Problema

Siguen el plànol $\Pi \equiv x - y + z - 3 = 0$, la recta $s \equiv \begin{cases} x - 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ i el punt $A(1,1,1)$.

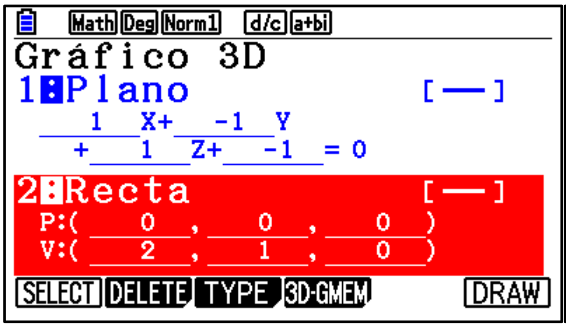
Obteniu raonadament, escrivint tots els passos de raonament utilitzat:
a) Recta que passa per A, talla la recta s i és paral·lela al plànol Π.
b) Plànol que passa per A, és perpendicular al plànol Π i paral·lel a la recta s.
c) Discutiu si el punt $(3,2,1)$ està en la recta paral·lela a s que passa per $(5,3,1)$.

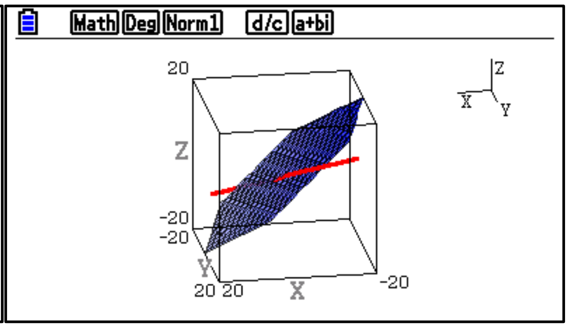
Solució:
El vector característic del plànol Π és $a = (1,-1,1)$.
Passem l'equació de la recta s a la forma cartesiana:

$s \equiv \begin{cases} x = 2\alpha \\ y = \alpha \\ z = 0 \end{cases}$. Un punt qualsevol de la recta s és $P(2\alpha, \alpha, 0)$.

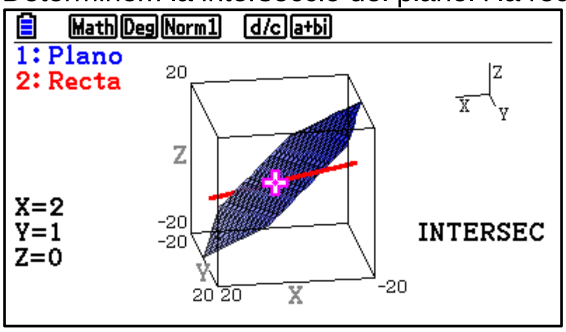
a)
Determinem el plànol Π' paral·lel al plànol $\Pi \equiv x - y + z - 3 = 0$ que passa per $A(1,1,1)$
La seua equació és $\Pi' \equiv x - y + z + D = 0$. Per determinar D, fem que $A(1,1,1)$ pertany al plànol:
$1 - 1 + 1 + D = 0$. Aleshores, $D = -1$
$\Pi' \equiv x - y + z - 1 = 0$
Obrim el *Menú Gráfico 3D*

Dibuixem el plànol $\Pi' \equiv x - y + z - 1 = 0$ i la recta $s \equiv \begin{cases} x = 2\alpha \\ y = \alpha \\ z = 0 \end{cases}$.





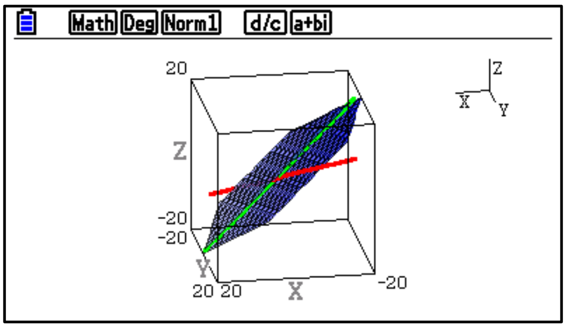
Determinem la intersecció del plànol i la recta amb la funció *G-Solv*



El punt intersecció és $B(2,1,0)$

La recta que cerquem passa pel punt A i té direcció $\overrightarrow{AB} = (1,0,-1)$

La seua equació de la recta r és:
$r \equiv (x,y,z) = (1,1,1) + \mu(1,0,-1)$



a)

El vector director de la recta r que cerquem és $\overrightarrow{AP} = (2\alpha - 1, \alpha - 1, -1)$.

La recta r ha de ser paral·lela al plànol Π, aleshores, el vector director de la recta és ortogonal al vector característic del plànol.

$\overrightarrow{AP} \cdot a = 0$

$(2\alpha - 1) \cdot 1 + (\alpha - 1)(-1) + (-1) \cdot 1 = 0$. Resolent l'equació:

$\alpha = 1$. Aleshores, $\overrightarrow{AP} = (1, 0, -1)$.

L'equació vectorial de la recta r és:

$r \equiv (x, y, z) = (1, 1, 1) + \mu(1, 0, -1)$.

b)

El vector director de la recta s és $v = (2, 1, 0)$.

El vector director de la recta s és un dels vectors directors del plànol.

Com el plànol que cerquem ha de ser perpendicular al plànol Π, el vector característic de Π és un dels vectors directors del plànol

Els vectors v, a són linealment independents.

El plànol Ω que cerquem passa pel punt A i té direcció els vectors $\{v, a\}$ La seua equació vectorial és:

$\Omega \equiv (x, y, z) = (1, 1, 1) + \alpha(2, 1, 0) + \beta(1, -1, 1)$.

c)

La recta paral·lela a s té vector director $v = (2, 1, 0)$.

Si el punt $B(3, 2, 1)$ pertany a la recta paral·lela a s que passa pel punt $C(5, 3, 1)$, els vectors $\{\overrightarrow{BC}, v\}$ han de ser linealment dependents.

$\overrightarrow{BC} = (2, 1, 0)$.

$\overrightarrow{BC} = v$.

Aleshores, si el punt $(3, 2, 1)$ està en la recta paral·lela a s que passa per $(5, 3, 1)$.