Calculem la mesura dels costats del triangle

$$\text{norm}(C-B) \Rightarrow a$$

$$\text{norm}(C-A) \Rightarrow b$$

$$\text{norm}(B-A) \Rightarrow c$$

Calculem la longitud de la mitjana:

$$\frac{\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}}{2}$$

Calculem les coordenades del baricentre:

$$\frac{A+B+C}{3}$$

The image shows two screenshots of a mathematical software interface. The left window displays the input steps for the problem, and the right window displays the results.

Left Window (Input):

- [1 4] ⇒ A
- [3 -9] ⇒ B
- [-5 2] ⇒ C
- punt mig AC
- $\frac{A+C}{2} \Rightarrow M$
- mitjana BM
- norm(M-B)
- costats de ABC

Right Window (Results):

- costats de ABC
- norm(C-B) ⇒ a: $\sqrt{185}$
- norm(C-A) ⇒ b: $2\sqrt{10}$
- norm(B-A) ⇒ c: $\sqrt{173}$
- calcula la mitjana BM
- $\frac{\sqrt{2 \times a^2 + 2 \times c^2 - b^2}}{2}$: 13
- coordenades del baricentre
- $\frac{A+B+C}{3}$: $[-\frac{1}{3} \ -1]$

Problema 18 (224)

Donades la rectes d'equacions $r \equiv 2x - 3y + 5 = 0$, $s \equiv 3x + 2y - 7 = 0$ costats d'un rectangle i $A(2, -3)$ un dels seus vèrtexs, determina els altres vèrtexs i l'àrea.

Obrim una eActivity.



Solució geomètrica:

Insertem tres vincles geomètrics amb les rectes $2x - 3y + 5 = 0$, $3x + 2y - 7 = 0$ i el vèrtex $A(2, -3)$.

Obrim la finestra geomètrica en la què arrosseguem els tres vincles.

Seleccionem las dos rectes. La intersecció es el vèrtex C.

Seleccionem el vèrtex A i la recta r. Dibuixem la recta p perpendicular a la recta r que passa por A.

Seleccionem las rectes r i p. La intersecció es el vèrtex B.

Seleccionem el punt B i amb el quadre de mesures determinem les seues coordenades.

Seleccionem el vèrtex A i la recta s. Dibuixem la recta q perpendicular a la recta r que passa por A.

Seleccionem las rectes s i q. La intersecció es el vèrtex D.

Seleccionem el punt D i amb el quadre de mesures determinem les seues coordenades.

Amb l'opció segment, dibuixem el rectangle ABCD.

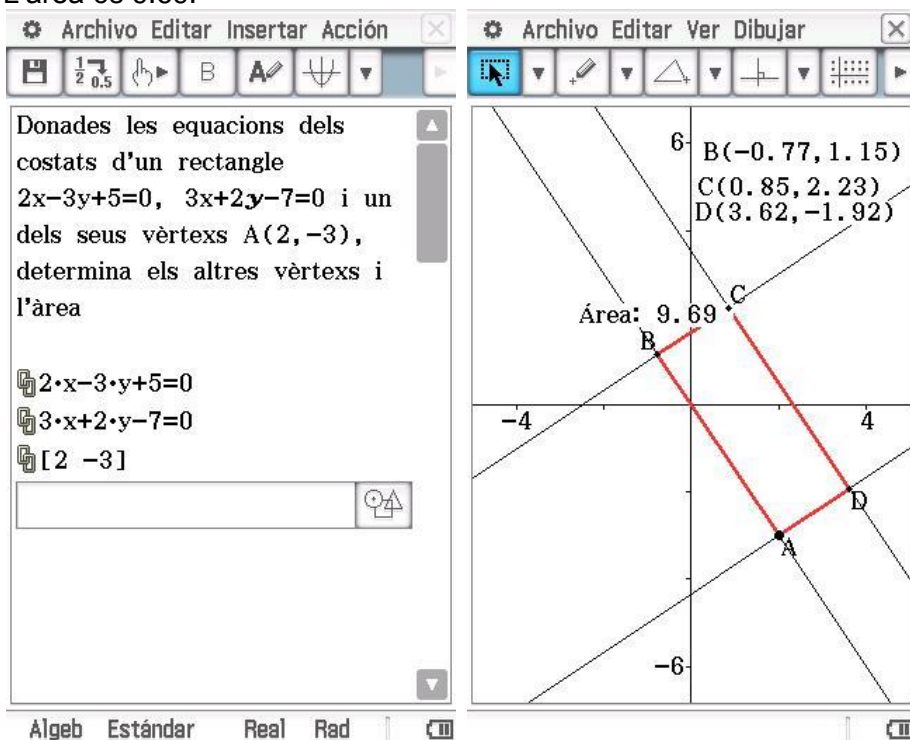
Seleccionem els 4 costats i amb el quadre de mesures determinem l'àrea.

$B(-0.77, 1.15)$.

$C(0.85, 2.23)$.

$D(3.62, -1.92)$.

L'àrea és 9.69.



Solució analítica:

Observem que les rectes r i s són perpendiculars.

Insertem una fila de càlcul.

Per calcular les coordenades del vèrtex C resollem el sistema format per les rectes r i s:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 5 = 0 \\ 3x + 2y - 7 = 0 \end{cases} x, y$$

$$C\left(\frac{-10}{13}, \frac{15}{13}\right)$$

La recta p perpendicular a r que passa per A té equació:

$$y = \frac{-3}{2}(x - 2) - 3.$$

El vèrtex B és la intersecció de r i p:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 5 = 0 \\ y = \frac{-3}{2}(x - 2) - 3 \end{cases} x, y$$

$$B\left(\frac{-10}{13}, \frac{15}{13}\right)$$

La recta q perpendicular a s que passa per A té equació:

$$y = \frac{2}{3}(x - 2) - 3.$$

El vèrtex D és la intersecció de s i q:

$$\begin{cases} 3x + 2y - 7 = 0 \\ y = \frac{2}{3}(x - 2) - 3 \end{cases} x, y$$

$$D\left(\frac{47}{13}, \frac{-25}{13}\right)$$

Definim les variables

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow A$$

$$\begin{bmatrix} -10 & 15 \\ 13 & 13 \end{bmatrix} \Rightarrow B$$

$$\begin{bmatrix} 11 & 29 \\ 13 & 13 \end{bmatrix} \Rightarrow C$$

$$\begin{bmatrix} 47 & -25 \\ 13 & -25 \end{bmatrix} \Rightarrow D$$

Calculem la mesura del costat \overline{AB} :

$$\text{norm}(B - A) \Rightarrow a.$$

Calculem la mesura del costat \overline{BC} :

$$\text{norm}(B - C) \Rightarrow b.$$

Calculem l'àrea del rectangle ABCD:

$$a \cdot b = \frac{126}{13}.$$

Archivo Editar Insertar Acción

vèrtex C, intersecció r, s

$$\begin{cases} 2x-3y+5=0 \\ 3x+2y-7=0 \end{cases} \quad x, y$$

$$\left\{ x = \frac{11}{13}, y = \frac{29}{13} \right\}$$

recta p perpendicular a r que passa per A

$$y = \frac{-3}{2}(x-2) - 3$$

$$y = \frac{-3 \cdot (x-2)}{2} - 3$$

recta q perpendicular a s que passa per A

$$y = \frac{2}{3}(x-2) - 3$$

2 · (x-2)

Archivo Editar Insertar Acción

$$y = \frac{2 \cdot (x-2)}{3} - 3$$

punt B intersec r, p

$$\begin{cases} 2x-3y+5=0 \\ y = \frac{-3}{2}(x-2) - 3 \end{cases} \quad x, y$$

$$\left\{ x = -\frac{10}{13}, y = \frac{15}{13} \right\}$$

punt D intersec s, q

$$\begin{cases} 3x+2y-7=0 \\ y = \frac{2}{3}(x-2) - 3 \end{cases} \quad x, y$$

$$\left\{ x = \frac{47}{13}, y = -\frac{25}{13} \right\}$$

[2 -3] ⇒ A

[2 -3]

[-10 15]

Algeb Estándar Real Rad

Archivo Editar Insertar Acción

$$\left[\frac{-10}{13} \quad \frac{15}{13} \right] \Rightarrow B$$

$$\left[\frac{-10}{13} \quad \frac{15}{13} \right]$$

$$\left[\frac{11}{13} \quad \frac{29}{13} \right] \Rightarrow C$$

$$\left[\frac{11}{13} \quad \frac{29}{13} \right]$$

$$\left[\frac{47}{13} \quad \frac{-25}{13} \right] \Rightarrow D$$

$$\left[\frac{47}{13} \quad \frac{-25}{13} \right]$$

norm(B-A) ⇒ a

$$\frac{18 \cdot \sqrt{13}}{13}$$

norm(B-C) ⇒ b

$$7 \cdot \sqrt{13}$$

Algeb Estándar Real Rad

Archivo Editar Insertar Acción

$$\left[\frac{47}{13} \quad \frac{-25}{13} \right] \Rightarrow D$$

$$\left[\frac{47}{13} \quad \frac{-25}{13} \right]$$

norm(B-A) ⇒ a

$$\frac{18 \cdot \sqrt{13}}{13}$$

norm(B-C) ⇒ b

$$\frac{7 \cdot \sqrt{13}}{13}$$

àrea ABCD

a × b

$$\frac{126}{13}$$

□

Algeb Estándar Real Rad

Algeb Estándar Real Rad

Problema 19 (64)

Donats els vèrtexs adjacents $A(3, -7)$, $B(-1, 4)$ del quadrat ABCD, calcula l'àrea i els altres vèrtexs.

Obrim una eActivity.



Solució geomètrica:

Insertem dos vincles geomètrics amb els vèrtexs $A(3, -7)$, $B(-1, 4)$.

Obrim la finestra geomètrica en la què arrosseguem els dos vincles.

Dibuixem el segment \overline{AB} .

Seleccionem el segment \overline{AB} i el punt A. Dibuixem la recta p perpendicular al segment \overline{AB} que passa per A.

Dibuixem la circumferència de centre A que passa per B.

Seleccionem la recta p i la circumferència. L'intersecció és el vèrtex D.

Seleccionem el punt D i amb el quadre de mesures calculem les seues coordenades:

Seleccionem el segment \overline{AB} i el punt B. Dibuixem la recta q perpendicular al segment \overline{AB} que passa per B.

Seleccionem la recta p i el punt D. Dibuixem la recta t perpendicular a la recta p que passa per D.

Seleccionem la recta q i la recta t. La intersecció és el vèrtex C.

Seleccionem el punt C i amb el quadre de mesures calculem les seues coordenades:

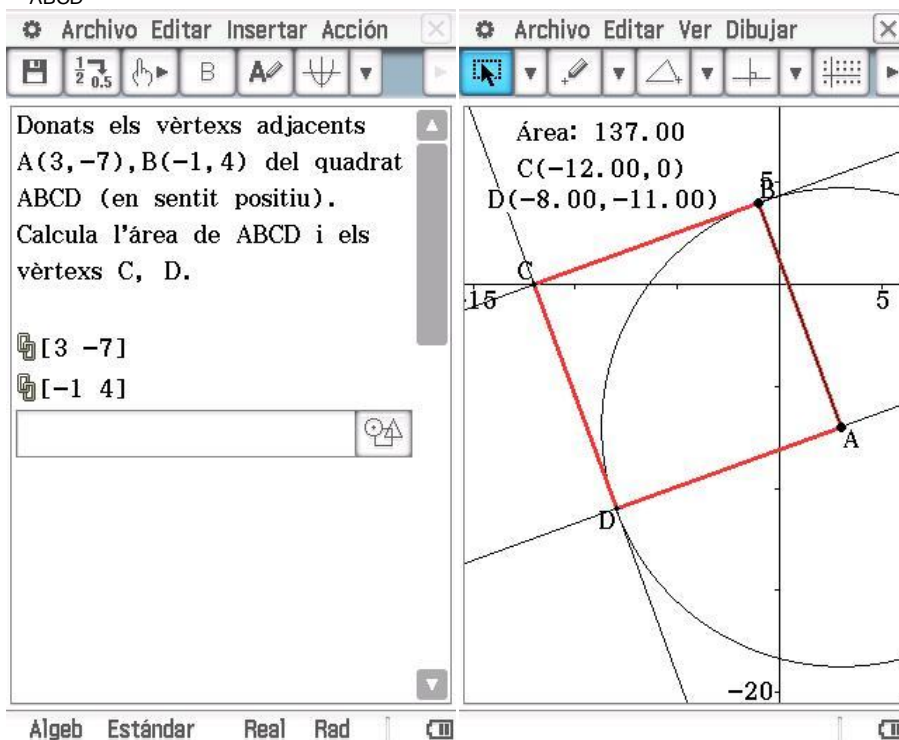
Amb l'opció segment, dibuixem el quadrat ABCD.

Seleccionem el quadrat i amb el quadre de mesures calculem la seua àrea:

$C(-12, 0)$.

$D(-8, -11)$.

$S_{ABCD} = 137$.



Solució analítica:

Insertem una fila de càlcul.

Definim les variables:

$$\begin{bmatrix} 3 & -7 \end{bmatrix} \Rightarrow A$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow B$$

Calculemos el vector \overline{AB} :

$$B - A \Rightarrow \overline{AB}$$

Calculemos los componentes del vector \overline{AB} :

$$AB[1, 1] \Rightarrow AB_1.$$

$$AB[1, 2] \Rightarrow AB_2.$$

Las coordenadas de D son:

$$A + \begin{bmatrix} -AB_2 & AB_1 \end{bmatrix}.$$

Las coordenadas de C son:

$$B + \begin{bmatrix} -AB_2 & AB_1 \end{bmatrix}$$

El área de cuadrado es:

$$\text{norm}(\overline{AB})^2$$

The image shows two screenshots of a calculator interface, likely a TI-84 Plus, used to solve a geometry problem. The calculator is in the 'Algeb' (Algebra) mode. The left screenshot shows the initial steps: defining vectors A and B, calculating the vector AB, and determining its components AB1 and AB2. The right screenshot shows the calculation of the coordinates for points D and C, and the final calculation of the area of the square as the norm squared of vector AB.

Operation	Result
$\begin{bmatrix} 3 & -7 \end{bmatrix} \Rightarrow A$	$\begin{bmatrix} 3 & -7 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} -1 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow B$	$\begin{bmatrix} -1 & 4 \end{bmatrix}$
$B - A \Rightarrow \overline{AB}$	$\begin{bmatrix} -4 & 11 \end{bmatrix}$
componentes AB	
$AB[1, 1] \Rightarrow AB_1$	-4
$AB[1, 2] \Rightarrow AB_2$	11
coordenadas D	
$A + \begin{bmatrix} -AB_2 & AB_1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -8 & -11 \end{bmatrix}$
coordenadas C	
$B + \begin{bmatrix} -AB_2 & AB_1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -12 & 0 \end{bmatrix}$
Area ABCD	
$\text{norm}(\overline{AB})^2$	137

Problema 20 (92)

Donats els vèrtexs $A(-3, 5)$, $B(1, 7)$ del paral·lelogram ABCD i $M(1, 1)$ la intersecció de les diagonals, calcula els vèrtexs C i D. ABCD és un rectangle?

Obrim una eActivity.



Solució geomètrica:

Insertem tres vincles geomètrics amb els vèrtexs $A(-3, 5)$, $B(1, 7)$ i del centre $M(1, 1)$ del paral·lelogram ABCD.

Obrim la finestra geomètrica en la què arrosseguem els tres vincles.

El vèrtex C és el punt simètric de A respecte del centre M. Dibuixem el gir de 180° del punt A amb centre M.

El vèrtex D és el punt simètric de B respecte del centre M. Dibuixem el gir de 180° del punt B amb centre M.

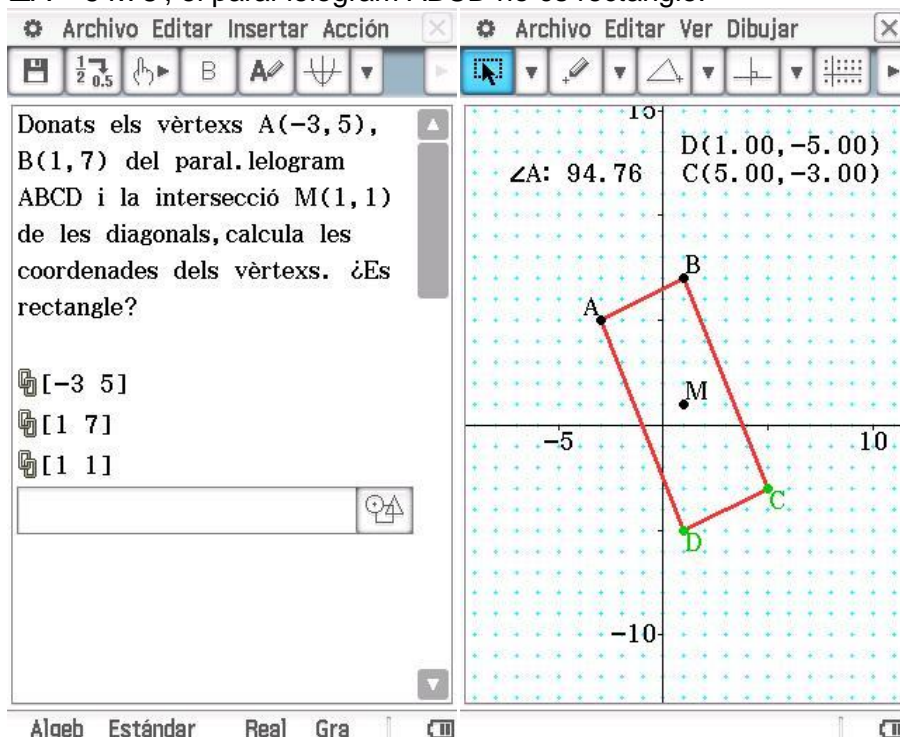
Amb l'opció segment, dibuixem el paral·lelogram ABCD.

Seleccionem els costats \overline{AB} , \overline{AD} i amb el quadre de mesures calculem la mesura de l'angle A.

$C(5, -3)$

$D(1, -5)$

$\angle A = 94.76$, el paral·lelogram ABCD no és rectangle.



Solució analítica:

Insertem una fila de càlcul.

Definim les variables:

$$[-3 \ 5] \Rightarrow A$$

$$[1 \ 7] \Rightarrow B$$

$$[1 \ 1] \Rightarrow M.$$

Calculem el vector \overrightarrow{AM} .

$$M - A \Rightarrow \overrightarrow{AM}.$$

Les coordenades de C són:

$$M + AM \Rightarrow C$$

Calculem el vector \overrightarrow{BM} .

$$M - B \Rightarrow BM.$$

Les coordenades de D són:

$$M + BM \Rightarrow D$$

Calculem els vectors \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AD} .

$$B - A \Rightarrow AB$$

$$D - A \Rightarrow AD$$

Calculem el producte escalar dels vectors \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AD} .

$$\text{dotP}(AB, AD) = -4.$$

El paral·lelogram no és rectangle ja que el producte escalar no és nul.

Calculem l'angle A:

$$\text{angle}(AB, AD) = 94.76364169.$$

The image shows two screenshots of a graphing calculator interface, likely TI-84 Plus, with the 'Algeb' (Algebra) mode selected. The calculator has a menu bar with 'Archivo', 'Editar', 'Insertar', and 'Acción'. The left screenshot shows the following steps and results:

- $[-3 \ 5] \Rightarrow A$
- $[1 \ 7] \Rightarrow B$
- $[1 \ 1] \Rightarrow M$
- calcula vector AM
- $M - A \Rightarrow AM$
- calcula coordenades C
- $M + AM \Rightarrow C$
- calcula vector BM
- $M - B \Rightarrow BM$

The right screenshot shows the following steps and results:

- calcula coordenades D
- $M + BM \Rightarrow D$
- $[1 \ -5]$
- calcula angle A
- calcula vectors AB, AD
- $B - A \Rightarrow AB$
- $[4 \ 2]$
- $D - A \Rightarrow AD$
- $[4 \ -10]$
- calcula el producte escalar de AB y AD
- $\text{dotP}(AB, AD)$
- -4
- calcula angle A
- $\text{angle}(AB, AD)$
- 94.76364169

Problema 21

Determina la recta que passa pel punt intersecció de les rectes $r \equiv 2x + 3y - 7 = 0$, $s \equiv x + y - 3 = 0$ i pel punt $A(8, 2)$.

Obrim una eActivity.



Solució geomètrica:

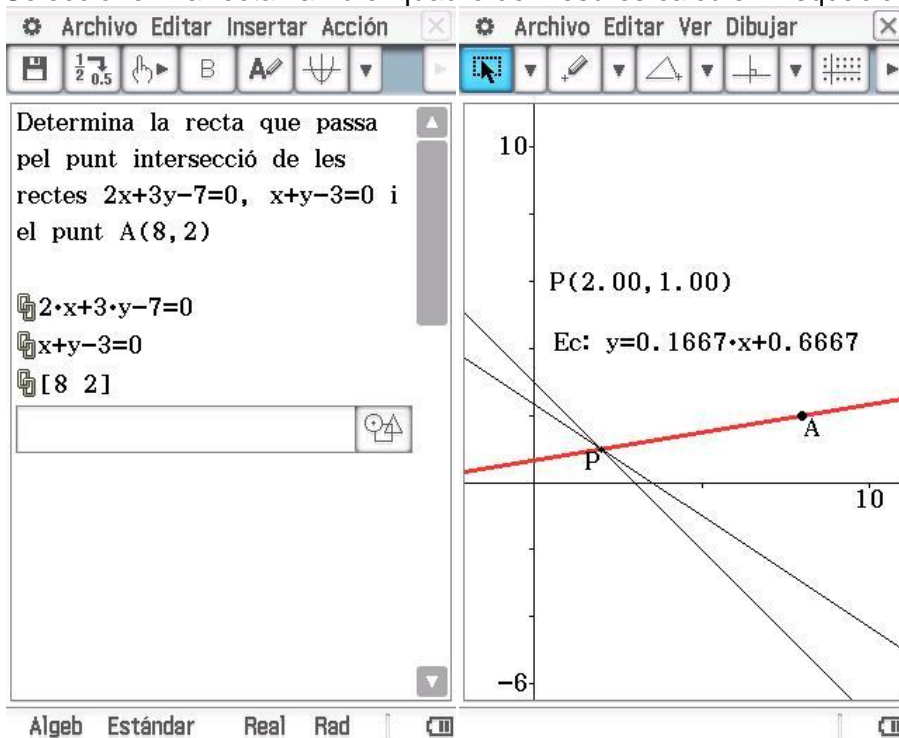
Insertem tres vincles geomètrics amb les rectes $2x + 3y - 7 = 0$, $x + y - 3 = 0$ i el punt $A(8, 2)$.

Obrim la finestra geomètrica en la què arrosseguem els tres vincles.

Seleccionem les dues rectes. La intersecció és el vèrtex P.

Dibuixem la recta que passa per A i per P.

Seleccionem la recta i amb el quadre de mesures calculem l'equació de la recta.



Solució analítica:

Insertem una fila de càlcul.

Resolem el sistema format per les equacions de les dos rectes:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 7 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases} \mid x, y$$

$$P(2, 1)$$

Definim les variables:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow P$$

$$\begin{bmatrix} 8 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A$$

Calculem les coordenades de A:

$$A[1, 1] \Rightarrow A1.$$

$$A[1, 2] \Rightarrow A2.$$

Calculem el vector PA

$$A - P \Rightarrow PA$$

Calculem el pendent de la recta PA:

$$\frac{PA[1,2]}{PA[1,1]} \Rightarrow m$$

Calculem l'equació de la recta PA:

$$y = m(x - A1) + A2$$

$$y = \frac{x-8}{6} + 2.$$

The image shows two screenshots of a TI-84 Plus calculator interface, illustrating the steps to find the equation of a line PA.

Left Screenshot:

- Menu: Archivo Editar Insertar Acción
- Buttons: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{0.5}$, \rightarrow , B, A, \cup , ∇
- Text: "calcula el punt intersecció de les rectes"
- Equation:
$$\begin{cases} 2x+3y-7=0 \\ x+y-3=0 \end{cases} \quad x, y$$
- Result: $\{x=2, y=1\}$
- Text: "[2 1] \rightarrow P"
- Text: "[8 2] \rightarrow A"
- Text: "calcula coordenades A"
- Text: "A[1,1] \rightarrow A1" (Result: 8)
- Text: "A[1,2] \rightarrow A2" (Result: 2)
- Text: "calcula vector PA"
- Text: "A-P \rightarrow PA" (Result: [6 1])
- Text: "calcula pendent recta PA"
- Equation:
$$\frac{PA[1,2]}{PA[1,1]} \Rightarrow m$$
 (Result: $\frac{1}{6}$)
- Text: "equació recta PA"
- Equation:
$$y = m \times (x - A1) + A2$$
- Equation:
$$y = \frac{x-8}{6} + 2$$
- Bottom: Algeb Estándar Real Rad \square

Right Screenshot:

- Menu: Archivo Editar Insertar Acción
- Buttons: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{0.5}$, \rightarrow , B, A, \cup , ∇
- Text: "calcula el punt intersecció de les rectes"
- Equation:
$$\begin{cases} 2x+3y-7=0 \\ x+y-3=0 \end{cases} \quad x, y$$
- Result: $\{x=2, y=1\}$
- Text: "calcula vector PA"
- Text: "A-P \rightarrow PA" (Result: [6 1])
- Text: "calcula pendent recta PA"
- Equation:
$$\frac{PA[1,2]}{PA[1,1]} \Rightarrow m$$
 (Result: $\frac{1}{6}$)
- Text: "equació recta PA"
- Equation:
$$y = m \times (x - A1) + A2$$
- Equation:
$$y = \frac{x-8}{6} + 2$$
- Bottom: Algeb Estándar Real Rad \square

Problema 22

Calcula l'àrea del pentàgon de vèrtexs $A(-5, -2)$, $B(-2, 5)$, $C(2, 7)$, $D(5, 1)$, $E(2, -4)$.

Obrim una eActivity.



Solució geomètrica:

Insertem cinc vincles geomètrics amb els vèrtexs $A(-5, -2)$, $B(-2, 5)$, $C(2, 7)$, $D(5, 1)$, $E(2, -4)$.

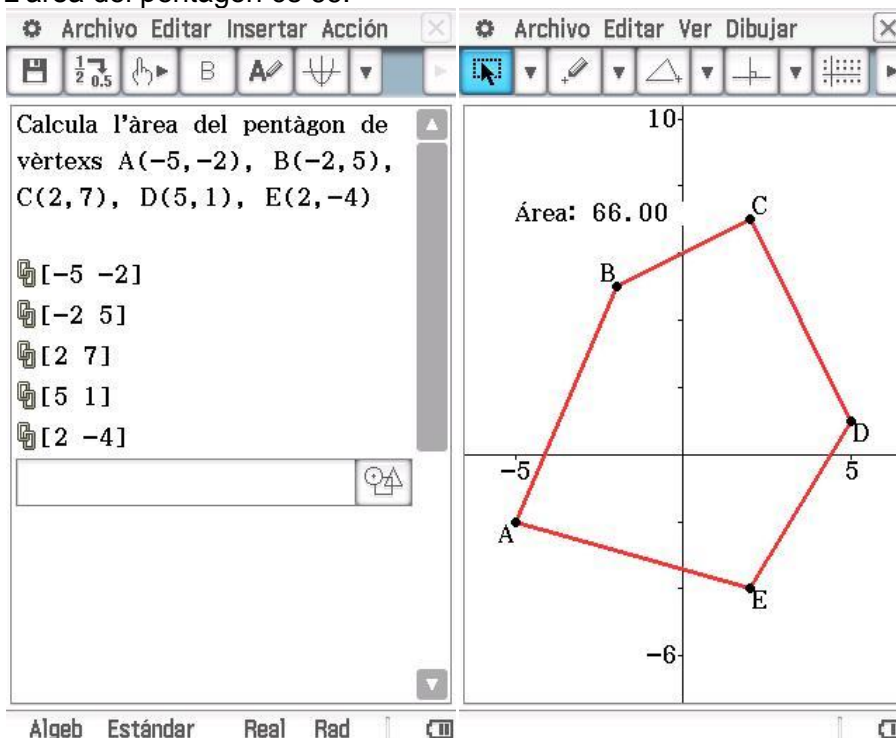
Obrim la finestra geomètrica en la què arrosseguem els cinc vincles.

Amb l'opció segment, dibuixem el pentàgon ABCDE.

Seleccionem els costats del pentàgon ABCDE.

Amb el quadre de mesures calculem l'àrea del pentàgon.

L'àrea del pentàgon és 66.



Solució analítica:

Insertem una fila de càlcul.

El pentàgon ABCDE és convex.

$$S_{ABCDE} = S_{ABC} + S_{ACD} + S_{ADE}$$

$$S_{ABCDE} = \frac{1}{2} \left(\left| \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{pmatrix} \right| + \left| \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \\ d_1 & d_2 & 1 \end{pmatrix} \right| + \left| \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ d_1 & d_2 & 1 \\ e_1 & e_2 & 1 \end{pmatrix} \right| \right)$$

Archivo Editar Insertar Acción

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{0.5}$

B A

[-5 -2]
 [-2 5]
 [2 7]
 [5 1]
 [2 -4]

El pentàgon és convex
 L'àrea és la suma de les àrees dels triangles ABC, ACD, ADE

$$\frac{1}{2} \left(\left| \det \begin{pmatrix} -5 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & 1 \end{pmatrix} \right| + \left| \det \begin{pmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & 1 \end{pmatrix} \right| \right)$$

66

□

Algeb Estàndar Real Rad

Problema 23

Comprova que els punts migs dels costats del quadrilàter de vèrtexs $A(-2, 6)$, $B(4, 4)$, $C(6, -6)$, $D(2, -8)$ formen un quadrilàter de perímetre igual a la suma de les diagonals del quadrilàter ABCD.

Obrim una eActivity



Solució geomètrica:

Insertem quatre vincles geomètrics amb els vèrtexs $A(-2, 6)$, $B(4, 4)$, $C(6, -6)$, $D(2, -8)$.

Obrim la finestra geomètrica en la què arrosseguem els quatre vincles.

Amb l'opció segment, dibuixem el quadrilàter ABCD.

Seleccionem cada costat i dibuixem els punts migs dels costats K, L, M, N.

Amb l'opció segment, dibuixem el quadrilàter KLMN.

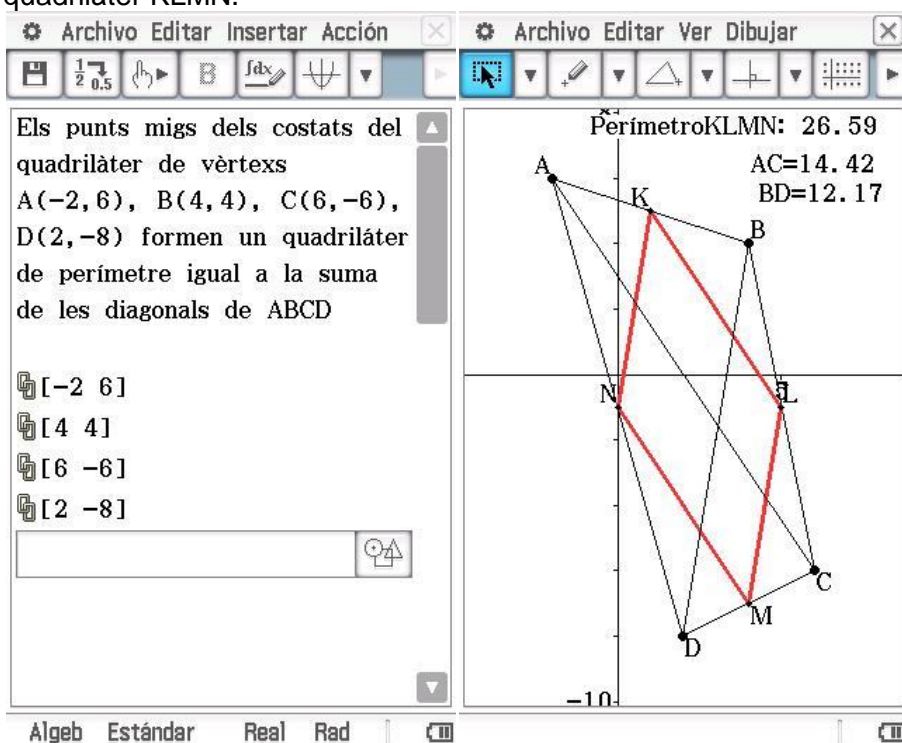
Seleccionem els costats del quadrilàter KLMN.

Amb el quadre de mesures calculem el perímetre del quadrilàter KLMN.

Dibuixem els segments \overline{AC} , \overline{BD} .

Seleccionem cadascun dels segments i amb el quadre de mesures calculem la longitud de cada segment.

Observem que la suma de la longitud de les diagonals és igual al perímetre del quadrilàter KLMN.



Solució analítica:

Insertem una fila de càlcul.

Definim les variables:

$$[-2 \ 6] \Rightarrow A$$

$$[4 \ 4] \Rightarrow B$$

$$[6 \ -6] \Rightarrow C$$

$$[2 \ -8] \Rightarrow D$$

Calculem els punts migs dels costats del quadrilàter ABCD:

$$\frac{A+B}{2} \Rightarrow K$$

$$\frac{B+C}{2} \Rightarrow L$$

$$\frac{C+D}{2} \Rightarrow M$$

$$\frac{A+D}{2} \Rightarrow N.$$

Calculem el perímetre del quadrilàter KLMN:
 $\text{norm}(L-K) + \text{norm}(M-L) + \text{norm}(N-M) + \text{norm}(N-K).$

El perímetre es $2\sqrt{37} + 4\sqrt{13}.$

Calculem la suma de les longituds de les diagonals de ABCD:
 $\text{norm}(C-A) + \text{norm}(D-B).$

La suma de les longituds de les diagonals és $2\sqrt{37} + 4\sqrt{13}.$

El resultat és vàlid per a qualsevol quadrilàter ABCD ja que:

KL és paral·lela mitjana del triangle $\triangle ABC.$

MN és paral·lela mitjana del triangle $\triangle ACD.$

Per tant, $\overline{KL} = \overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{AC}.$

Anàlogament, $\overline{LM} = \overline{NK} = \frac{1}{2}\overline{BD}.$

$\overline{KL} + \overline{MN} = \overline{AC}, \overline{LM} + \overline{NK} = \overline{BD}.$

Archivo Editar Insertar Acción

[-2 6] ⇒ A [-2 6]

[4 4] ⇒ B [4 4]

[6 -6] ⇒ C [6 -6]

[2 -8] ⇒ D [2 -8]

punts migs dels costats

$\frac{A+B}{2}$ ⇒ K [1 5]

$\frac{B+C}{2}$ ⇒ L

Algeb Estándar Real Rad

Archivo Editar Insertar Acción

$\frac{B+C}{2}$ ⇒ L [5 -1]

$\frac{C+D}{2}$ ⇒ M [4 -7]

$\frac{A+D}{2}$ ⇒ N [0 -1]

Perímetre KLMN

$\text{norm}(L-K) + \text{norm}(M-L) + \text{norm}(N-M) + \text{norm}(N-K)$

$2 \cdot \sqrt{37} + 4 \cdot \sqrt{13}$

suma de diagonals AC+BD

$\text{norm}(C-A) + \text{norm}(D-B)$

$2 \cdot \sqrt{37} + 4 \cdot \sqrt{13}$

Algeb Estándar Real Rad

Problema 24

Calcula els angles del triangle de vèrtexs $A(4, 2)$, $B(0, 1)$, $C(6, -1)$.

Obrim una eActivity.



Solució geomètrica:

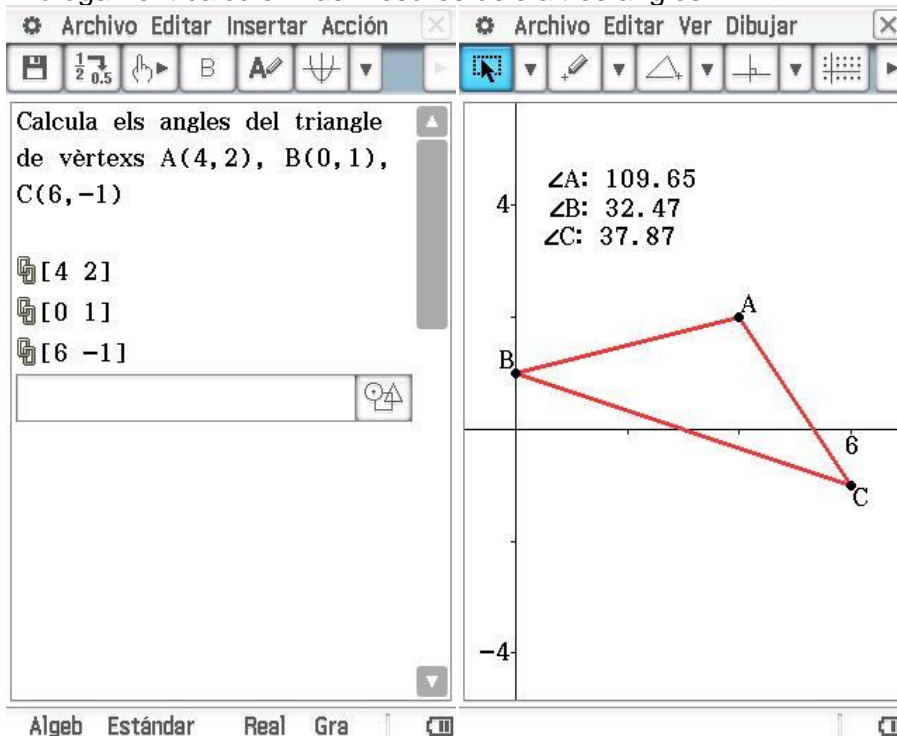
Insertem tres vincles geomètrics amb els vèrtexs $A(4, 2)$, $B(0, 1)$, $C(6, -1)$.

Obrim la finestra geomètrica en la què arrosseguem els tres vincles.

Dibuixem els costats del triangle.

Seleccionem els costats \overline{AB} , \overline{AC} i amb el quadre de mesures calculem l'angle A.

Anàlogament calculem les mesures dels altres angles.



Solució analítica:

Calculem cadascun dels angles per tres mètodes diferents.

Insertem una fila de càlcul.

Definim les variables:

$$[4 \ 2] \Rightarrow A$$

$$[0 \ 1] \Rightarrow B$$

$$[6 \ -1] \Rightarrow C$$

Per calcular l'angle A utilitzem la funció $\text{angle}()$:

$$\text{angle}(B - A, C - A).$$

$$A = 109.6538241^\circ$$

$$\text{Per calcular l'angle B utilitzem } \cos B = \frac{b^2 - a^2 - c^2}{-2ac}.$$

Calculem les mesures dels costats del triangle:

$$\text{norm}(C - B) \Rightarrow a$$

$$\text{norm}(C - A) \Rightarrow b$$

$$\text{norm}(B - A) \Rightarrow c$$

$$\cos^{-1}\left(\frac{b^2 - a^2 - c^2}{-2 \cdot a \cdot c}\right).$$

$$B = 32.47119229^\circ.$$

Per calcular l'angle C utilitzem el producte escalar dels vectors que el formen

$$\cos C = \frac{\vec{CA} \cdot \vec{CB}}{a \cdot c} :$$

$$\cos^{-1}\left(\frac{\text{dotP}(A-C, B-C)}{a \cdot c}\right).$$

$$C = 37.87498365^\circ.$$

tres formes per calcular els angles

[4 2] → A

[0 1] → B

[6 -1] → C

angle A

angle(B-A, C-A) 109.6538241

angle B

norm(B-C) → a 2·√10

norm(C-A) → b

Algeb Estándar Real Gra

109.6538241

angle B

norm(B-C) → a 2·√10

norm(C-A) → b √13

norm(B-A) → c √17

$\cos^{-1}\left(\frac{b^2 - a^2 - c^2}{-2 \cdot a \cdot c}\right)$ 32.47119229

angle C

$\cos^{-1}\left(\frac{\text{dotP}(A-C, B-C)}{a \cdot b}\right)$ 37.87498365

Algeb Estándar Real Gra

Problema 25

Calcula els vèrtexs del triangle $\triangle ABC$ coneguts els punts migs $A'(-2, 1)$, $B'(5, 2)$, $C'(2, -3)$ dels costats a , b i c , respectivament.

Obrim una eActivity.



Solució geomètrica:

Insertem tres vincles geomètrics amb els punts migs $A'(-2, 1)$, $B'(5, 2)$, $C'(2, -3)$.

Obrim la finestra geomètrica en la què arrosseguem els tres vincles.

Dibuixem els costats del triangle $\triangle A'B'C'$.

Seleccionem $\overline{B'C'}$ i el punt A' . Dibuixem la recta paral·lela BC al segment $\overline{B'C'}$ que passa pel punt A'

Seleccionem $\overline{A'C'}$ i el punt B' . Dibuixem la recta paral·lela AC al segment $\overline{A'C'}$ que passa pel punt B'

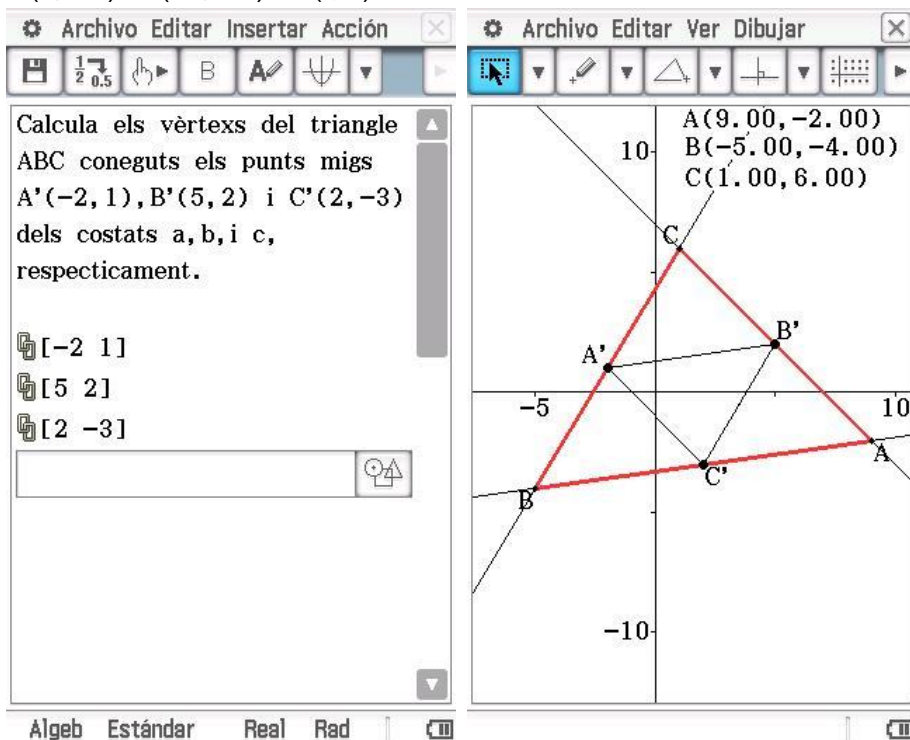
Seleccionem $\overline{A'B'}$ i el punt C' . Dibuixem la recta paral·lela AB al segment $\overline{A'B'}$ que passa pel punt C'

Con la intersecció, dos a dos, de les tres rectes determinem els vèrtexs del triangle

$\triangle ABC$

Seleccionem cada vèrtex i amb el quadre de mesures calculem les coordenades:

$A(9, -2)$, $B(-5, -4)$, $C(1, 6)$.



Solució analítica:

Insertem una fila de càlcul.

Definim les variables punts migs dels costats:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow Aa$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow Bb$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow Cc$$

Para determinar el vèrtex A apliquem $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{A'C'}$:

$$Ba + Ca - Aa$$

$$A(9, -2).$$

Anàlogament:

El vèrtex B és:

$$Aa + Ca - Ba$$

$$B(-5, -4).$$

El vèrtex C és:

$$Aa + Ba - Ca$$

$$C(1, 6).$$

The image shows two screenshots of a TI-84 Plus calculator interface, likely a TI-84 Plus CE, used for vector calculations. The calculator is in the 'Algeb' (Algebra) mode.

Left Screenshot:

- Menu: Archivo, Editar, Insertar, Acción
- Buttons: Save, 1/2, 0.5, Home, B, A, U, V, Down arrow, Right arrow
- Input: defineix els punts migs A', B', C'
- Input: [-2 1] → Aa
- Input: [5 2] → Bb
- Input: [2 -3] → Cc
- Input: El vèrtex A és Bb+Cc-Aa
- Input: El vèrtex B és Aa+Cc-Bb
- Input: [-5 -4]
- Mode: Algeb, Estándar, Real, Rad

Right Screenshot:

- Menu: Archivo, Editar, Insertar, Acción
- Buttons: Save, 1/2, 0.5, Home, B, A, U, V, Down arrow, Right arrow
- Input: [5 2] → Bb
- Input: [2 -3] → Cc
- Input: El vèrtex A és Bb+Cc-Aa
- Input: El vèrtex B és Aa+Cc-Bb
- Input: El vèrtex C és Aa+Bb-Cc
- Input: [1 6]
- Mode: Algeb, Estándar, Real, Rad

Problema 26

PROPIETAT DEL BARICENTRE D'UN TRIANGLE

Siga el triangle de vèrtexs $A(-3, 4)$, $B(2, 5)$ i $C(1, 0)$.

Siga la recta $r \equiv 3x + 4y + 12 = 0$ exterior al triangle.

a) Calcula les coordenades del baricentre G del triangle $\triangle ABC$.

b) Comprova que $d(G, r) = \frac{1}{3}(d(A, r) + d(B, r) + d(C, r))$.

Obrim una eActivity



Solució geomètrica:

Insertem quatre vincles geomètrics amb els vèrtexs $A(-3, 4)$, $B(2, 5)$ i $C(1, 0)$, i la recta $3x + 4y + 12 = 0$.

Obrim la finestra geomètrica en la què arrosseguem els quatre vincles.

Observem que la recta és exterior al triangle.

Amb l'opció segment dibuixem el triangle $\triangle ABC$.

Seleccionem el costat \overline{BC} i calculem el punt mig D .

Seleccionem el costat \overline{AC} i calculem el punt mig E .

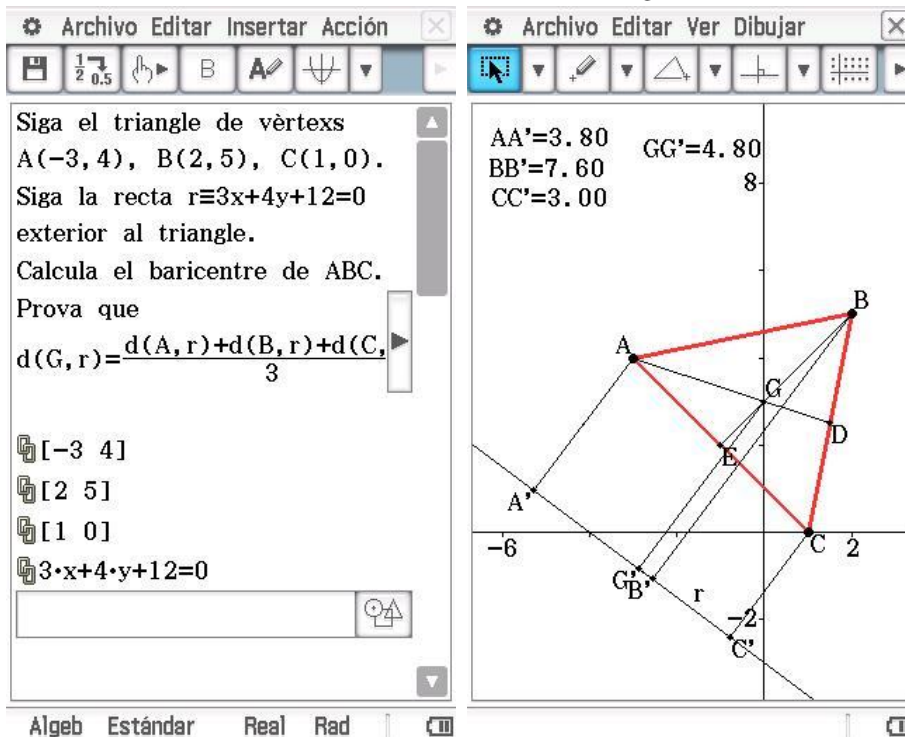
Dibuixem les mitjanes \overline{AD} i \overline{BE} .

Seleccionem les mitjanes \overline{AD} i \overline{BE} calculem la intersecció G , baricentre del triangle.

Seleccionem la recta i el punt G . Amb el quadre de mesures calculem la distància entre els dos objectes.

Anàlogament, calculem la distància dels vèrtexs del triangle a la recta.

Observem que es compleix la propietat $d(G, r) = \frac{1}{3}(d(A, r) + d(B, r) + d(C, r))$.



Solució analítica:

Insertem una fila de càlcul.

Definim les variables vèrtexs del triangle:

$$[-3 \ 4] \Rightarrow A$$

$$[2 \ 5] \Rightarrow B$$

$$[1 \ 0] \Rightarrow C$$

Calculem el baricentre G

$$\frac{A + B + C}{3}$$

$$G(0, 3).$$

Calculem la distància de G a r:

$$\frac{|3x + 4y + 12|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \mid x = 0 \text{ and } y = 3 \Rightarrow Gr$$

$$d(G, r) = \frac{24}{5}$$

Calculem la distància de A a r:

$$\frac{|3x + 4y + 12|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \mid x = -3 \text{ and } y = 4 \Rightarrow Ar$$

$$d(A, r) = \frac{19}{5}$$

Calculem la distància de B a r:

$$\frac{|3x + 4y + 12|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \mid x = 2 \text{ and } y = 5 \Rightarrow Br$$

$$d(B, r) = \frac{8}{5}$$

Calculem la distància de C a r:

$$\frac{|3x + 4y + 12|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \mid x = 1 \text{ and } y = 0 \Rightarrow Cr$$

$$d(C, r) = 3$$

Calculem:

$$\frac{Ar + Br + Cr}{3} = \frac{24}{5}$$

Archivo Editar Insertar Acción

defineix els vèrtexs

$[-3 \ 4] \Rightarrow A$

$[2 \ 5] \Rightarrow B$

$[1 \ 0] \Rightarrow C$

calcula baricentre

$$\frac{A+B+C}{3}$$

$[0 \ 3]$

$d(G, r)$

$$\frac{|3x+4y+12|}{\sqrt{3^2+4^2}} \mid x=0 \text{ and } y=3 \Rightarrow Gr$$

24

Algeb Estándar Real Rad

Archivo Editar Insertar Acción

$$\frac{|3x+4y+12|}{\sqrt{3^2+4^2}} \mid x=0 \text{ and } y=3 \Rightarrow Gr$$

$\frac{24}{5}$

$d(A, r)$

$$\frac{|3x+4y+12|}{\sqrt{3^2+4^2}} \mid x=-3 \text{ and } y=4 \Rightarrow$$

$\frac{19}{5}$

$d(B, r)$

$$\frac{|3x+4y+12|}{\sqrt{3^2+4^2}} \mid x=2 \text{ and } y=5 \Rightarrow Br$$

$\frac{38}{5}$

$d(C, r)$

$$\frac{|3x+4y+12|}{\sqrt{3^2+4^2}} \mid x=1 \text{ and } y=0 \Rightarrow Cr$$

Algeb Estándar Real Rad

Archivo Editar Insertar Acción

$\frac{38}{5}$

$d(B, r)$

$$\frac{|3x+4y+12|}{\sqrt{3^2+4^2}} \mid x=2 \text{ and } y=5 \Rightarrow Br$$

$\frac{38}{5}$

$d(C, r)$

$$\frac{|3x+4y+12|}{\sqrt{3^2+4^2}} \mid x=1 \text{ and } y=0 \Rightarrow Cr$$

3

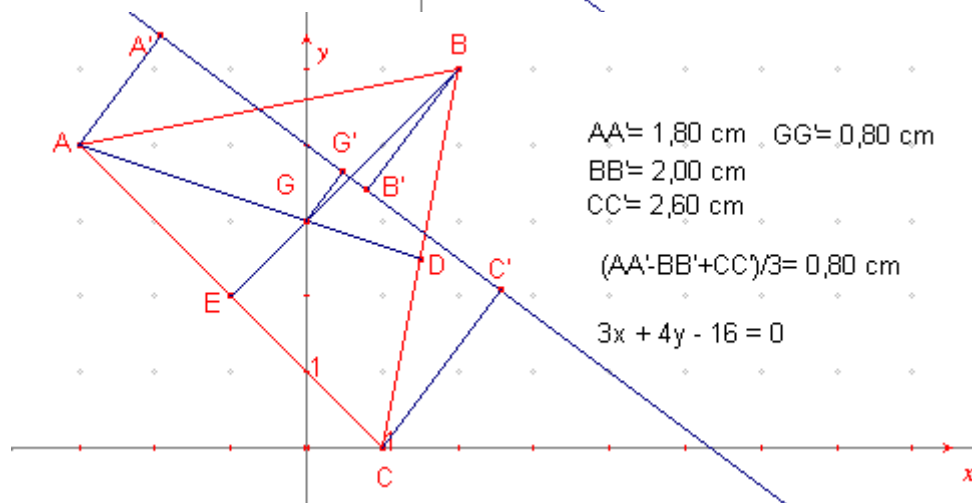
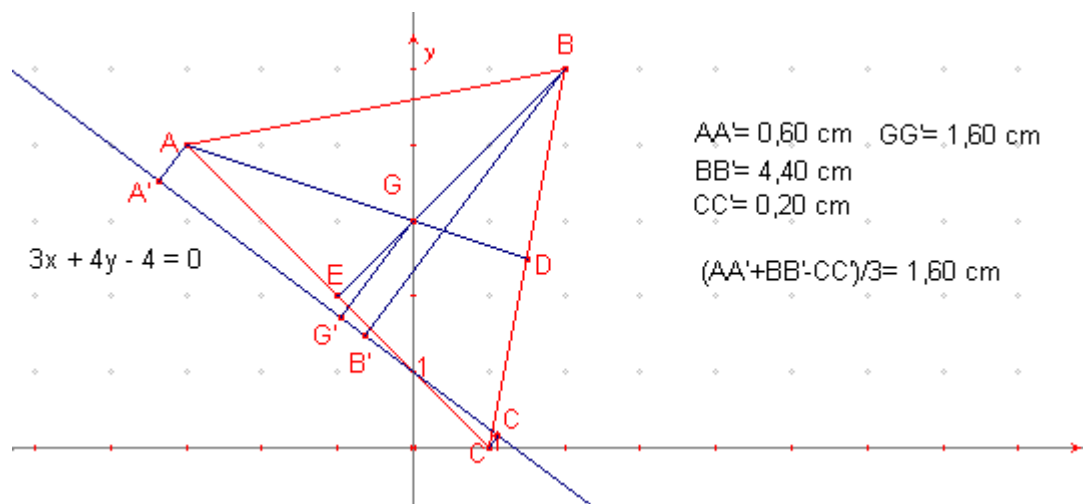
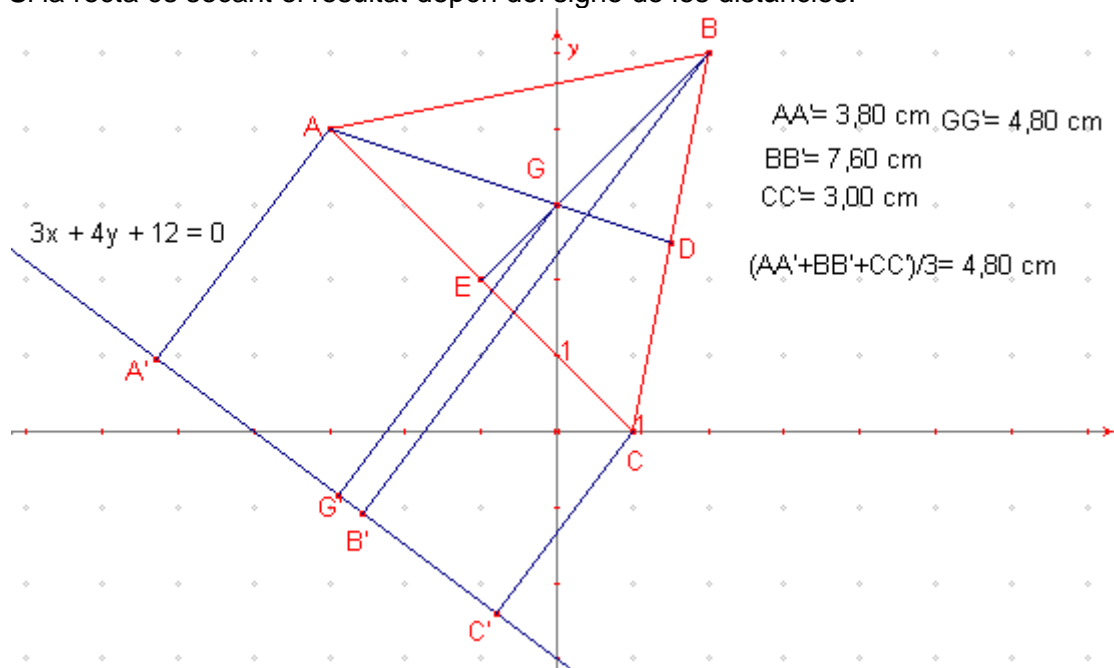
$$\frac{Ar+Br+Cr}{3}$$

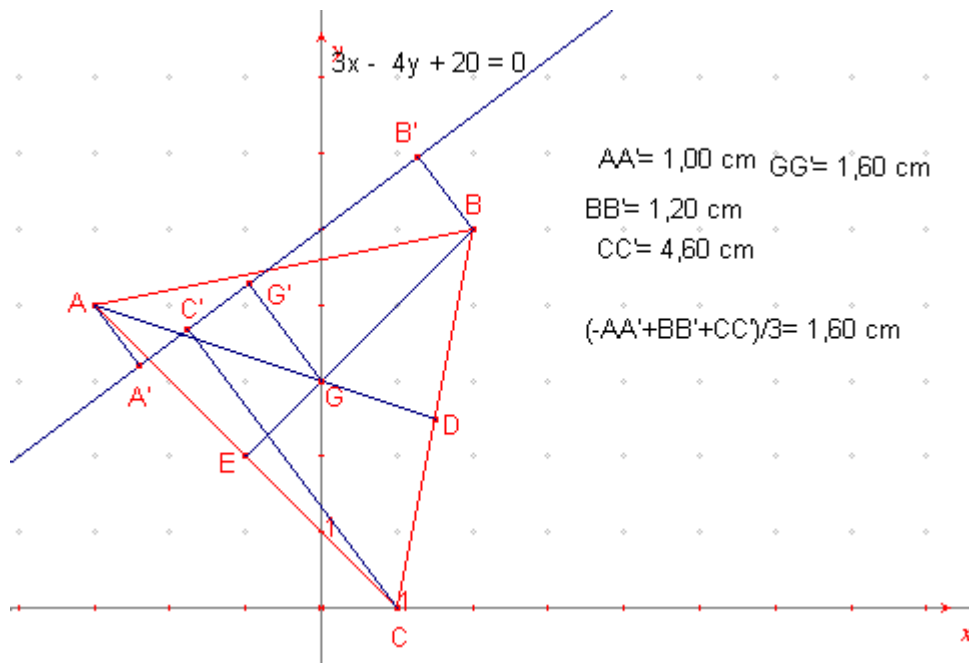
$\frac{24}{5}$

□

Algeb Estándar Real Rad

La propietat es compleix per qualsevol triangle i recta exterior.
 Si la recta és secant el resultat depèn del signe de les distàncies.





Problema 27

Siguen els vectors $a = (x, 6)$, $b = (4, -3)$. Determina x a fi que:

- d) Els vectors a , b siguin ortogonals.
- e) El vector a tinga mòdul 10.
- f) Els vectors a , b formen 120° .

Obrim una eActivity



Solució geomètrica:

Insertem un vincle geomètric amb les components del vector $b = (4, -3)$.

Obrim la finestra geomètrica a) en la què s'arrossega el vincle.

Dibuixem el origen de coordenades $O(0, 0)$.

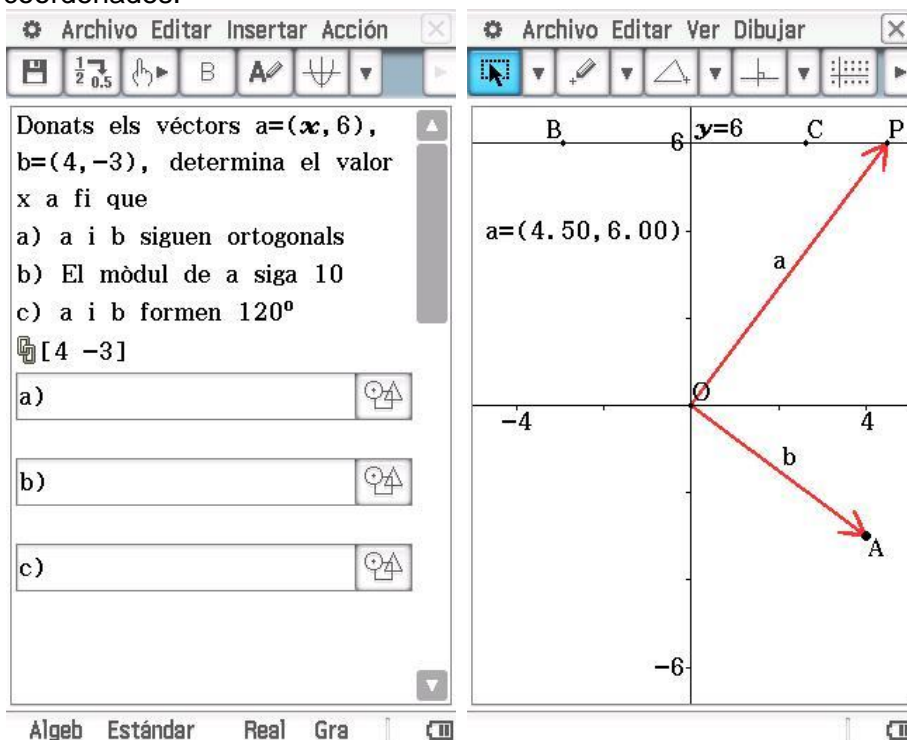
Dibuixem el vector $b = \overrightarrow{OA}$.

Dibuixem la recta $y = 6$.

Seleccionem el vector a i el punt O . Dibuixem la recta perpendicular a els objectes.

Seleccionem las dos rectes i s'intersecten en el punt P .

Dibuixem el vector $a = \overrightarrow{OP}$. Amb el quadre de mesures calculem les seues coordenades.



Obrim la finestra geomètrica b).

Dibuixem l'origen de coordenades $O(0, 0)$.

Dibuixem la circumferència de centre O i radi 10.

Dibuixem la recta $y = 6$.

Seleccionem la recta i la circumferència. Calculem la intersecció.

Siguen F i G els punts intersecció.

Dibuixem els vectors $a = \overrightarrow{OF}$, $a' = \overrightarrow{OG}$. Amb el quadre de mesures calculem les seues coordenades.

Obrim la finestra geomètrica c) en la què s'arrossega el vincle $b = (4, -3)$.

Dibuixem l'origen de coordenades $O(0, 0)$.

Dibuixem el vector $b = \overrightarrow{OA}$.

Dibuixem la recta $y = 6$.

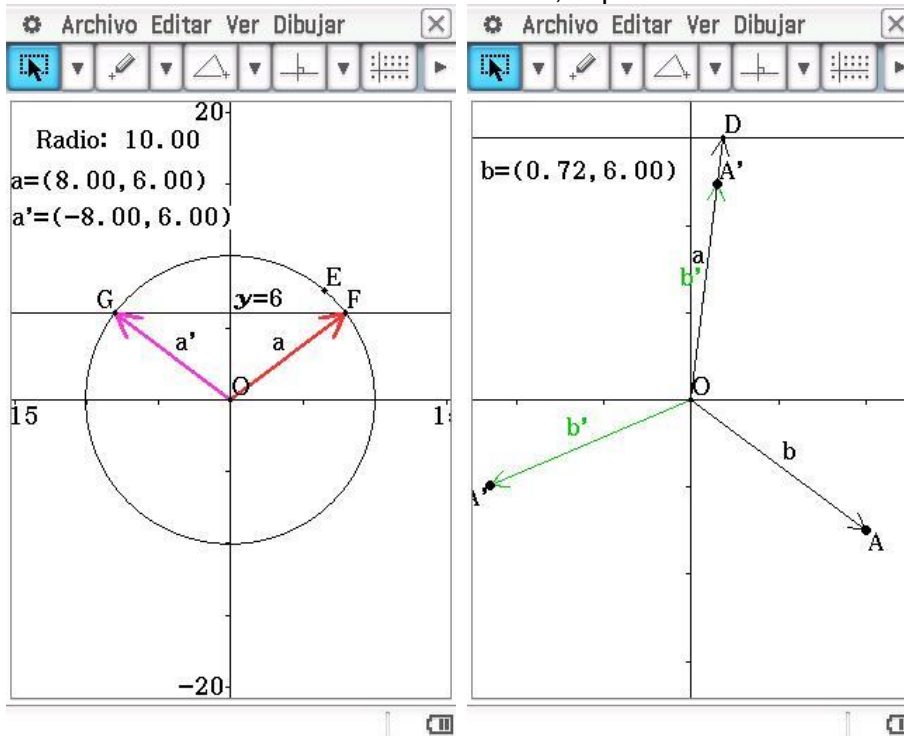
Efectuem un gir del vector b de centre O i angle 120° . $\overrightarrow{OA'}$.

Efectuem un gir del vector b de centre O i angle -120° . $\overrightarrow{OA''}$.

Dibuixem la semirecta OA' que talla la recta en el punt D

Dibuixem el vector $a = \overrightarrow{OD}$. Amb el quadre de mesures calculem les seues coordenades.

La semirecta OA' no talla la recta. Per tant, el problema té una solució.



Solució analítica:

a)

Insertem una fila de càlcul.

Definim les variables vectors a, b :

$$\begin{bmatrix} x & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow a$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow b$$

Calculem el producte escalar dels dos vectors.

Resolem l'equació:

$$\text{solve}(\text{dotP}(a,b) = 0).$$

$$x = \frac{9}{2}.$$

b)

Calculem el mòdul del vector a .

Resolem l'equació:

$$\text{solve}(\text{norm}(a) = 10).$$

$$x = -8, 8$$

c)

Calculem l'angle dels vectors a, b .

Resolem l'equació:

$$\text{solve}(\text{angle}(a,b) = 120).$$

(las mesures angulars han de ser sexagesimals).

$$x = \frac{96 - 50\sqrt{3}}{13} \approx 0.7228815094 .$$

Archivo Editar Insertar Acción

$[x \ 6] \rightarrow a$
 $[4 \ -3] \rightarrow b$
 $\text{dotP}(a, b)$
 $4 \cdot x - 18$
 producte escalar 0
 $\text{solve}(\text{dotP}(a, b)=0)$
 $\left\{x = \frac{9}{2}\right\}$
 b)
 $\text{norm}(a)$
 $\sqrt{x^2+36}$
 mòdul de a 10

Algeb Estàndar Real Gra

Archivo Editar Insertar Acción

$\sqrt{x^2+36}$
 mòdul de a 10
 $\text{solve}(\text{norm}(a)=10)$
 $\{x=-8, x=8\}$
 c)
 $\text{angle}(a, b)$
 $\cos^{-1}\left(\frac{4 \cdot x - 18}{5 \cdot \sqrt{x^2+36}}\right)$
 angle a, b és 120°
 $\text{solve}(\text{angle}(a, b)=120)$
 $\left\{x = \frac{-50 \cdot \sqrt{3}}{13} + \frac{96}{13}\right\}$
 ans
 $\{x=0.7228815094\}$

Algeb Estàndar Real Gra

Problema 28

Siguen $A(4, 5)$, $C(2, 1)$ els vèrtexs oposats del rombe ABCD.

Si el vèrtex B pertany a l'eix de abscisses, calcula:

- Les coordenades dels vèrtexs.
- L'àrea del rombe ABCD.
- El costat del rombe ABCD.

Obrim una eActivity



Solució geomètrica:

Insertem dos vincles geomètrics amb els vèrtexs $A(4, 5)$, $C(2, 1)$ del rombe ABCD.

Obrim la finestra geomètrica en la què arrosseguem els dos vincles.

Dibuixem el segment \overline{AC} .

Seleccionem el segment \overline{AC} i dibuixem el punt mig O.

Seleccionem el segment \overline{AC} i dibuixem la recta mediatriu.

Dibuixem la recta $y = 0$.

Seleccionem la recta mediatriu i la recta $y = 0$. Dibuixem la intersecció B dels dos objectes.

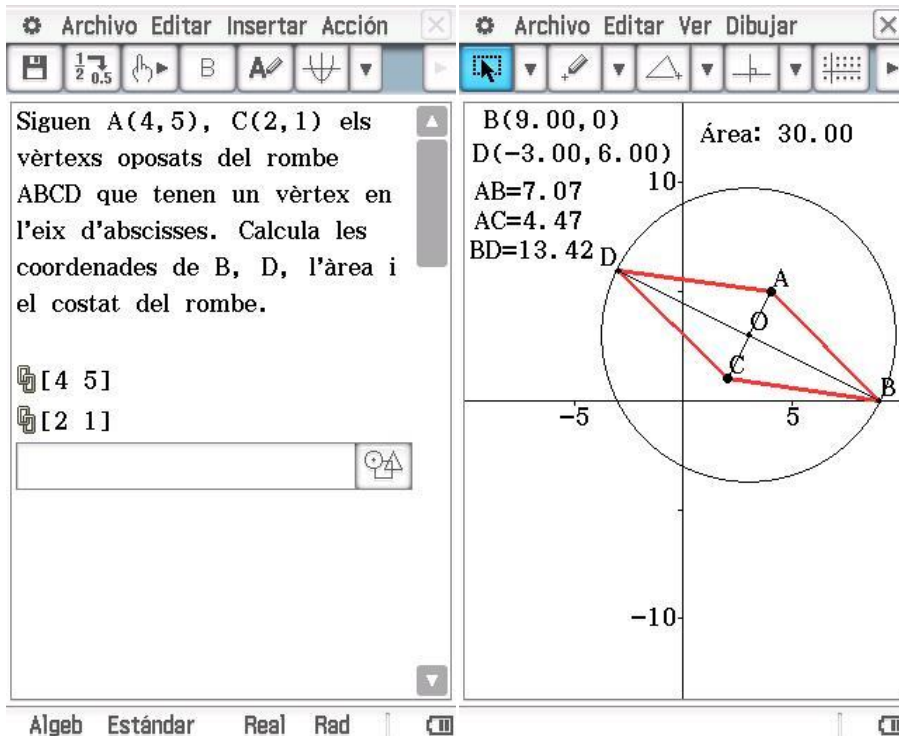
Dibuixem la circumferència de centre O que passa per B.

Seleccionem la circumferència i la recta mediatriu. Dibuixem la intersecció D dels dos objectes. Dibuixem els segments que formen els costats del rombe.

Seleccionem cadascun dels vèrtexs B i D. Amb el quadre de mesures calculem les seues coordenades.

Seleccionem el costat \overline{AB} . Amb el quadre de mesures calculem la mesura del costat del rombe.

Seleccionem els quatre costats del rombe. Amb el quadre de mesures calculem la mesura de l'àrea del rombe.



Solució analítica

Insertem una fila de càlcul.

Definim les variables vèrtexs A i C:

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow A$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow C$$

Calculem el centre O del rombe:

$$\frac{A + C}{2} \Rightarrow O.$$

Calculem el vector \overrightarrow{AC} :

$$C - A \Rightarrow v$$

Calculem el pendent de la recta mediatriu al segment \overline{AC} :

$$\frac{-v[1, 1]}{v[1, 2]} \Rightarrow m$$

Calculem les coordenades de O:

$$O[1, 1] \Rightarrow O1$$

$$O[1, 2] \Rightarrow O2$$

Calculem l'equació de la recta mediatriu:

$$y = m \cdot (x - O1) + O2$$

Calculem la abscissa del vèrtex B:

$$\text{solve}(y = m \cdot (x - O1) + O2) | y = 0.$$

$$B(9, 0).$$

Definim el vèrtex B:

$$\begin{bmatrix} 9 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow B$$

Calculem el vèrtex D:

$$O + O - B \Rightarrow D$$

Calculem la mesura del costat \overline{AB} :

$$\text{norm}(B - A)$$

Calculem las mesures de les diagonals:

$$\text{norm}(C - A) \Rightarrow d1$$

$$\text{norm}(D - B) \Rightarrow d2$$

Calculem l'àrea del rombe ABCD:

$$\frac{d1 \cdot d2}{2}$$

Archivo Editar Insertar Acción

[4 5] → A [4 5]

[2 1] → C [2 1]

centre O del rombe

$$\frac{A+C}{2} \rightarrow O$$

[3 3]

vector AC

$$C-A \rightarrow v$$

pendent recta mediatriu a AC

$$\frac{-v[1, 1]}{v[1, 2]} \rightarrow m$$

$-\frac{1}{2}$

Algeb Estándar Real Rad

Archivo Editar Insertar Acción

coordenades O

O[1, 1] → O1 3

O[1, 2] → O2 3

recta mediatriu

$$y = m \times (x - O1) + O2$$

$$y = -\frac{(x-3)}{2} + 3$$

vèrtex B

solve(y=m×(x-O1)+O2) | y=0 {x=9}

[9 0] → B [9 0]

vèrtex D

O+O-B → D

Algeb Estándar Real Rad

Archivo Editar Insertar Acción

vertex D

O+O-B → D [-3 6]

costa rombe

norm(B-A) $5 \cdot \sqrt{2}$

diagonals rombe

norm(C-A) → d1 $2 \cdot \sqrt{5}$

norm(D-B) → d2 $6 \cdot \sqrt{5}$

àrea rombe

$$\frac{d1 \times d2}{2}$$

30

□

Algeb Estándar Real Rad