Problema

Tenim les rectes $r_1 \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\alpha \\ y = \alpha \\ z = 2 - \alpha \end{cases}$ i $r_2 \equiv \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 + \beta \\ z = -1 - 2\beta \end{cases}$, sent α i β paràmetres reals.

Calculeu raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:

a) Unes equacions implícites de r_1

b) La justificació que les rectes r_1 i r_2 estan contingudes en un plànol Π i l'equació d'aquest plànol Π.

c) L'àrea del triangle de vèrtexs P, Q i R, sent, $P(-1, 0, 1)$, $Q(0, 1, 2)$ i R el punt d'intersecció de les rectes r_1 i r_2.

Selectivitat juliol 2013

Solució:

a)

L'equació de r_1 està en forma paramètrica. De la segona equació $\alpha = y$.

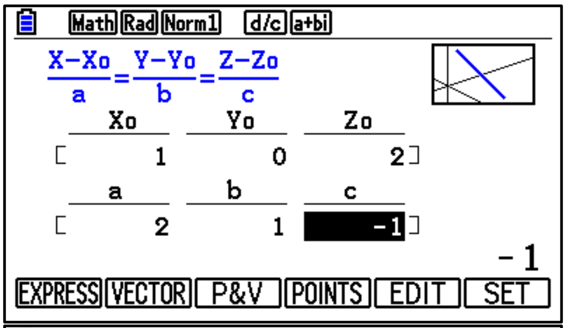
Substituint el paràmetre en la primera i segona equació:

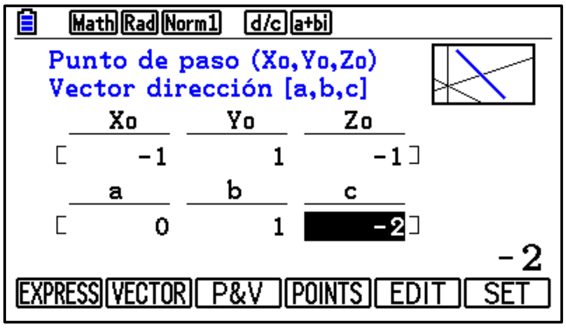
$$r_1 \equiv \begin{cases} x - 2y - 1 = 0 \\ y + z - 2 = 0 \end{cases}.$$

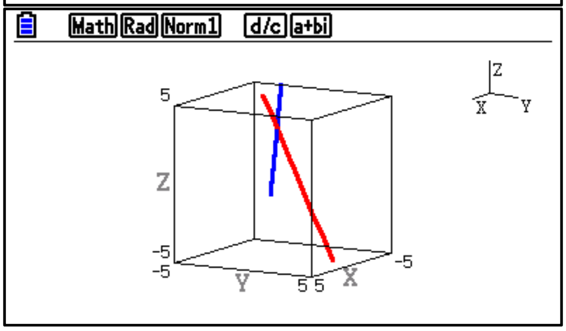
b)

Un punt de la recta r_1 és $A(1, 0, 2)$ i el vector director és $v = (2, 1, -1)$.

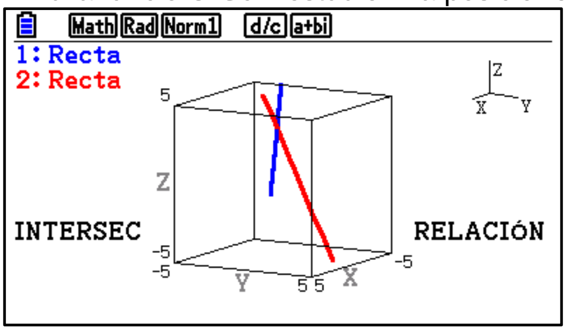
Un punt de la recta r_2 és $B(-1, 1, -1)$ i el vector director és $w = (0, 1, -2)$.





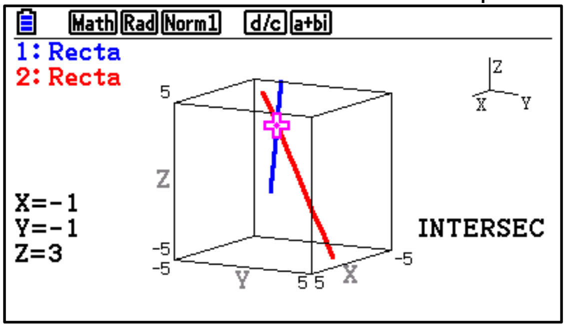


Amb la funció *G-Solv* estudiem la posició relativa:



Les rectes són secants, per tant estan contingudes en un plànol.

Amb la funció *G-Solv* determinem el punt intersecció:



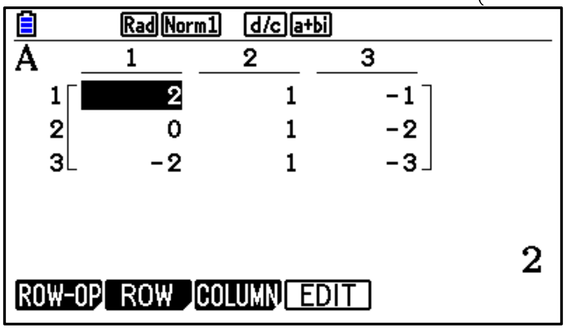
El punt intersecció és $R(-1, -1, 3)$

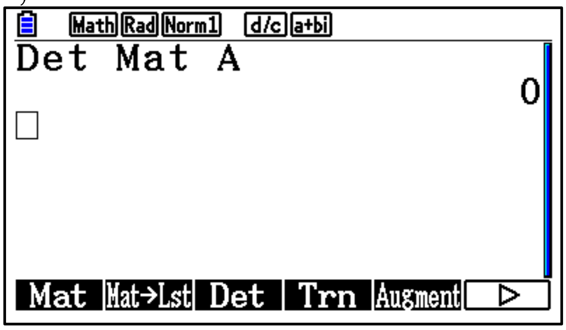
Analíticament:

$\{v, w\}$ són linealment independent, aleshores són secant o és creuen.

$\overrightarrow{AB} = (-2, 1, -3)$

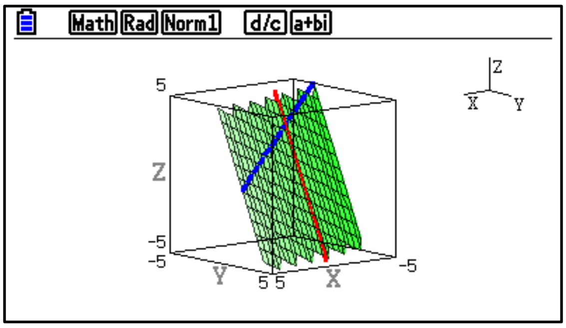
Estudiem el determinant format per $\{v, w, \overrightarrow{AB}\}$.





$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0$, aleshores, $\{v, w, \overrightarrow{AB}\}$ són linealment dependents, aleshores rectes r_1 i r_2 estan contingudes en un plànol Π.

La seua equació és: $\Pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z-2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$. Simplificant: $\Pi \equiv -x + 4y + 2z - 3 = 0$.



c)

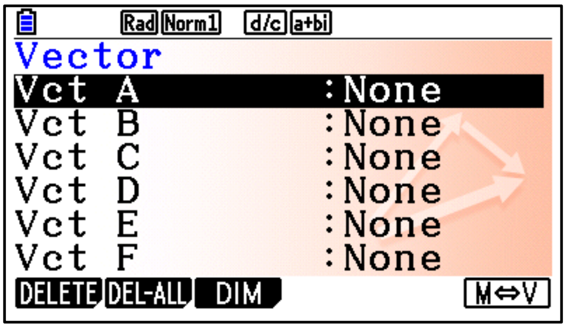
Calculem el punt intersecció R les rectes r_1 i r_2, igualant les coordenades de les seues equacions paramètriques:

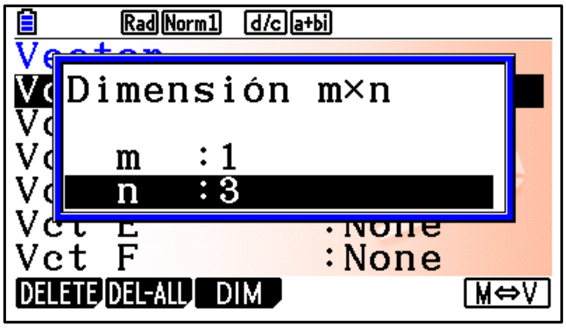
$$\begin{cases} 1+2\alpha=-1 \\ \alpha=1+\beta \\ 2-\alpha=-1-2\beta \end{cases} \quad \text{. Resolent el sistema: } \begin{cases} \alpha=-1 \\ \beta=-2 \end{cases}$$

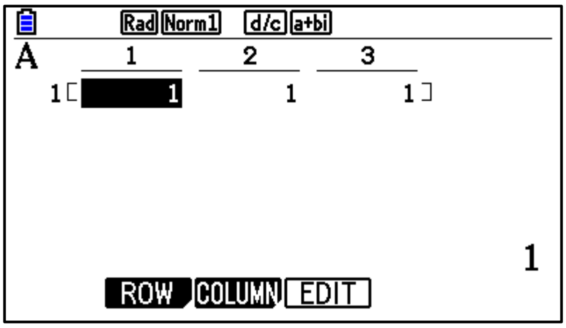
Aleshores, de coordenades de R són: $R(-1,-1,3)$.

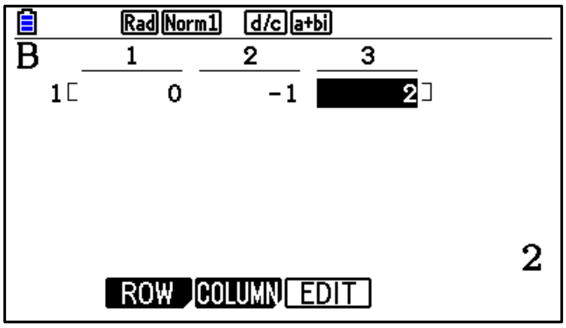
L'àrea del triangle de vèrtexs P, Q i R és: $S_{PQR}=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}\right\|$.

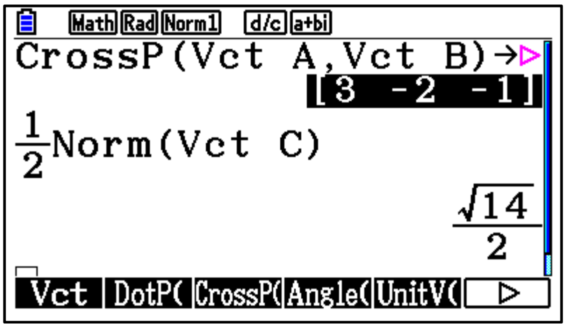
$\overrightarrow{PQ}=(1,1,1)$, $\overrightarrow{PR}=(0,-1,2)$.











$$\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}=3i-2j-k=(3,-2,-1).$$

$$S_{PQR}=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}\right\|=\frac{\sqrt{14}}{2}.$$