

Problema

Siguen les rectes r, s de \mathbb{R}^3 d'equacions $r \equiv \frac{x-2}{3} = y = \frac{z+1}{4}$,

$s \equiv (x, y, z) = (1+2\alpha, 3-\alpha, 4+3\alpha)$, amb $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Comproveu que els punts mitjans dels segments que tenen un extrem situat sobre la recta r i l'altre extrem situat sobre la recta s formen un plànel.

b) Determineu l'equació general (és a dir, que té la forma $Ax + By + Cz = D$) del plànel de l'apartat anterior.

Solució:

La recta r passa pel punt $A(2, 0, -1)$ i té direcció $v = (3, 1, 4)$

La recta s passa pel punt $B(1, 3, 4)$ i té direcció $w = (2, -1, 3)$

El punt mig del segment \overline{AB} és $M\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$

Obrim el *Menú Gráfico 3D*

Definim les dues rectes i les representem:

Math Rad Norm1 d/c a+bi

Punto de paso (X_0, Y_0, Z_0)
 Vector dirección $[a, b, c]$

X_0	Y_0	Z_0
[2]	[0]	[-1]
a	b	c
[3]	[1]	[4]

4

EXPRESS VECTOR P&V POINTS EDIT SET

Math Rad Norm1 d/c a+bi

$\frac{X-X_0}{a} = \frac{Y-Y_0}{b} = \frac{Z-Z_0}{c}$

X_0	Y_0	Z_0
[1]	[3]	[4]
a	b	c
[2]	[-1]	[3]

3

EXPRESS VECTOR P&V POINTS EDIT SET

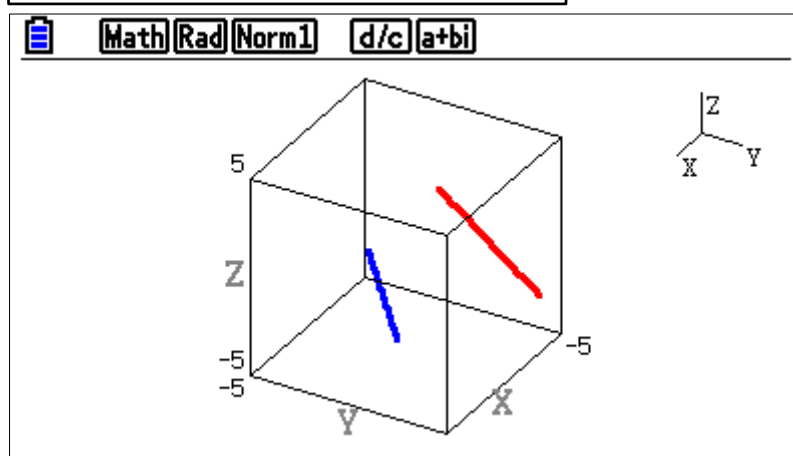
Math Rad Norm1 d/c a+bi

Gráfico 3D

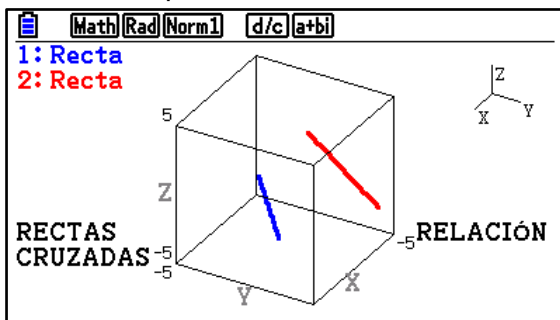
1 Recta [—]
 P: (2 , 0 , -1)
 V: (3 , 1 , 4)

2 Recta [—]
 $\frac{X-1}{2} = \frac{Y-3}{-1} = \frac{Z-4}{3}$

SELECT DELETE TYPE 3D-GMEM DRAW



Estudiem la posició relativa de les dues rectes amb la funció G-Solv.



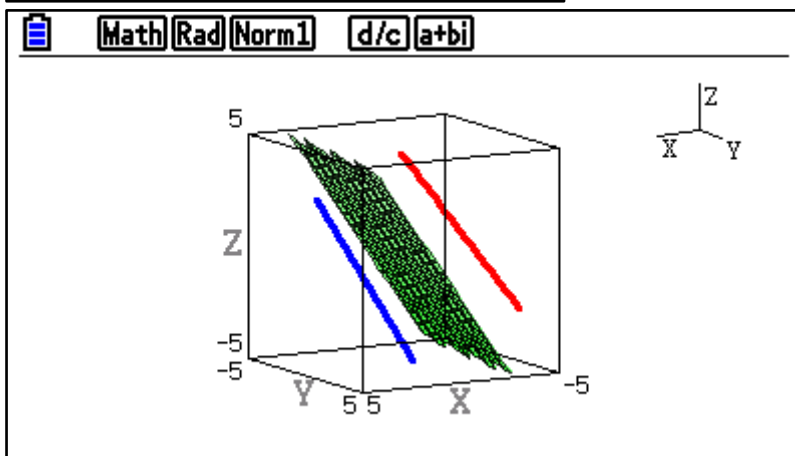
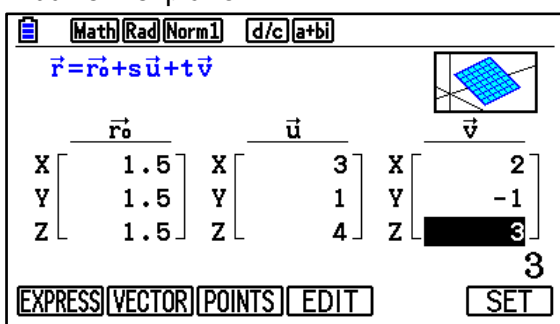
Les rectes es creuen.

El plànel que cerquem, és el plànel mediador de les dues rectes.

El plànel que passa està a igual distància de les dues rectes

El plànel que passa per $M\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ i té direcció els vectors $v = (3, 1, 4)$, $w = (2, -1, 3)$

Dibuixem el plànel:



Solució analítica:

Un punt qualsevol de la recta r té coordenades: $P(2 + 3\mu, \mu, -1 + 4\mu)$.

Un punt qualsevol de la recta s té coordenades: $Q(1 + 2\alpha, 3 - \alpha, 4 + 3\alpha)$

El punt mig M del segment \overline{PQ} té coordenades:

$$M\left(\frac{2 + 3\mu + 1 + 3\alpha}{2}, \frac{\mu + 3 - \alpha}{2}, \frac{-1 + 4\mu + 4 + 3\alpha}{2}\right).$$

El lloc geomètric dels punts M té equació:

$$(x, y, z) = \left(\frac{3 + 3\mu + 3\alpha}{2}, \frac{3 + \mu - \alpha}{2}, \frac{3 + 4\mu + 3\alpha}{2}\right).$$

Igualant les coordenades:

$$\begin{cases} x = \frac{3 + 3\mu + 3\alpha}{2} \\ y = \frac{3 + \mu - \alpha}{2} \\ z = \frac{3 + 4\mu + 3\alpha}{2} \end{cases}$$

Resolent les dues primeres equacions:

$$\begin{cases} \mu = \frac{2x - 6y + 24}{5} \\ \alpha = \frac{2x + 4y - 9}{5} \end{cases}$$

Substituint en la tercera equació i simplificant:

$$7x - y - 5z = \frac{3}{2}$$

Aquesta és l'equació del plànel que passa pel punt $M\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ i té per vectors

directors $v = (3, 1, 4)$, $w = (2, -1, 3)$, vectors directores de les rectes r , s .

L'equació general d'aquest plànel és:

$$\Pi \equiv \begin{vmatrix} x - \frac{3}{2} & y - \frac{3}{2} & z - \frac{3}{2} \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0. \text{ Simplificant: } \Pi \equiv 7x - y - 5z = \frac{3}{2}$$