Problema

Siga $f(x) = 3x^4 + ax^3 + bx^2 - 7x - 4$, on a, b són nombres reals positius.

a) Saben que $x^2 - 1$ és factor de $f(x)$, determineu els valors a, b
b) Factoritzeu $f(x)$, expressant-lo com producte de factors lineals.
c) Dibuixeu aproximadament la funció $f(x)$ i determineu els màxims, els mínims i els punts de tall amb els eixos coordenats.
d) Utilitzant aquest gràfic, indiqueu el rang dels valors de c per als quals $f(x) = c$ té exactament dues solucions reals distintes.

Solució:

a)

Si $x^2 - 1$, aleshores $f(1) = 0, f(-1) = 0$

$$\begin{cases} 3 + a + b - 7 - 4 = 0 \\ 3 - a + b + 7 - 4 = 0 \end{cases}$$

$\begin{cases} a + b = 8 \\ a + b = -6 \end{cases}$ Resolent el sistema:

$$\begin{cases} a = 7 \\ b = 1 \end{cases}$$

$f(x) = 3x^4 + 7x^3 + x^2 - 7x - 4$

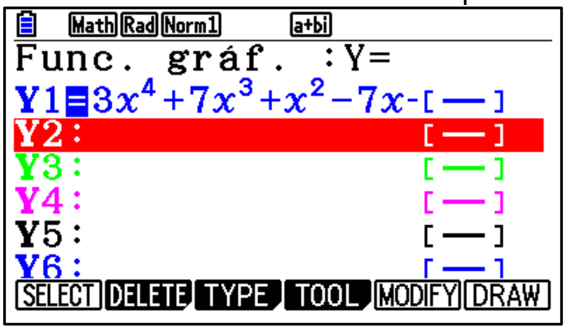
b)

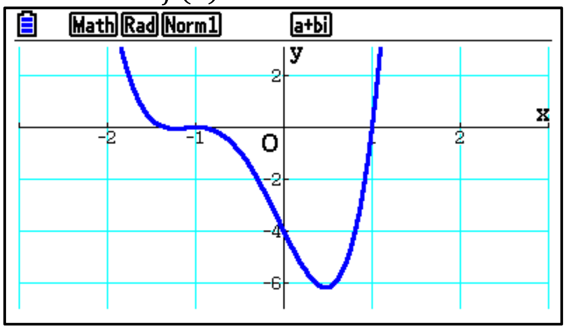
Aplicant la regla de Ruffini:

$f(x) = 3x^4 + 7x^3 + x^2 - 7x - 4 = (x - 1)(x + 1)^2(3x + 4)$

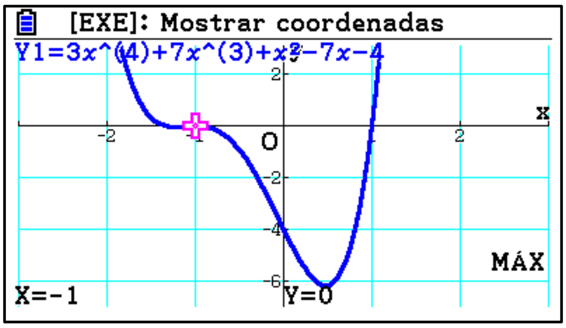
c)

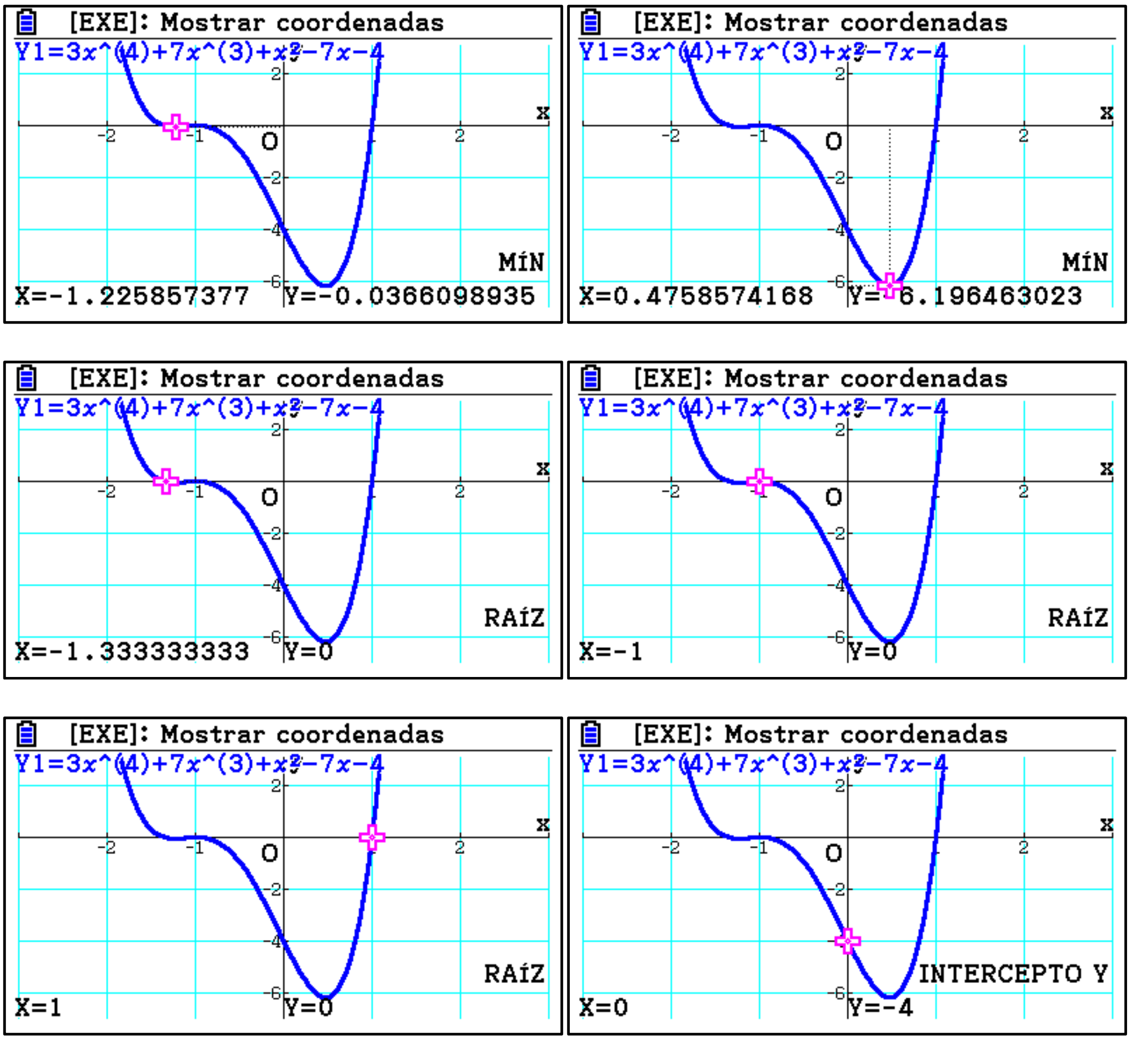
Obrim el *Menú Gráfico*. Definim i representem la funció $f(x) = 3x^4 + 7x^3 + x^2 - 7x - 4$





Amb la funció *G-Solv*, determinem els extrems locals i els punts de tall amb els eixos coordenats.





El màxim relatiu és el punt $(-1, 0)$
Els mínim relatius són $(-1.2259, -0.0366), (0.4759, 6.1965)$
Els punts de tall amb l'eix d'abscisses són $\left(-\frac{4}{3}, 0\right), (-1,0), (1,0)$
El punt de tall amb l'eix d'ordenades és $(0, -4)$

b)
Observant la gràfica l'equació $f(x) = c$ té 3 solucions quan $c = -0.0366, c = 0$
Té 4 solucions quan $c \in]-0.0366,0[$
En la resta té dues solucions $c \in \mathbb{R} \sim [-0.0366,0]$