Problema

Siguen el quadrilàter convex *ABCD* de vèrtexs $A(-3,1)$, $B(4,0)$, $C(1,4)$, $D(-4,3)$

Siguen K, L, M, N els punts migs dels costats, $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}$, respectivament.

Proveu que:

a) El quadrilàter KLMN és un paral·lelogram.

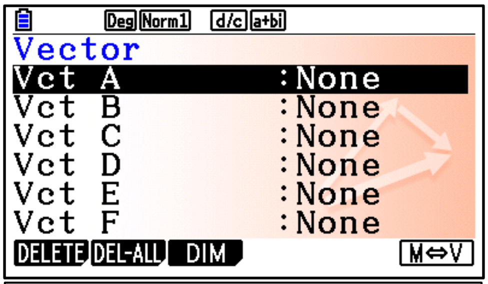
b) L'àrea del quadrilàter *KLMN* és igual a la meitat de l'àrea del quadrilàter ABCD.

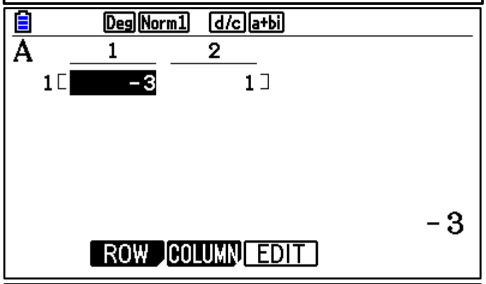
Aquesta propietat, que és general dels quadrilàters, s'anomena Teorema de Varignon.

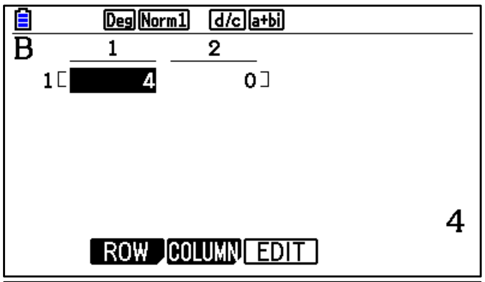
Solució:

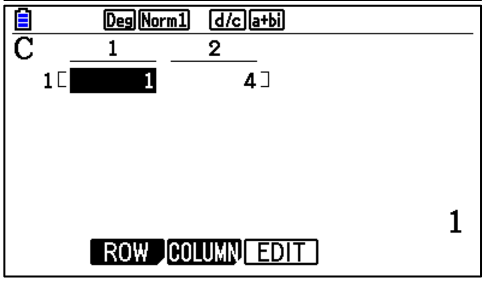
Obrim el Menú *Ejec-Mat*.

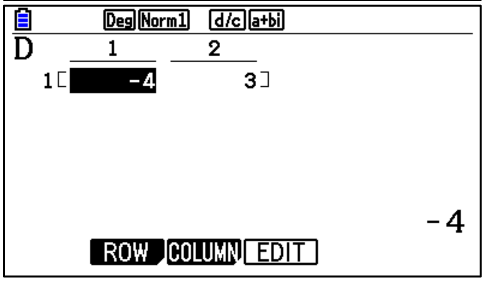
Definim les coordenades dels vèrtexs $A(-3,1)$, $B(4,0)$, $C(1,4)$, $D(-4,3)$ com ectors.











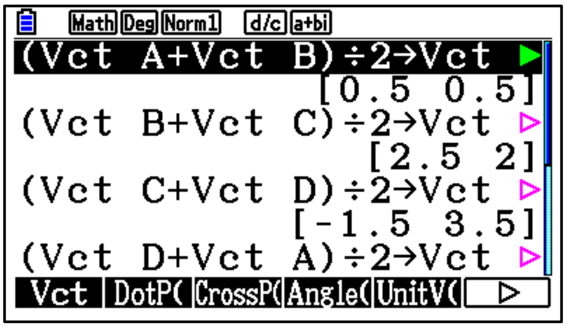
Calculem els punts migs K, L, M, N dels costats:

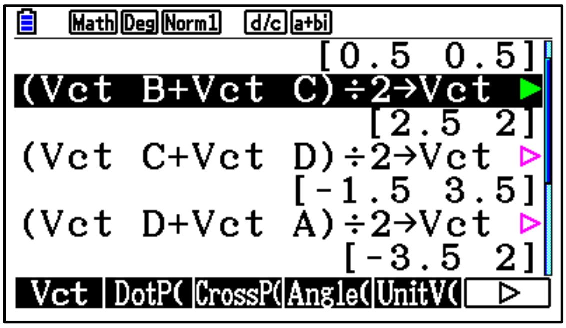
$(Vct\ A + Vct\ B) \div 2 \to Vct\ K,$

$(Vct\ B + Vct\ C) \div 2 \to Vct\ L$

$(Vct\ C + Vct\ D) \div 2 \to Vct\ M$

$(Vct\ D + Vct\ A) \div 2 \to Vct\ N$

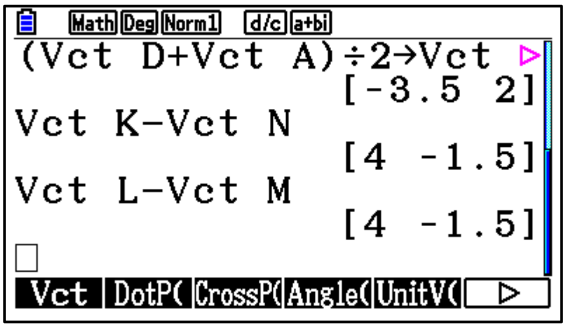




Les coordenades dels punts migs són:

$K\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right), L\left(\frac{5}{2},2\right), M\left(-\frac{3}{2},\frac{7}{2}\right), N\left(-\frac{7}{2},2\right)$

Determinem les components dels vectors $\overrightarrow{NK}, \overrightarrow{ML}$.
$Vct\ K - Vct\ N$
$Vct\ L - Vct\ M$

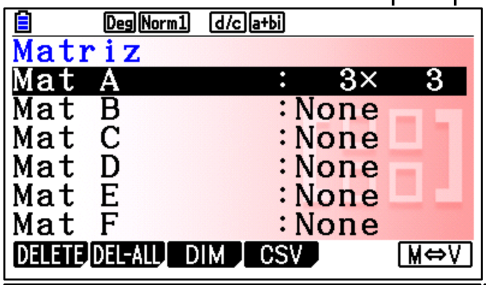


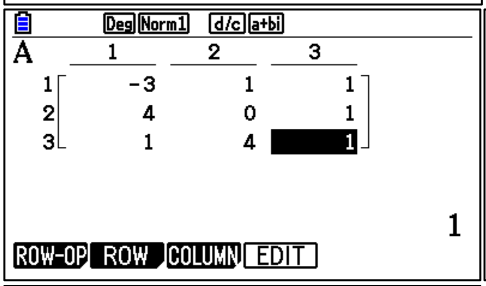
$\overrightarrow{NK} = \overrightarrow{ML} = \left(4, -\frac{3}{2}\right)$
Aleshores, KLMN és un paral·lelogram.

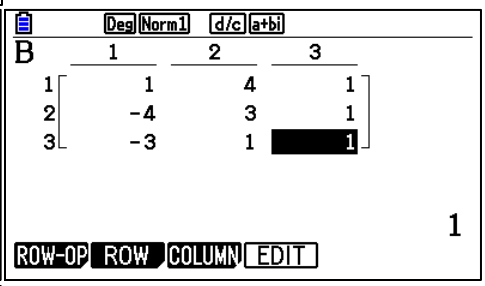
L’àrea del quadrilàter ABCD és igual a la suma de les àrees dels triangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{CDA}$.
L’àrea del quadrilàter KLMN és igual al doble de l’àrea del triangle $\overset{\Delta}{KLM}$
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{PQR}$ de vèrtexs $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2), R(x_3, y_3)$ és:

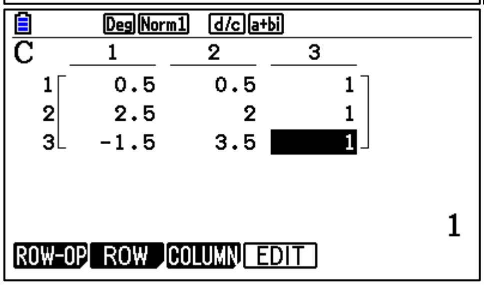
$$S_{PQR} = \frac{1}{2} Abs\left(det\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

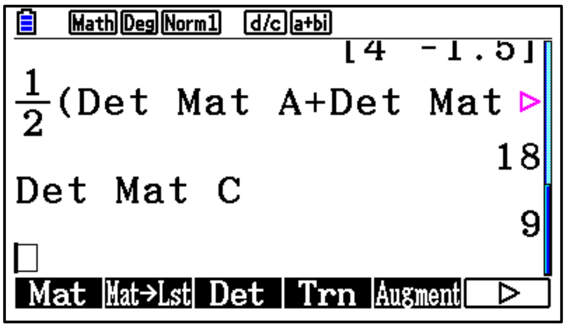
Definim les matrius formades pels punts:







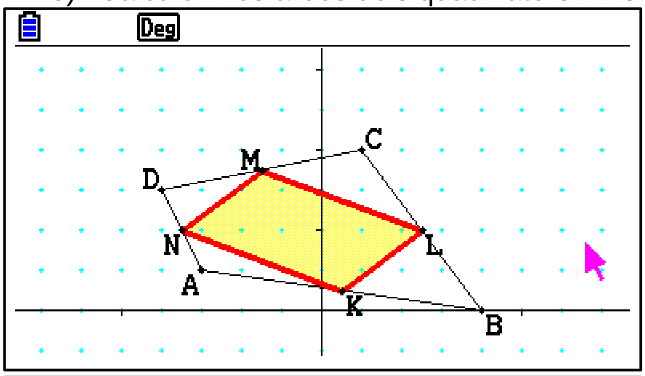


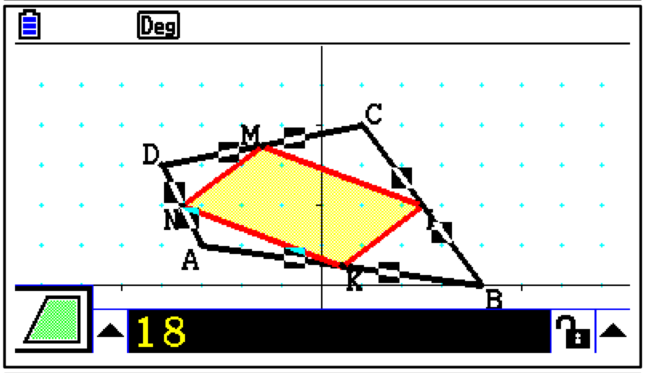


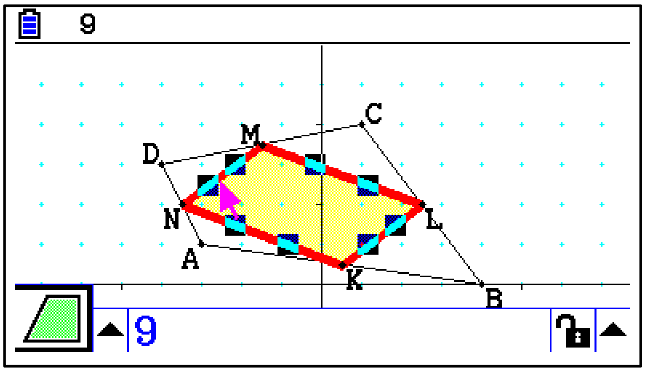
$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(detA + detB) = 18$$
$$S_{KLMN} = 2 \cdot \frac{1}{2}(detC) = 9$$

Vegem la solució gràfica. Obrim el *Menú Geometria*.
Passos de la construcció:

a) Dibuixem els punts A, B, C, D.
b) Dibuixem el quadrilàter ABCD.
c) Dibuixem els punts migs dels costats del quadrilàter ABCD.
d) Dibuixem el quadrilàter KLMN.
e) Calculem les àrees dels quadrilàters ABCD, KLMN

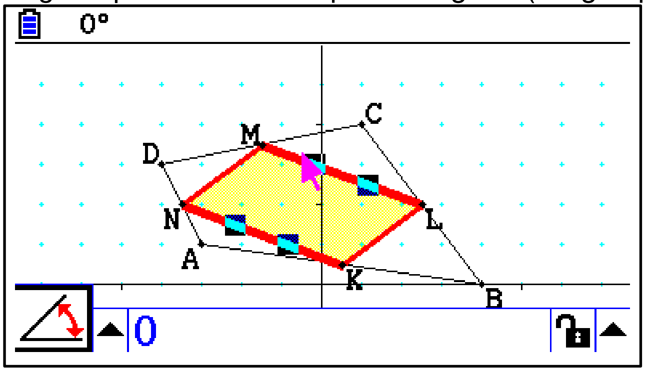


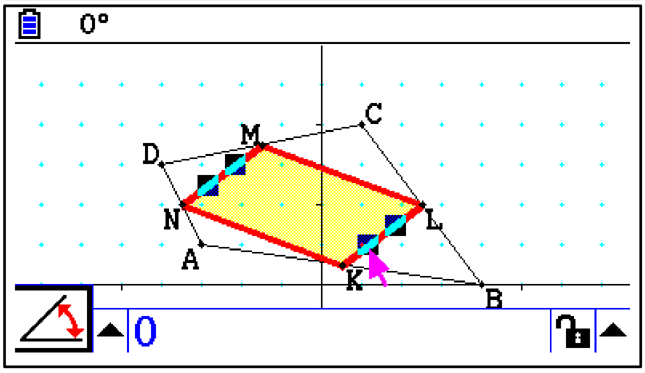




$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(detA + detB) = 18 \quad S_{KLMN} = 2 \cdot \frac{1}{2}(detC) = 9$

Vegem que KLMN és un paral·lelogram (l'angle que formen els costats oposats és 0º)





Pierre Varignon era fill d'un constructor de Caen que, tot i no ser ric, va tenir prou diners perquè Varignon estudiés primer al col·legi jesuïta de Caen i després anés a la universitat de la mateixa ciutat, on es va graduar el 1682. Abans, entre 1676 i 1679, va ser ordenat sacerdot.

El 1687, Varignon publica el seu tractat sobre mecànica, fet que li valdrà ingressar l'any següent a l'Acadèmia de Ciències com a geòmetra. El mateix any és nomenat primer professor de matemàtiques del *Collège des Quatre Nations*, més conegut com a *Collège Mazarin*, pel cognom del seu fundador. Pocs anys després, quan el seu amic Sant Pierre abandona París per Brest, es trasllada a viure al *Collège Mazarin*, on viurà fins a la seva mort. El substituirà en el seu lloc Lèonor Caron, qui serà el mestre de D'Alembert.

El 1692 coneix Johann Bernoulli a París, el que significarà el començament d'una llarga amistat i d'un intens intercanvi epistolar. Varignon serà, doncs, un fervent defensor del càlcul infinitesimal.

A partir de 1704, també serà professor del Collège Royal i també serà nomenat membre de la Royal Society i de l'Acadèmia de Ciències de Berlin.