

### Problema

Donades les rectes d'equacions  $r \equiv \begin{cases} 5x + y - z = 4 \\ 2x - 2y - z = -5 \end{cases}$  i  $s \equiv \begin{cases} x - y = -5 \\ z = 4 \end{cases}$ , es demana:

- Justificar que les rectes  $r$  i  $s$  es creuen.
- Calcular raonadament la distància entre les rectes  $r$  i  $s$ .
- Determinar l'equació del pla  $\Pi$  que és paral·lel i equidistant a les rectes  $r$  i  $s$ .

Solució:

a)

Obrim el *Menú Ecuación*.

Per determinar les equacions paramètriques resollem els sistemes format per les dues rectes.

<div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <p style="font-size: small; margin: 0;">Math Deg Norm1 d/c   a+bi</p> <p style="margin: 0;"><math>a_n X + b_n Y + c_n Z = d_n</math></p> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse; font-size: x-small;"> <thead> <tr> <th style="width: 5%;"></th> <th style="width: 20%; text-align: center;">a</th> <th style="width: 20%; text-align: center;">b</th> <th style="width: 20%; text-align: center;">c</th> <th style="width: 35%; text-align: center;">d</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="text-align: right;">1</td> <td style="text-align: center;">5</td> <td style="text-align: center;">1</td> <td style="text-align: center;">-1</td> <td style="text-align: center;">4</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">2</td> <td style="text-align: center;">2</td> <td style="text-align: center;">-2</td> <td style="text-align: center;">-1</td> <td style="text-align: center;">-5</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">3</td> <td style="text-align: center;">0</td> <td style="text-align: center;">0</td> <td style="text-align: center;">0</td> <td style="text-align: center;">0</td> </tr> </tbody> </table> <p style="text-align: right; margin-top: 5px;">0</p> <p style="font-size: x-small; margin: 0;">SOLVE DELETE CLEAR EDIT</p> </div>		a	b	c	d	1	5	1	-1	4	2	2	-2	-1	-5	3	0	0	0	0	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <p style="font-size: small; margin: 0;">Math Deg Norm1 d/c   a+bi</p> <p style="margin: 0;"><math>a_n X + b_n Y + c_n Z = d_n</math></p> <p style="margin: 0; text-align: center;">Infinitas</p> <p style="margin: 0; text-align: center;"><math>X = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}Z</math></p> <p style="margin: 0; text-align: center;"><math>Y = \frac{11}{4} - \frac{1}{4}Z</math></p> <p style="text-align: right; margin-top: 5px;">0</p> <p style="font-size: x-small; margin: 0;">REPEAT</p> </div>
	a	b	c	d																	
1	5	1	-1	4																	
2	2	-2	-1	-5																	
3	0	0	0	0																	

<div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <p style="font-size: small; margin: 0;">Math Deg Norm1 d/c   a+bi</p> <p style="margin: 0;"><math>a_n X + b_n Y + c_n Z = d_n</math></p> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse; font-size: x-small;"> <thead> <tr> <th style="width: 5%;"></th> <th style="width: 20%; text-align: center;">a</th> <th style="width: 20%; text-align: center;">b</th> <th style="width: 20%; text-align: center;">c</th> <th style="width: 35%; text-align: center;">d</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="text-align: right;">1</td> <td style="text-align: center;">1</td> <td style="text-align: center;">-1</td> <td style="text-align: center;">0</td> <td style="text-align: center;">-5</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">2</td> <td style="text-align: center;">0</td> <td style="text-align: center;">0</td> <td style="text-align: center;">1</td> <td style="text-align: center;">4</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">3</td> <td style="text-align: center;">0</td> <td style="text-align: center;">0</td> <td style="text-align: center;">0</td> <td style="text-align: center;">0</td> </tr> </tbody> </table> <p style="text-align: right; margin-top: 5px;">0</p> <p style="font-size: x-small; margin: 0;">SOLVE DELETE CLEAR EDIT</p> </div>		a	b	c	d	1	1	-1	0	-5	2	0	0	1	4	3	0	0	0	0	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <p style="font-size: small; margin: 0;">Math Deg Norm1 d/c   a+bi</p> <p style="margin: 0;"><math>a_n X + b_n Y + c_n Z = d_n</math></p> <p style="margin: 0; text-align: center;">Soluciones Infinitas</p> <p style="margin: 0; text-align: center;"><math>X = -5 + Y</math></p> <p style="margin: 0; text-align: center;"><math>Y = Y</math></p> <p style="margin: 0; text-align: center;"><math>Z = 4</math></p> <p style="text-align: right; margin-top: 5px;">0</p> <p style="font-size: x-small; margin: 0;">REPEAT</p> </div>
	a	b	c	d																	
1	1	-1	0	-5																	
2	0	0	1	4																	
3	0	0	0	0																	

Ho farem de forma vectorial. Escrivim les rectes  $r$  i  $s$  en forma paramètrica:

$$r \equiv \begin{cases} x = \frac{1}{4} + \lambda \\ y = \frac{11}{4} - \lambda \\ z = 4\lambda \end{cases} . \text{ Un punt de } r \text{ és } A\left(\frac{1}{4}, \frac{11}{4}, 0\right) \text{ i el vector director } v = (1, -1, 4).$$

$$s \equiv \begin{cases} x = -5 + \mu \\ y = \mu \\ z = 4 \end{cases} . \text{ Un punt de } s \text{ és } B(-5, 0, 4) \text{ i el vector director } w = (1, 1, 0).$$

Obrim el *Menú Gráfico 3D*.  
 Definim les dues rectes.

Math Deg Norm1 d/c | a+bi

$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v}$

	$\vec{r}_0$		$\vec{v}$
X	0.25	X	1
Y	2.75	Y	-1
Z	0	Z	4

4

EXPRESS VECTOR P&V POINTS EDIT SET

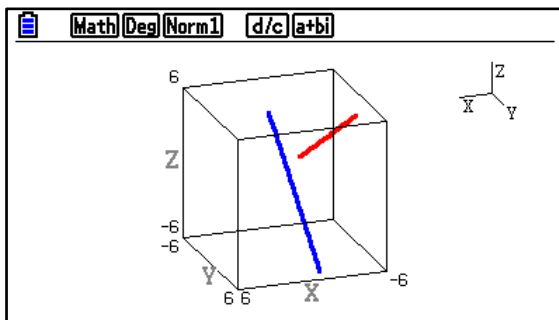
Math Deg Norm1 d/c | a+bi

$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v}$

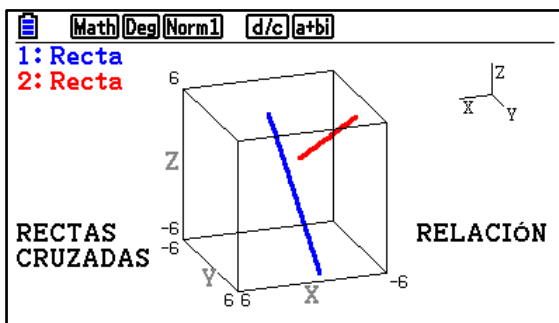
	$\vec{r}_0$		$\vec{v}$
X	-5	X	1
Y	0	Y	1
Z	4	Z	0

0

EXPRESS VECTOR P&V POINTS EDIT SET



Amb la funció *G-Solv* determinem la posició relativa de les dues rectes



Els vectors  $v, w$  són linealment independents ja que les components no són proporcionals. Aleshores, les rectes  $r, s$  es tallen o bé es creuen.

$$\overrightarrow{AB} = \left( -\frac{21}{4}, -\frac{11}{4}, 4 \right)$$

Estudiem la linealitat dels vectors  $\{v, w, \overrightarrow{AB}\}$ . Calculem el determinant format pels tres vectors:

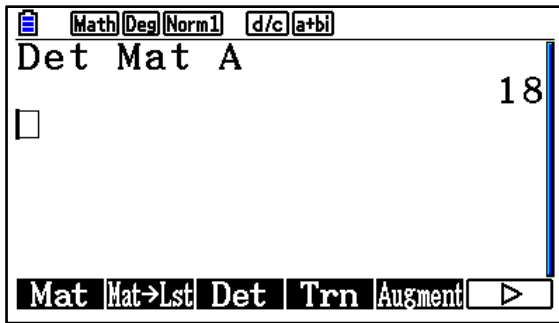
Obrim el *Menú Ejec-Mat*

Math Deg Norm1 d/c | a+bi

A	1	2	3
1	1	-1	4
2	1	1	0
3	-5.25	-2.75	4

4

ROW-OP ROW COLUMN EDIT



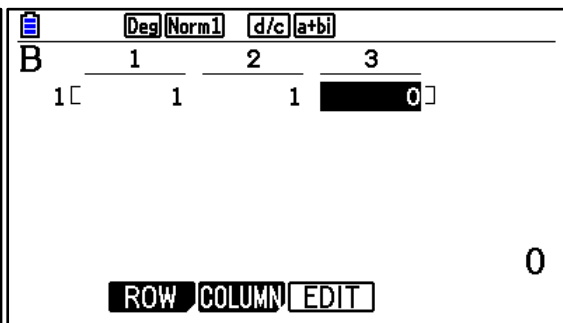
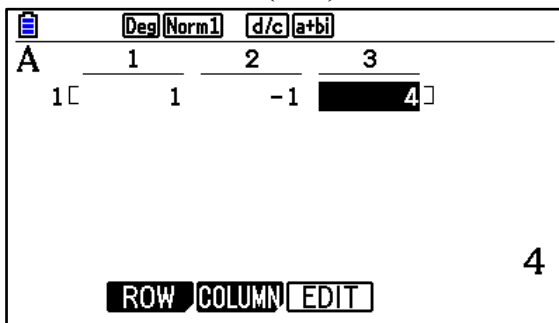
$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ \frac{21}{4} & -\frac{11}{4} & 4 \end{vmatrix} = 18 \neq 0, \text{ aleshores, } \{v, w, \overline{AB}\} \text{ són linealment independents. Per tant,}$$

les rectes r i s es creuen.

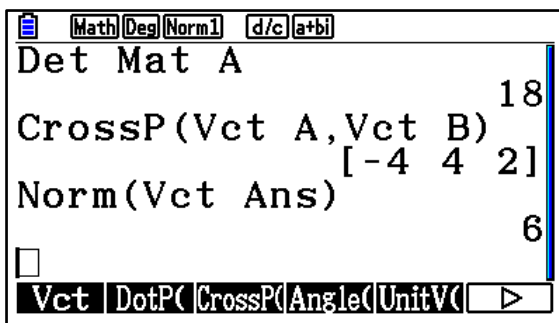
b)

Com que les rectes r i s es creuen,  $d(r,s) = \frac{|v, w, \overline{AB}|}{\|v \times w\|}$ .

Definim els vectors  $\{v, w\}$



Calculem el producte vectorial  $v \times w$



$$[v, w, \overline{AB}] = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{21}{4} & -\frac{11}{4} & 4 \end{vmatrix} = 18. \quad v \times w = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (4, -4, -2). \quad \|v \times w\| = 6.$$

$$d(r,s) = \frac{|[v, w, \overline{AB}]|}{\|v \times w\|} = \frac{|18|}{6} = 3.$$

c)

El plànol que cerquem és el que passa pel punt mig del segment  $\overline{AB}$  i té direcció  $\{v, w\}$

El punt mig del segment  $\overline{AB}$  és  $M\left(\frac{1-5}{2}, \frac{11+0}{2}, \frac{0+4}{2}\right)$ ,  $M\left(-\frac{19}{8}, \frac{11}{8}, 2\right)$ .

L'equació vectorial del plànol és:

$$\Pi \equiv (x, y, z) = \left(-\frac{19}{8}, \frac{11}{8}, 2\right) + \alpha(1, -1, 4) + \beta(1, 1, 0).$$

Obrim el *Menú Gráfico 3D*

Definim el plànol.

The image shows two screenshots from a 3D graphics menu. The left screenshot displays the vector equation editor with the following data:

	$\vec{r}_0$	$\vec{u}$	$\vec{v}$
X	-2.375	1	1
Y	1.375	-1	1
Z	2	4	0

The right screenshot shows a 3D coordinate system with a green plane and red and blue vectors. The axes are labeled X, Y, and Z, with values ranging from -6 to 6.

El feix de plànols de vector característic  $v \times w = (4, -4, -2)$  és:

$\Pi \equiv 4x - 4y - 2z + D = 0$ , el punt M pertany al plànol, aleshores:

$4\left(-\frac{19}{8}\right) - 4 \cdot \frac{11}{8} - 2 \cdot 2 + D = 0$ . Resolent l'equació:  $D = -19$ . El plànol que cerquem és:

$\Pi \equiv 4x - 4y - 2z - 19 = 0$ .