Problema

Es donen les rectes $r_1 \equiv \begin{cases} x = 1+2\alpha \\ y = \alpha \\ z = 2-\alpha \end{cases}$ i $r_2 \equiv \begin{cases} x = -1 \\ y = 1+\beta \\ z = -1-2\beta \end{cases}$, essent α i β paràmetres reals.

Calculeu raonadament:

a) Les coordenades del punt de tall de r_1 i r_2.

b) L'equació del pla que conté aquestes dues rectes.

c) La distància del punt $(0, 0, 1)$ a la recta r_2.

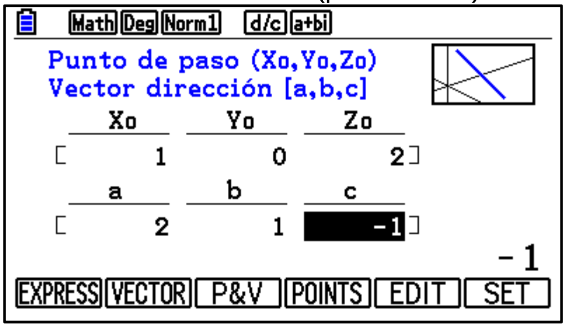
Pau's València, juny 2012

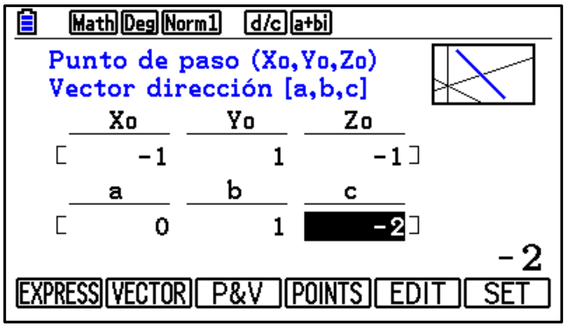
Solució:

a)

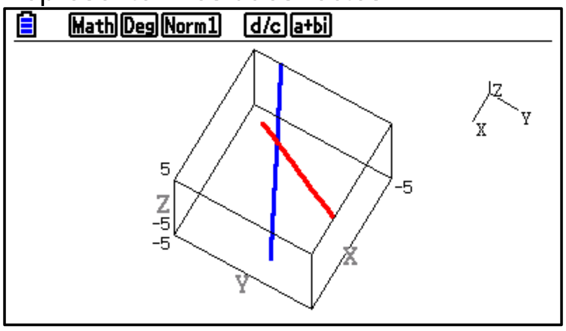
Obrim el *Menú Geometría 3D*

Definim les dues rectes (punt-vector)

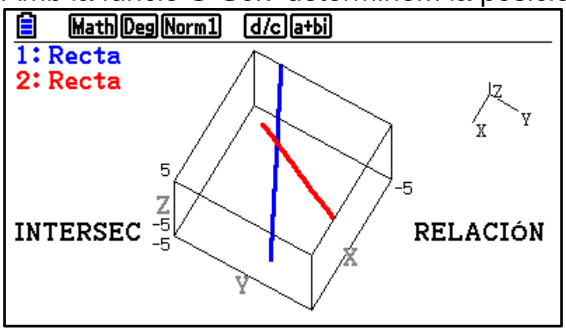


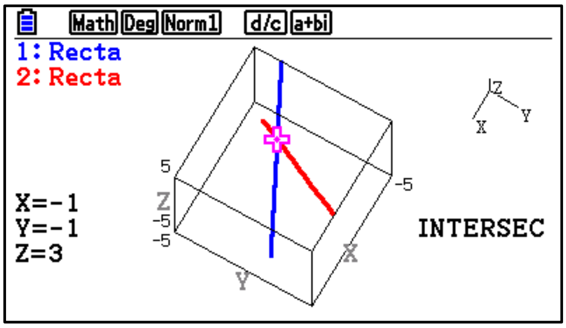


Representem les dues rectes



Amb la funció *G-Solv* determinem la posició relativa de les dues rectes i la intersecció.





Les rectes són secants i el punt d'intersecció és $P(-1, -1, 3)$

Determinem analíticament la intersecció (punt de tall) de les rectes r_1 i r_2.

$\begin{cases} 1+2\alpha = -1 \\ \alpha = 1+\beta \\ 2-\alpha = -1-2\beta \end{cases}$, el sistema és compatible determinat i la solució és: $\begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = -2 \end{cases}$.

Substituint el valor del paràmetre α en l'equació de la recta r_1:

$$\begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \\ z=3 \end{cases}$$, el punt d'intersecció és $P(-1,-1,3)$.

b)

El vector director de la recta r_1 és: $v=(2,1,-1)$.

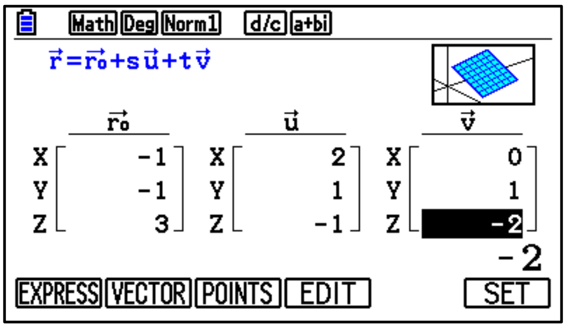
El vector director de la recta r_2 és: $w=(0,1,-2)$.

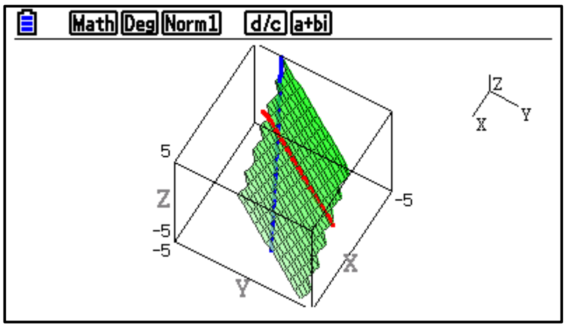
Els vectors v i w són linealment independents, perquè les components no són proporcionals.

El plànol que conté les rectes r_1 i r_2 és el plànol que passa pel punt $P(-1,-1,3)$ i té direcció $v=(2,1,-1)$, $w=(0,1,-2)$.

Definim el plànol (punt, vectors)

$\Pi \equiv (x,y,z)=(-1,-1,3)+\alpha(2,1,-2)+\beta(0,1,-2)$





Analíticament la seua equació és:

$$\Pi \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y+1 & z-3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}=0$$. En forma general, $\Pi \equiv -x+4y+2z-3=0$.

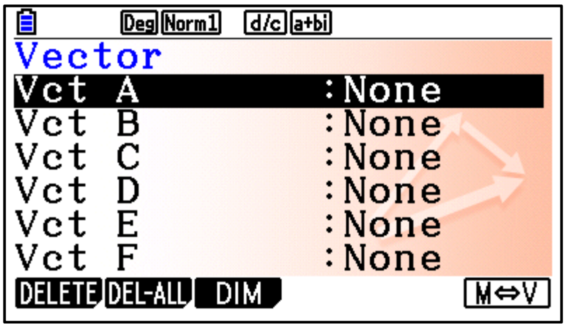
c)

Un punt de la recta r_2 és $A(-1,1,-1)$. Siga $Q(0,0,1)$.

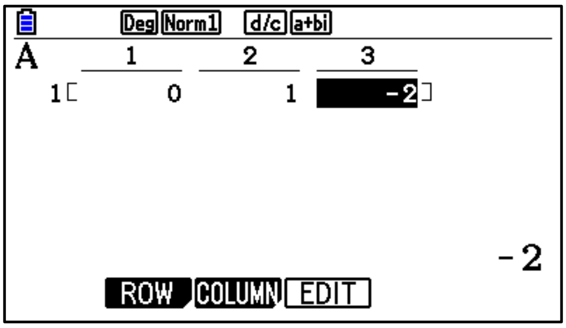
$\overrightarrow{AQ}=(1,-1,2)$, $w=(0,1,-2)$, $d(Q,r_2)=\dfrac{\left\|w\times\overrightarrow{AQ}\right\|}{\|w\|}$

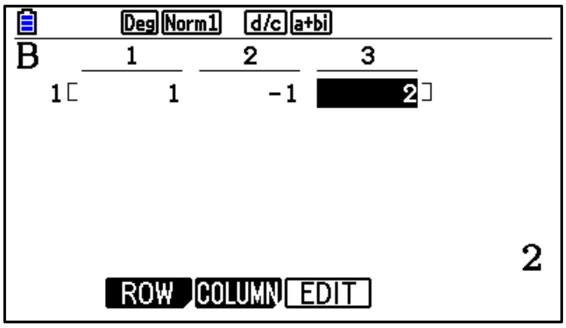
Obrim el *Menú Ejec-Mat*

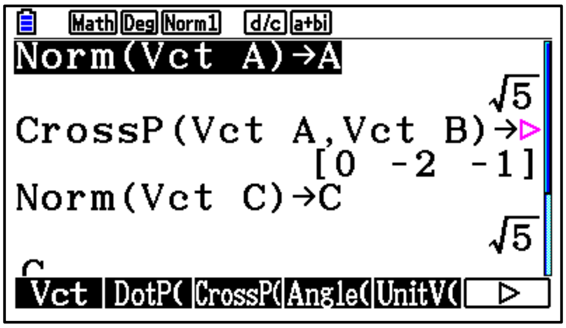
Definim els dos vectors.

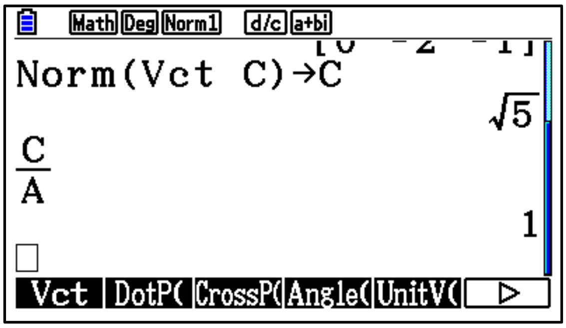


Utilitzem les funcions producte vectorial i mòdul d'un vector.









Analíticament,

Siga $Q(0, 0, 1)$.

La distància de Q a la recta r_2 és:

$$d(Q, r_2) = \frac{\left\| w \times \overrightarrow{AQ} \right\|}{\|w\|}.$$

$\overrightarrow{AQ} = (1, -1, 2)$. $\quad w \times \overrightarrow{AQ} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (0, -2, -1)$.

$\left\| w \times \overrightarrow{AQ} \right\| = \|(0, -2, -1)\| = \sqrt{5}$, $\|w\| = \|(0, 1, -2)\| = \sqrt{5}$.

Aleshores: $d(Q, r_2) = \dfrac{\left\| w \times \overrightarrow{AQ} \right\|}{\|w\|} = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1.$