Problema

Es donen el punt $A(5,7,3)$ i la recta $r \equiv \frac{x-3}{-1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{2}$. Obteniu raonadament, escrivint tots els passos de raonament utilitzat:

a) La recta s que talla la recta r i és perpendicular a la recta r.
b) La distància del punt A a la recta r.
c) La distància del punt $B(1,1,1)$ al plànol Π que passa per $(3,-1,0)$ i és perpendicular a r.

Pau's València. Juny 2018

Solució:

a)

L'equació general de la recta és: $r \equiv \begin{cases} 3x + y - 8 = 0 \\ 2x + z - 6 = 0 \end{cases}$.

La recta r passa pel punt $P(3,-1,0)$ i té vector director $v = (-1,3,2)$.

La recta s passa pel punt A i pel punt projecció de A sobre la recta r.
Determinem el plànol Ω que passa per A i és perpendicular a r.
El vector característic és el vector director $v = (-1,3,2)$ de la recta r.

$\Omega \equiv -x + 3y + 2z + D = 0$. El punt A pertany a plànol.

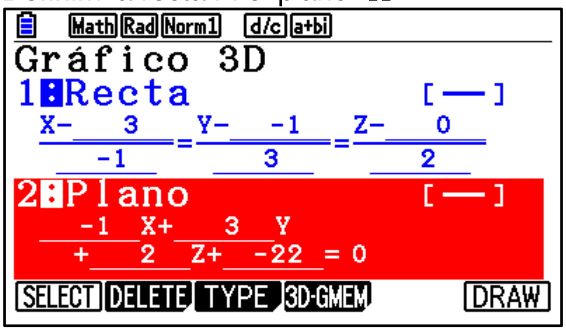
$-5 + 3\cdot 7 + 2\cdot 3 + D = 0$.

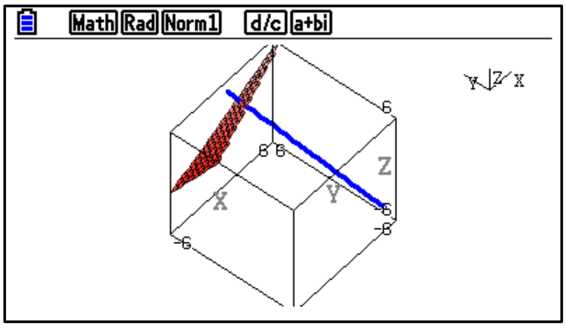
Resolent l'equació, $D = -22$.

$\Omega \equiv -x + 3y + 2z - 22 = 0$

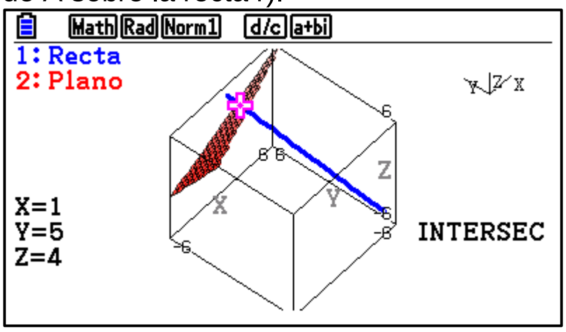
El punt projecció és la intersecció de la recta r i el plànol Ω.

Obrim el *Menú Gráfico 3D*
Definim la recta r i el plànol Ω





Amb la funció *G-Solv*, determinem la intersecció de la recta i el plànol (punt projecció de A sobre la recta r).

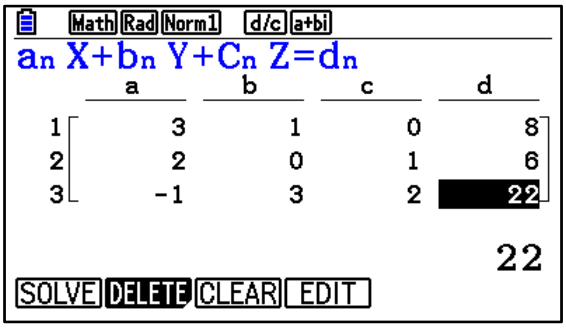


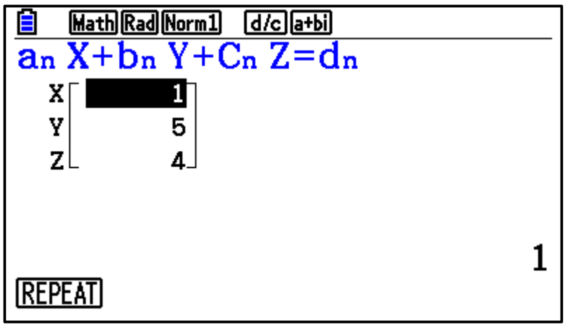
El punt projecció té coordenades $A_0(1,5,4)$.

Per calcular el punt projecció resoldrem el sistema format per les 3 equacions.

$$\begin{cases} 3x + y = 8 \\ 2x + z = 6 \\ -x + 3y + 2z = 22 \end{cases}$$

Obrim el *Menú Ecuación*:





El punt projecció té coordenades $A_0(1, 5, 4)$.

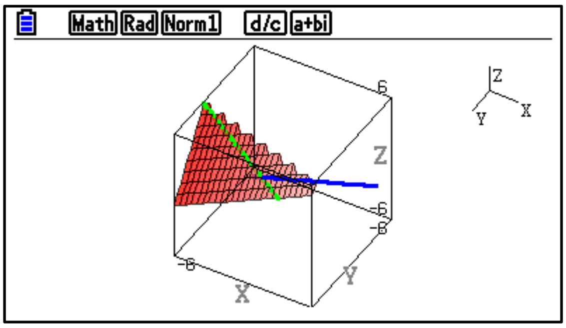
$\overrightarrow{AA_0} = (-4, -2, 1)$.

La recta s passa pel punt A i té vector director $\overrightarrow{AA_0} = (-4, -2, 1)$. La seua equació és:

$s \equiv (x, y, z) = (5, 7, 3) + \lambda(-4, -2, 1)$.

Obrim el *Menú Gráfico 3D*

Definim la recta s.



b)

La distància de A a la recta r és igual a la distància entre els punts A i $A_0(1, 5, 4)$.

$d(A, r) = d(A, A_0) = \left\|\overrightarrow{AA_0}\right\| = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{21}$.

c)

Determinem l'equació del plànol Π que passa per $(3, -1, 0)$ i és perpendicular a r.

El vector característic del plànol és el vector director $v = (-1, 3, 2)$ de la recta r.

El vector característic és el vector director $v = (-1, 3, 2)$ de la recta r.

$\Pi \equiv -x + 3y + 2z + D = 0$. El punt $(3, -1, 0)$ pertany a plànol.

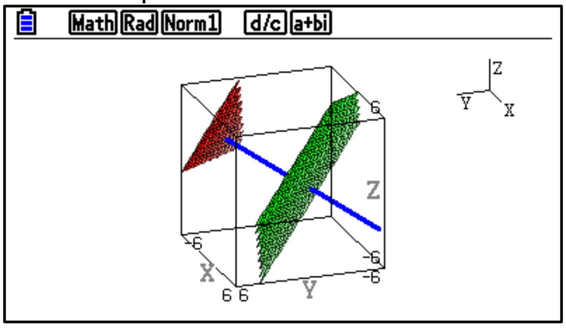
$-3 + 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 + D = 0$.

Resolent l'equació, $D = 6$.

$\Pi \equiv -x + 3y + 2z + 6 = 0$.

Obrim el *Menú Gráfico 3D*

Definim el plànol Π



La distancia del punt $B(1,1,1)$ al plànol $\Pi \equiv -x+3y+2z+6=0$ és:

$$d(B,\Pi)=\left|\frac{-1\cdot 1+3\cdot 1+2\cdot 1+6}{\sqrt{(-1)^2+3^2+2^2}}\right|=\frac{10}{\sqrt{14}}=\frac{5\sqrt{14}}{7}.$$