

En l'esfera d'equació $E \equiv (x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 25$ determineu el punt M més pròxim al plànol $\Pi \equiv 3x - 4y + 19 = 0$ i calculeu la distància del punt M a aquest plànol.

Solució:

L'esfera té centre el punt $O(1, -2, 3)$ i radi $r = 5$

Vegem que el plànol és exterior a l'esfera.

Calculem la distància del centre $O(1, -2, 3)$ al plànol $\Pi \equiv 3x - 4y + 19 = 0$

$$d(O, \Pi) = \frac{|3 \cdot 1 - 4 \cdot (-2) + 0 \cdot 3 + 19|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2 + 0^2}} = 6$$

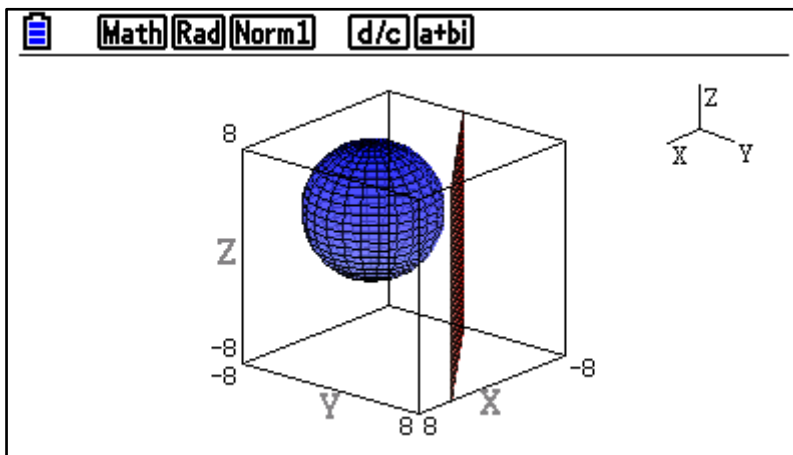
$$d(O, \Pi) = 6 > r = 5$$

Aleshores, el plànol és exterior a l'esfera.

Obrim el *Menú Gráfico 3D*

Definim i dibuixem l'esfera i el plànol.

The image shows two screenshots of a 3D calculator interface. The left window displays the sphere equation $(X-a)^2+(Y-b)^2+(Z-c)^2=r^2$ with parameters $a=1$, $b=-2$, $c=3$, and $r=5$. The right window displays the plane equation $aX+bY+cZ+d=0$ with parameters $a=3$, $b=-4$, $c=0$, and $d=19$.



La recta perpendicular al plànol $\Pi \equiv 3x - 4y + 19 = 0$ que passa pel centre $O(1, -2, 3)$ té vector director el característic del plànol $a = (3, -4, 0)$.

La seua equació és:

$$r \equiv (x, y, z) = (1, -2, 3) + \alpha(3, -4, 0)$$

Un punt qualsevol de la recta té coordenades:

$$M(1 + 3\alpha, -2 - 4\alpha, 3)$$

Substituint les coordenades del punt en l'equació del plànol:

$$(3\alpha)^2 + (-4\alpha)^2 = 25$$

Resolent l'equació:

$$\alpha = 1, -1$$

Si $\alpha = 1$ el punt intersecció té coordenades $M_1(4, -6, 3)$

Si $\alpha = -1$ el punt intersecció té coordenades $M_2(-2, 2, 3)$

Calculem la distància del punt $M_1(4, -6, 3)$ al plànel $\Pi \equiv 3x - 4y + 19 = 0$

$$d(M_1, \Pi) = \left| \frac{3 \cdot 4 - 4 \cdot (-6) + 0 \cdot 3 + 19}{\sqrt{3^2 + (-4)^2 + 0^2}} \right| = 11$$

Calculem la distància del punt $M_2(-2, 2, 3)$ al plànel $\Pi \equiv 3x - 4y + 19 = 0$

$$d(M_2, \Pi) = \left| \frac{3 \cdot (-2) - 4 \cdot 2 + 0 \cdot 3 + 19}{\sqrt{3^2 + (-4)^2 + 0^2}} \right| = 1$$

El punt més pròxim al plànel $\Pi \equiv 3x - 4y + 19 = 0$ és $M_2(-2, 2, 3)$