Problema

Es tenen les rectes $r \equiv \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2}$, $s \equiv \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 0 \end{cases}$ i el punt $P(0,3,-2)$.

Obteniu raonadament, escrivint tots els passos de raonament utilitzat:
a) Les equacions de la recta que passa pel punt P i és paral·lela a la recta r.
b) L'equació del plànol que conté la recta r i és paral·lel a la recta s.
c) La distància entre les rectes r i s.
Pau's València julio 2015

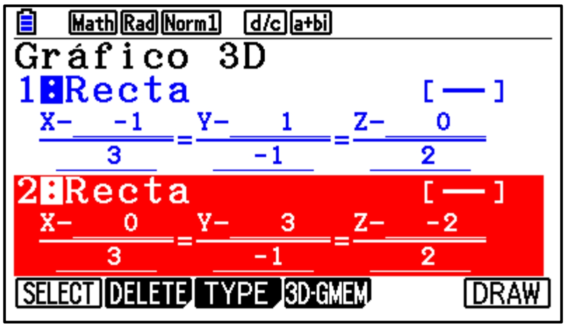
Solució:

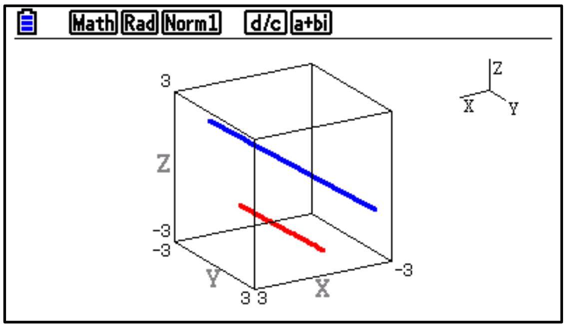
$r \equiv \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2}$. Un punt de la recta r és $A(-1,1,0)$ i el vector director és $v_r = (3,-1,2)$.

$s \equiv \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 0 \end{cases}$. Un punt de la recta s és $B(1,0,0)$ i el vector director és $v_s = (1,-1,0)$.

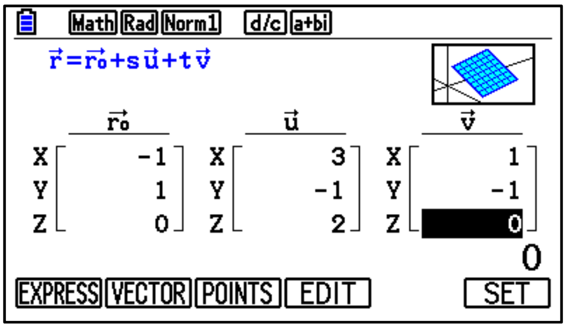
Notem que els vectors $v_r = (3,-1,2)$, $v_s = (1,-1,0)$ són linealment independents ja que les components no són proporcionals, $\frac{3}{1} \neq \frac{-1}{-1}$

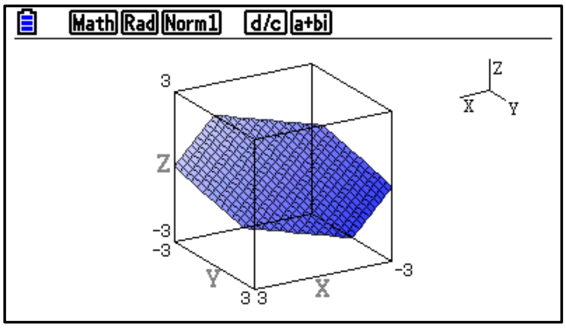
a)
El vector director de la recta paral·lela és $v_r = (3,-1,2)$. La seua equació és:
$\frac{x-0}{3} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+2}{2}$.





b)
L'equació del plànol té per vectors directors $v_r = (3,-1,2)$, $v_s = (1,-1,0)$. La seua equació vectorial és:
$\Pi \equiv (x,y,z) = (-1,1,0) + \alpha(3,-1,2) + \beta(1,-1,0)$.

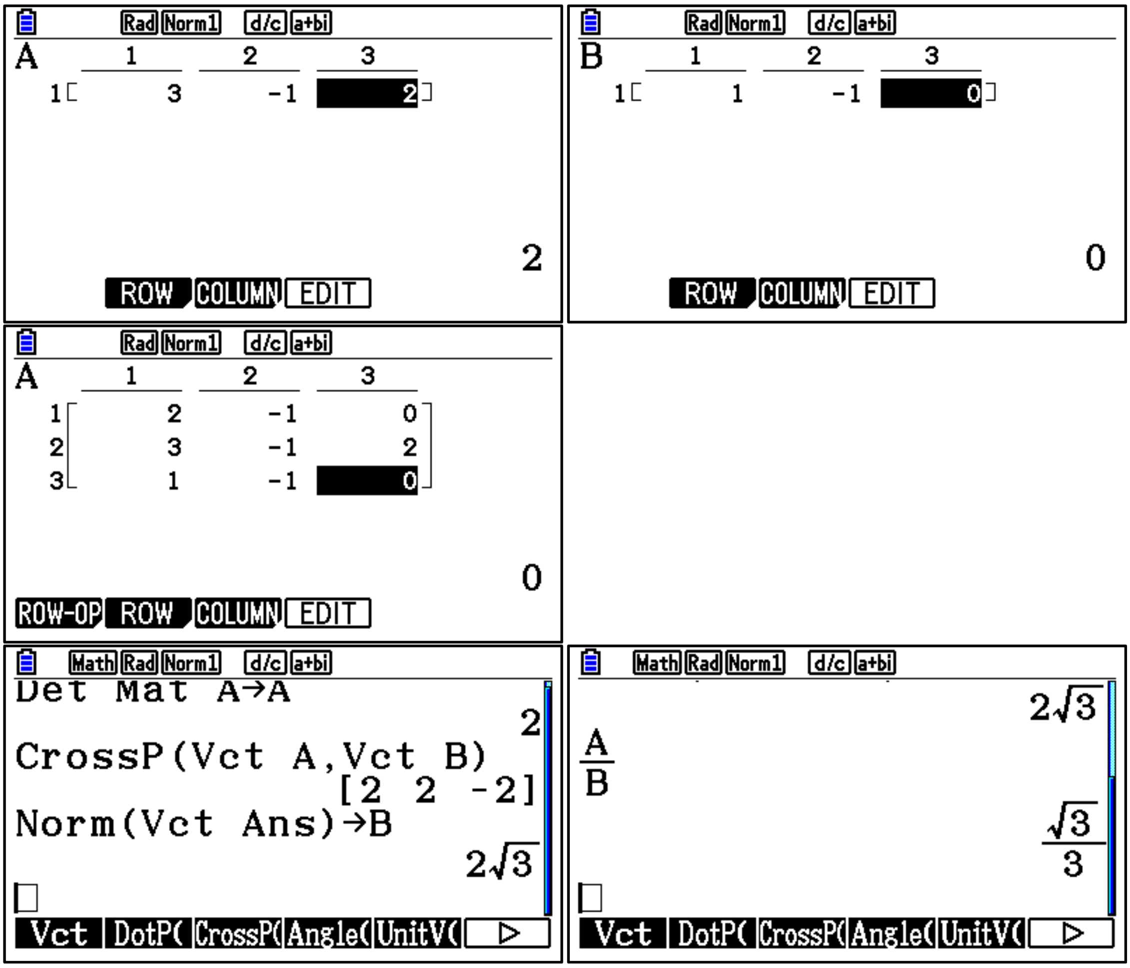




c)
Les rectes r, s són secants o es creuen ja que els vectors directors d'ambdues rectes són linealment independents.

La distància entre les dues rectes és: $d(r,s)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AB},v_r,v_s\right]\right|}{\left\|v_r\times v_s\right\|}$.

$\overrightarrow{AB}=(2,-1,0)$.
Obrim el *Menú Ejec-Mat*
Definim els vectors $v_r=(3,-1,2)$, $v_s=(1,-1,0)$ i la matriu formada pels vectors
$\overrightarrow{AB}=(2,-1,0)$, $v_r=(3,-1,2)$, $v_s=(1,-1,0)$



$\left[\overrightarrow{AB},v_r,v_s\right]=\begin{vmatrix}2&-1&0\\3&-1&2\\1&-1&0\end{vmatrix}=2$. $v_r\times v_s=\begin{vmatrix}i&j&k\\3&-1&2\\1&-1&0\end{vmatrix}=(2,2,-2)$.

$\left\|v_r\times v_s\right\|=\left\|(2,2,-2)\right\|=2\sqrt{3}$.

Aleshores, $d(r,s)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AB},v_r,v_s\right]\right|}{\left\|v_r\times v_s\right\|}=\dfrac{2}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.