

### Problema

Es tenen les rectes  $r \equiv \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2}$ ,  $s \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = 0 \end{cases}$  i el punt  $P(0,3,-2)$ .

Obtenui raonadament, escrivint tots els passos de raonament utilitzat:

- Les equacions de la recta que passa pel punt P i és paral·lela a la recta r.
- L'equació del pla que conté la recta r i és paral·lel a la recta s.
- La distància entre les rectes r i s.

*Pau's València julio 2015*

Solució:

$r \equiv \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2}$ . Un punt de la recta r és  $A(-1,1,0)$  i el vector director és  $v_r = (3,-1,2)$ .

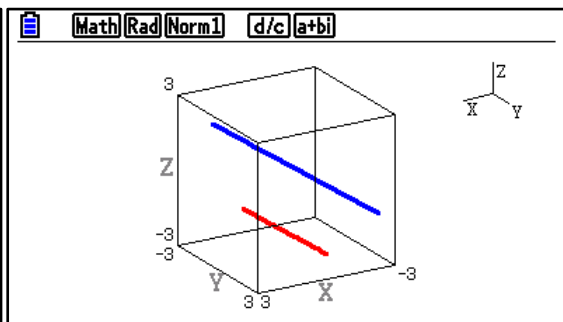
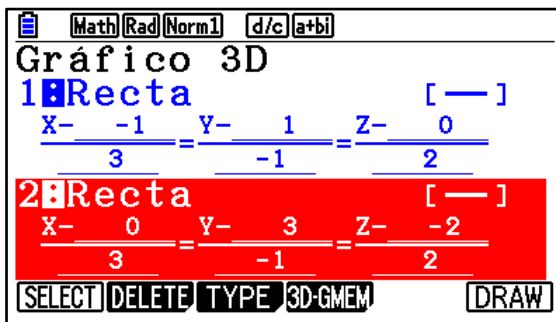
$s \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = 0 \end{cases}$ . Un punt de la recta s és  $B(1,0,0)$  i el vector director és  $v_s = (1,-1,0)$ .

Notem que els vectors  $v_r = (3,-1,2)$ ,  $v_s = (1,-1,0)$  són linealment independents ja que les components no són proporcionals,  $\frac{3}{1} \neq \frac{-1}{-1}$

a)

El vector director de la recta paral·lela és  $v_r = (3,-1,2)$ . La seua equació és:

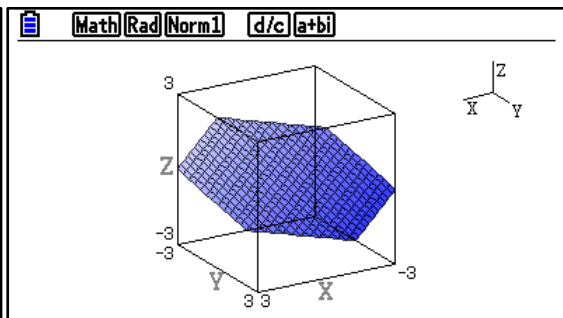
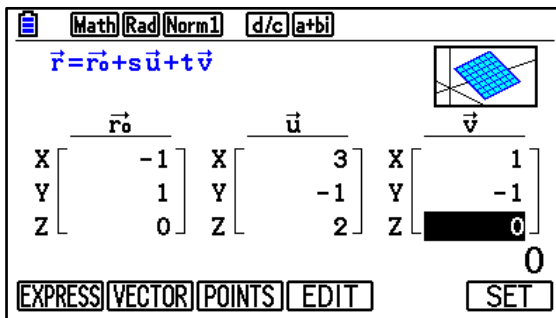
$$\frac{x-0}{3} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+2}{2}$$



b)

L'equació del pla té per vectors directores  $v_r = (3,-1,2)$ ,  $v_s = (1,-1,0)$ . La seua equació vectorial és:

$$\Pi \equiv (x,y,z) = (-1,1,0) + \alpha(3,-1,2) + \beta(1,-1,0)$$



c)

Les rectes r, s són secants o es creuen ja que els vectors directors d'ambdues rectes són linealment independents.

La distància entre les dues rectes és:  $d(r,s) = \frac{[\overrightarrow{AB}, v_r, v_s]}{\|v_r \times v_s\|}$ .

$$\overrightarrow{AB} = (2, -1, 0).$$

Obrim el *Menú Ejec-Mat*

Definim els vectors  $v_r = (3, -1, 2)$ ,  $v_s = (1, -1, 0)$  i la matriu formada pels vectors

$$\overrightarrow{AB} = (2, -1, 0), v_r = (3, -1, 2), v_s = (1, -1, 0)$$

The image shows four screenshots of a TI-84 Plus calculator interface:

- Top Left:** Matrix A is being defined with dimensions 1x3. The values entered are 3, -1, and 2.
- Top Right:** Matrix B is being defined with dimensions 1x3. The values entered are 1, -1, and 0.
- Middle Left:** Matrix A is defined with dimensions 3x3. The values entered are 2, -1, 0 in the first row; 3, -1, 2 in the second row; and 1, -1, 0 in the third row.
- Middle Right:** The calculator displays the result of the cross product calculation, showing  $2\sqrt{3}$ .
- Bottom Left:** The calculator displays the calculation of the scalar triple product:  $\text{CrossP}(\text{Vct A}, \text{Vct B})$  resulting in  $[2 \ 2 \ -2]$ , and  $\text{Norm}(\text{Vct Ans}) \rightarrow B$  resulting in  $2\sqrt{3}$ .
- Bottom Right:** The calculator displays the final result of the distance calculation, showing  $\frac{A}{B}$  as  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ .

$$[\overrightarrow{AB}, v_r, v_s] = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot v_r \times v_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (2, 2, -2).$$

$$\|v_r \times v_s\| = \|(2, 2, -2)\| = 2\sqrt{3}.$$

$$\text{Aleshores, } d(r,s) = \frac{[\overrightarrow{AB}, v_r, v_s]}{\|v_r \times v_s\|} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$