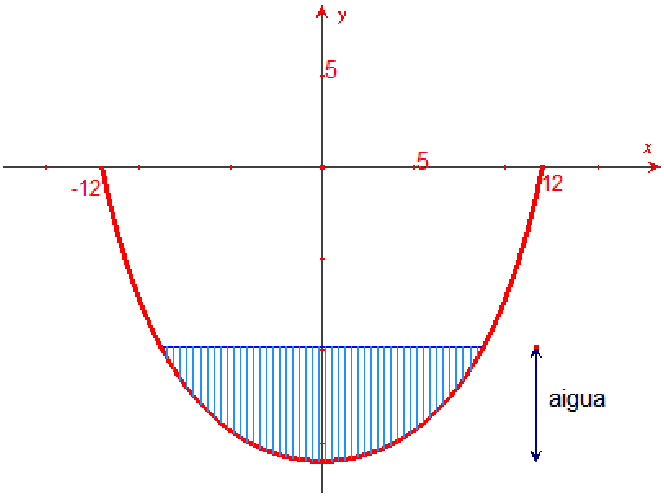
Problema

La secció vertical d'un canal ve donada per la funció $y = \frac{16}{\cos\left(\frac{\pi x}{36}\right)} - 32$, x, y metres.

La figura mostra el límit de l'aigua.

El canal sempre té la mateixa secció.



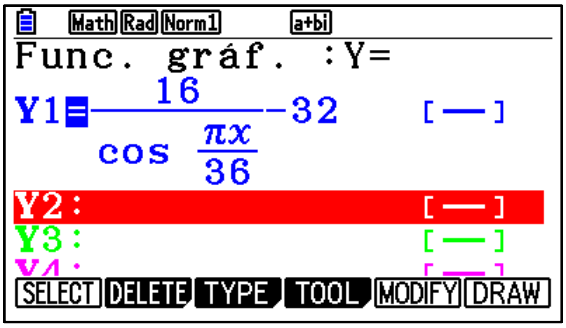
L'amplada del canal és de 24 metres i la màxima profunditat és de 16 metres.

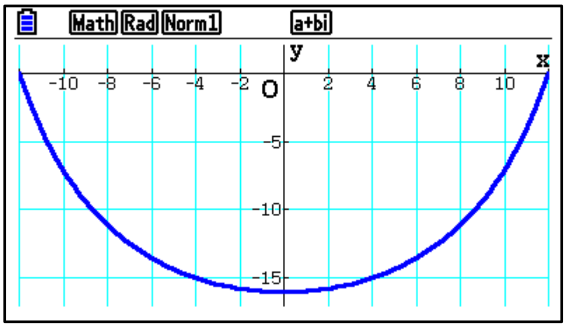
a) Calculeu l'amplada de la superfície de l'aigua quan la profunditat és de 10 metres

b) El canal té 200 metres. Calculeu el volum màxim de l'aigua.

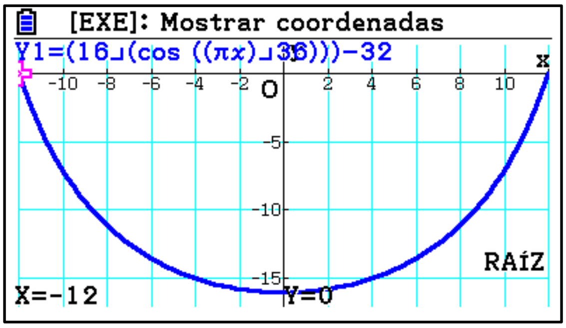
Solució:

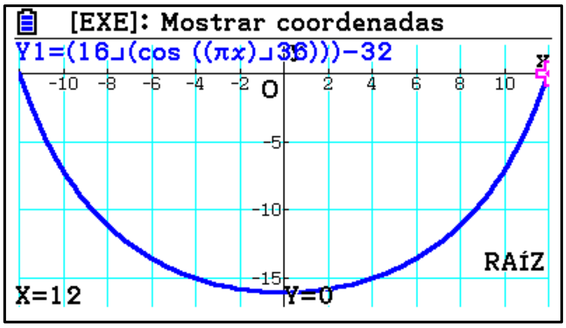
Obrim el Menú Gràfico. Definim i representem la funció $y = \frac{16}{\cos\left(\frac{\pi x}{36}\right)} - 32$



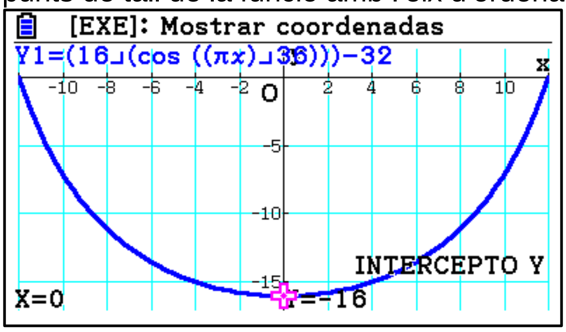


Notem que l'amplada del canal és 24 metres calculant amb la funció *G-Solv*, els punts de tall de la funció amb l'eix d'abscisses.



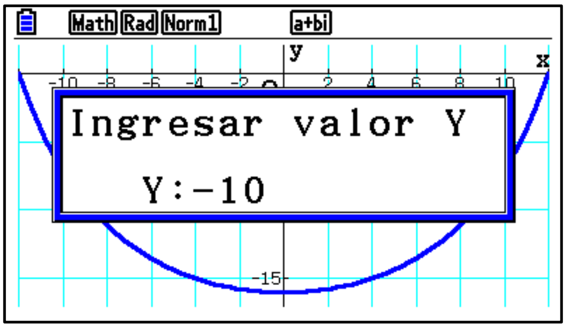


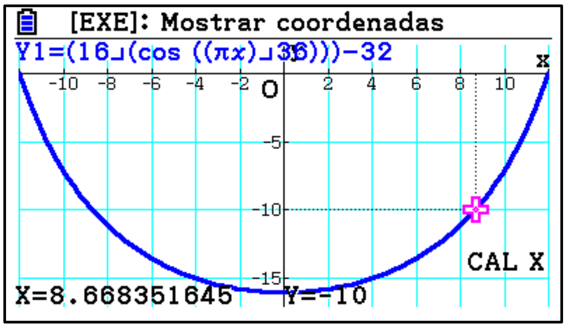
Notem que la profunditat del canal és 16 metres calculant amb la funció *G-Solv*, els punts de tall de la funció amb l'eix d'ordenades.



a)

Per calcular per a quina amplada del canal la profunditat de la superfície de l'aigua és de 10 metres, calculem $2 \cdot y^{-1}(-10)$



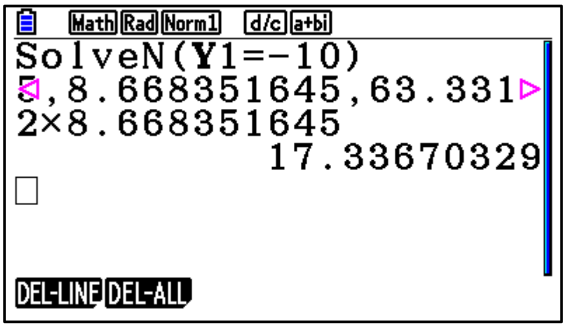


L'amplada del canal és $2x = 17.3367$ metres

Obrim el Menú Ejec-Mat

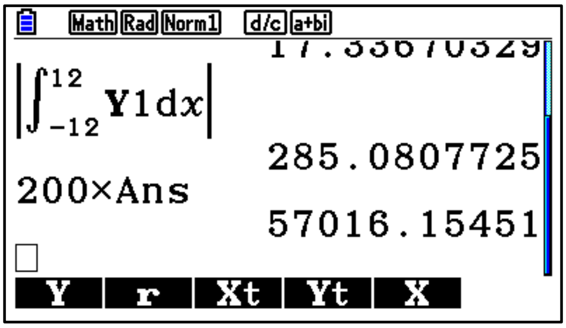
Resolem l'equació $Y1 = -10$

Calculem $2x$



b)

Per calcular el volum màxim, calcularem la secció màxima vertical del canal i la multipliquem per la longitud del canal.



El Volum és 57016.155 m^3

Nota:
Calculem $\int \frac{1}{\cos(kx)} dx$

Efectuem el canvi $t = \cos(kx)$
$dt = -k \cdot \sin t \, dx$

$$\int \frac{1}{\cos(kx)} dx = -\frac{1}{k} \int \frac{1}{t\sqrt{1-t^2}} dt$$

Efectuem el canvi $u^2 = 1 - t^2$
$u \cdot du = -t \cdot dt$

$$\int \frac{1}{\cos(kx)} dx = -\frac{1}{k} \int \frac{1}{t\sqrt{1-t^2}} dt = -\frac{1}{k} \int \frac{1}{1-u^2} du = \frac{1}{k} \int \frac{1}{u^2-1} du$$

$$\frac{1}{u^2-1} = \frac{A}{u+1} + \frac{B}{u-1}$$

$$1 = A(u-1) + B(u+1)$$

Si $u = 1$, aleshores, $B = \frac{1}{2}$
Si $u = -1$, aleshores, $A = -\frac{1}{2}$

$$\int \frac{1}{\cos(kx)} dx = \frac{1}{k} \int \frac{1}{u^2-1} du = \frac{1}{k}\frac{1}{2}(\ln|u-1| + \ln|u+1|) + C = \frac{1}{2k} \ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| + C$$

Desfent els canvis:

$$\int \frac{1}{\cos(kx)} dx = \frac{1}{2k} \ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| + C = \frac{1}{2k} \ln \frac{1-\sin kx}{1+\sin kx} + C$$

$$\int \left(\frac{16}{\cos\left(\frac{\pi x}{36}\right)} - 32 \right) dx = 16 \frac{1}{2\frac{\pi}{36}} \ln\left(\frac{1-\sin\frac{\pi x}{36}}{1+\sin\frac{\pi x}{36}} \right) - 32x + C$$