Problema

Es donen el punt $P(1,1,1)$, la recta $r \equiv \begin{cases} x+y-z+1=0 \\ x+2y-z-1=0 \end{cases}$ i el plànol $\Pi \equiv x+y+z=1$.

Obteniu raonadament escrivint tots els passos del raonament utilitzat:

a) El plànol que conté el punt P i la recta r.

b) La recta s que passa pel punt P i és perpendicular al plànol Π, la distància del punt P al plànol Π i el punt intersecció de la recta s amb el plànol Π.

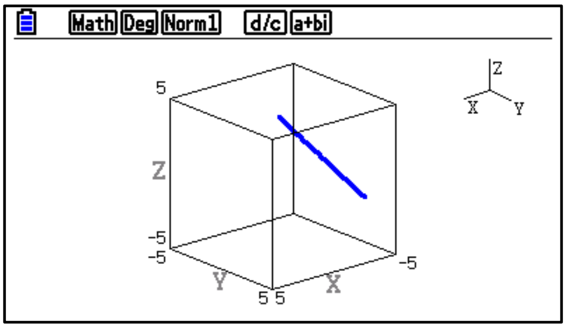
c) El plànol Φ que conté la recta r i és perpendicular al plànol Π.

Pau's Juny 2017. Matemàtiques II

Solució:

Resolem el sistema format per l'equació implícita de la recta r:

$\begin{cases} x+y-z+1=0 \\ x+2y-z-1=0 \end{cases}$, $\begin{cases} x+y-z=-1 \\ y=2 \end{cases}$, $\begin{cases} x=-3+\alpha \\ y=2 \\ z=\alpha \end{cases}$, un punt de la recta r és $A(-3,2,0)$ i el vector director és $v=(1,0,1)$.

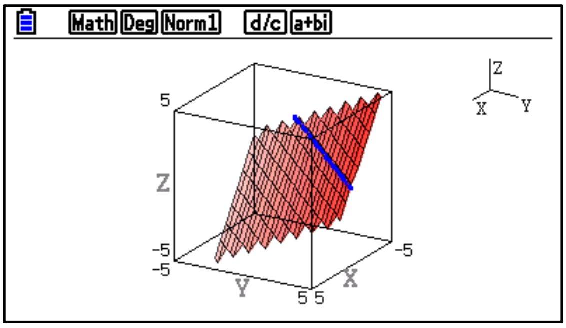


$\overrightarrow{AP}=(4,-1,1)$.

a)

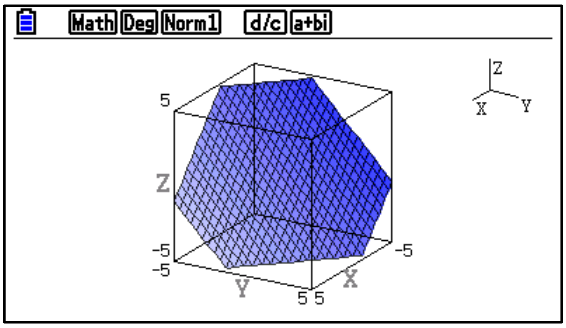
El plànol Ω que conté el punt P i la recta r, passa pel punt P i té direcció $\{v, \overrightarrow{AP}\}$ linealment independents.

$\Omega \equiv (x,y,z)=(1,1,1)+\alpha(1,0,1)+\beta(4,-1,1)$



b)

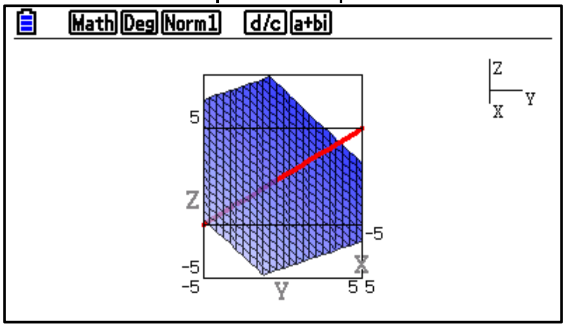
El vector característic del plànol Π és $a=(1,1,1)$.



La recta s que passa pel punt P i és perpendicular al plànol Π té vector director $a = (1, 1, 1)$.

$s \equiv (x, y, z) = (1, 1, 1) + \alpha(1, 1, 1)$.

La distància del punt P al plànol Π:

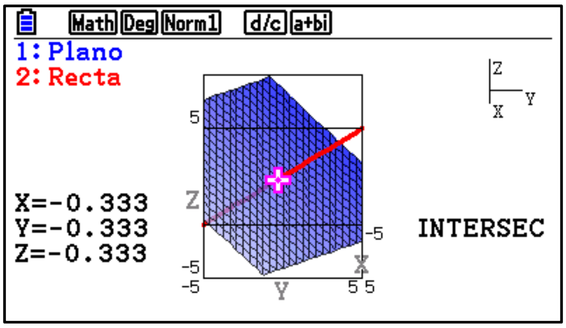


$d(P, \Pi) = \left| \dfrac{1+1+1-1}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} \right| = \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ u.

Per determinar el punt intersecció de la recta s i el plànol Π resoldrem el sistema format per les seues equacions:

$\Pi \equiv x + y + z = 1$. $\alpha + \alpha + \alpha = 1$, aleshores, $\alpha = \dfrac{1}{3}$.

Les coordenades del punt intersecció és $Q\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$.



c)

El plànol Φ que conté la recta r i és perpendicular al plànol Π passa pel punt A i té direcció $\{v, a\}$ linealment independents.

$\Phi \equiv (x, y, z) = (-3, 2, 0) + \alpha(1, 0, 1) + \beta(1, 1, 1)$.