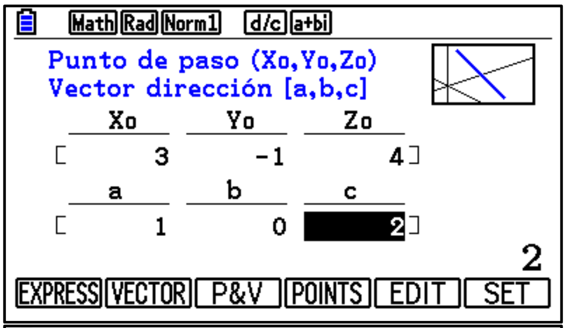
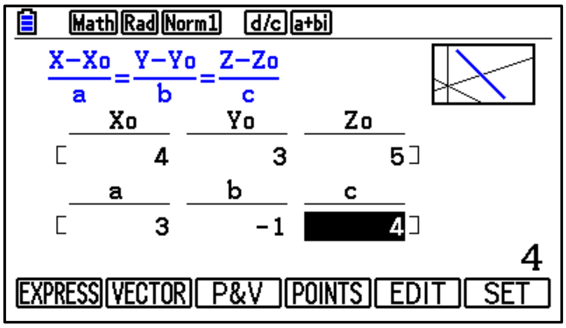
Problema

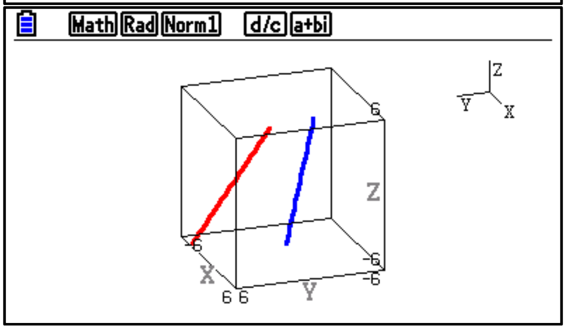
Donades les rectes $r \equiv \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = -1 \\ z = 4 + 2\lambda \end{cases}$, $s \equiv \dfrac{x-4}{3} = \dfrac{y-3}{-1} = \dfrac{z-5}{4}$.

a) Estudieu la seua posició relativa. Calculeu l'equació general del plànol que passa per l'origen de coordenades i és paral·lel a r i s.
b) Calculeu l'equació paramètrica de la recta que talla perpendicularment r i s.
Galícia 2015.

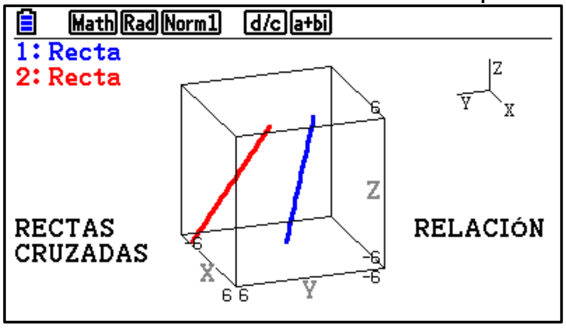
Solució:
Obrim el *Menú Gráfico 3D*
Definim les rectes r i s.







Amb la funció *G-Solv* determinem la posició relativa de ambdues rectes.



Les dues rectes és creuen.
Justifiquem els resultats anteriors.

Donada la recta $r \equiv \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = -1 \\ z = 4 + 2\lambda \end{cases}$ en forma paramètrica, un punt té coordenades $P(3, -1, 4)$ i vector director $v_r = (1, 0, 2)$.

Donada la recta $s \equiv \dfrac{x-4}{3} = \dfrac{y-3}{-1} = \dfrac{z-5}{4}$ en forma contínua $Q(4, 3, 5)$ i vector director $v_s = (3, -1, 4)$.

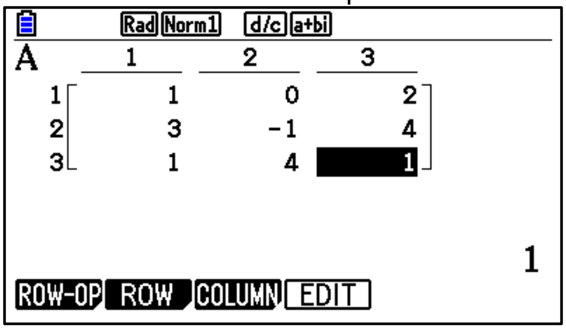
Els vectors $\{v_r, v_s\}$ són linealment independents ja que les seues components no són proporcionals, $\frac{1}{3} \neq \frac{0}{-1}$. Aleshores les rectes són secants o bé, es creuen.

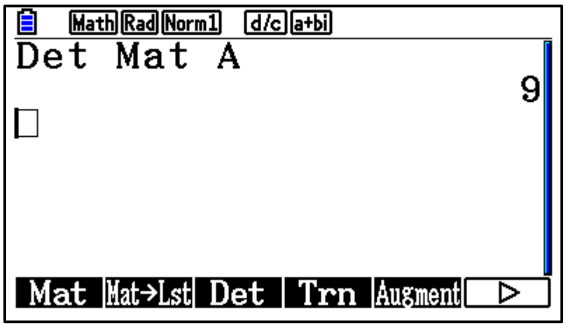
Estudiem la linealitat dels vectors $\{v_r, v_s, \overrightarrow{PQ} = (1, 4, 1)\}$

Calculem el determinant format pels tres vectors: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$.

Obrim el *Menú Ejec-Mat*:

Definim la matriu formada pels tres vectors.





$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$, aleshores, les dues rectes es creuen.

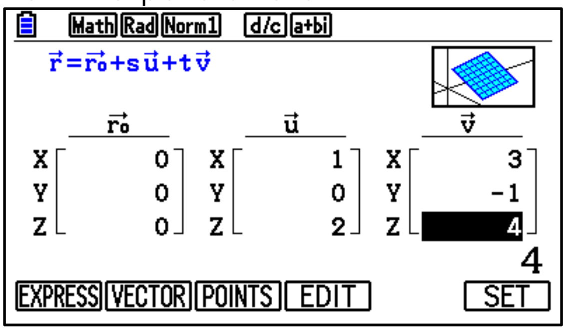
L'equació general del plànol que passa per l'origen de coordenades $O(0, 0, 0)$ i és paral·lel a r i s, té vectors directors $\{v_r, v_s\}$

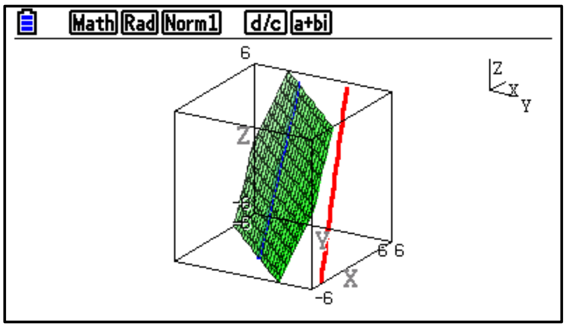
La seua equació vectorial és:

$(x, y, z) = (0, 0, 0) + \alpha(1, 0, 2) + \beta(3, -1, 4)$.

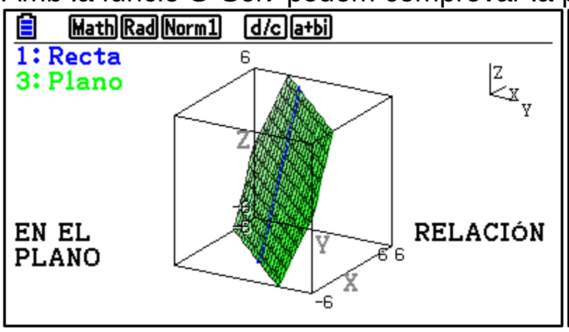
Obrim el *Menú Gráfico 3D*

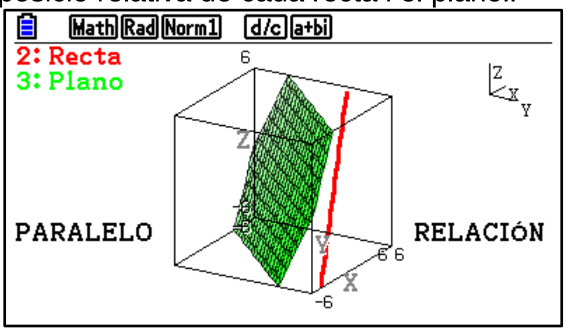
Definim el plànol anterior.





Amb la funció *G-Solv* podem comprovar la posició relativa de cada recta i el plànol.





b)

Considerem un punt qualsevol K de r, $K(3+\alpha, -1, 4+2\alpha)$

Considerem un punt qualsevol L de s, $L(4+3\beta, 3-\beta, 5+4\beta)$

Calculem les components del vector $\overrightarrow{KL} = (1+3\beta-\alpha, 4-\beta, 1+4\beta-2\alpha)$

A fi que la recta que passa pels punts K, L siga perpendicular a les rectes r i s, s'ha d'acomplir que $\overrightarrow{KL} \cdot v_r = 0$, $\overrightarrow{KL} \cdot v_s = 0$.

$(1+3\beta-\alpha, 4-\beta, 1+4\beta-2\alpha)(1, 0, 2) = 0$.

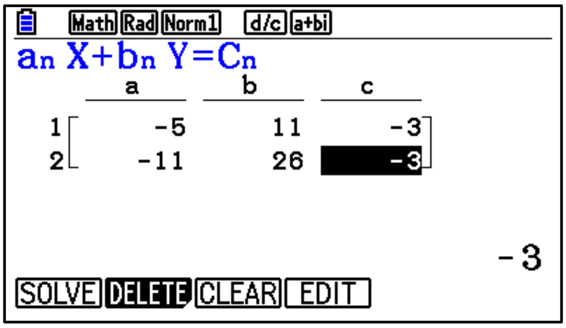
$(1+3\beta-\alpha, 4-\beta, 1+4\beta-2\alpha)(3, -1, 4) = 0$.

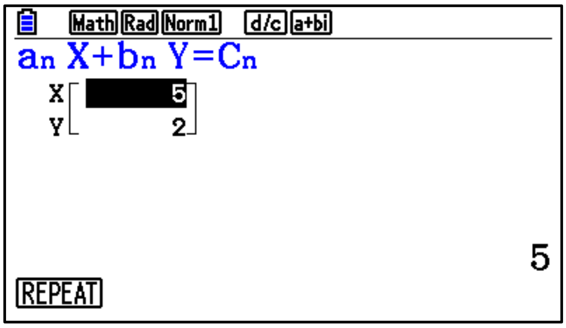
Considerem el sistema format per les dues equacions:

$$\begin{cases} -5\alpha + 11\beta = -3 \\ -11\alpha + 26\beta = -3 \end{cases}$$

Obrim el *Menú Ecuación.*

Resolem el sistema:



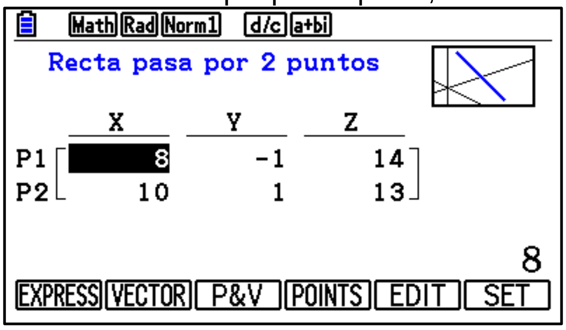


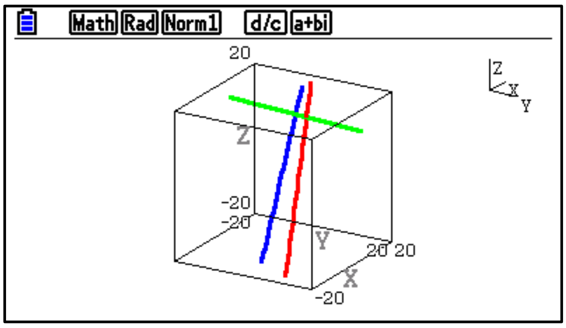
La solució del sistema és, $\begin{cases} \alpha = 5 \\ \beta = 2 \end{cases}$.

Aleshores, les coordenades de K i L són $K(8, -1, 14)$, $L(10, 1, 13)$

Obrim el *Menú Gráfico 3D.*

Definim la recta que passa per K, L.





$\overrightarrow{KL} = (2, 2, -1)$

L'equació paramètrica de la recta que passa pels punts K L, perpendicular a les rectes r i s és:

$$\begin{cases} x = 8 + 2\lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = 14 - \lambda \end{cases}$$