Siguen les esferes d'equacions

$E_1 \equiv x^2 + y^2 + z^2 = 25,\ E_2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 15y - 25z = 0$

a) Proveu que les dues esferes són secants.
b) Determineu el plànol que conté la intersecció de les dues esferes.
c) Determineu el centre i el radi de la circumferència intersecció.

Solució:

a)

L'esfera $E_1 \equiv x^2 + y^2 + z^2 = 25$ té centre $O_1(0,0,0)$ i radi $R_1 = 5$

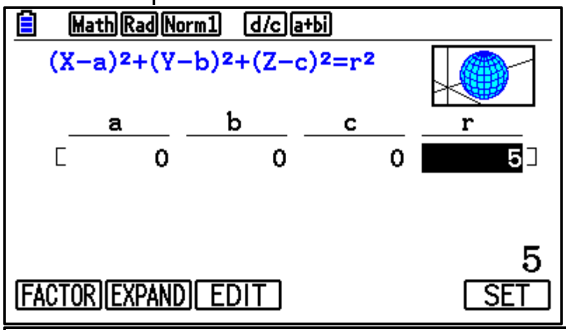
Completant quadrat en l'esfera $E_2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 15y - 25z = 0$

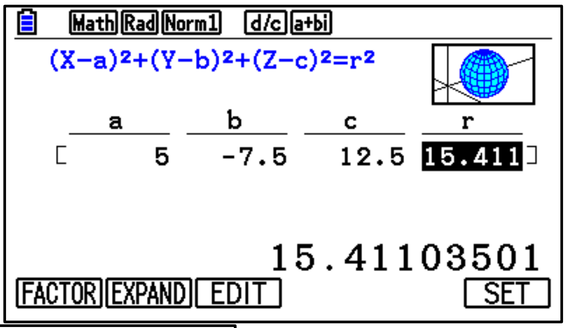
$$(x-5)^2 + \left(y + \frac{15}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{25}{2}\right)^2 = 25 + \frac{225}{4} + \frac{625}{4} = \left(\frac{5}{2}\sqrt{38}\right)^2$$

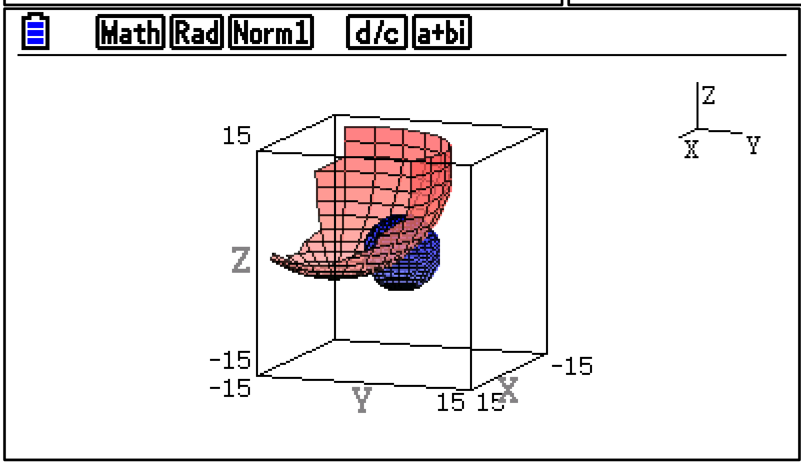
El centre de l'esfera és $O_2\left(5, -\frac{15}{2}, \frac{25}{2}\right)$ i radi $R_2 = \frac{5}{2}\sqrt{38}$

Obrim el *Menú Gráfico 3D*

Definim i representem les dues esferes.







Vegem analíticament que les dues esferes són secants.

Calculem la distància entre els dos centres.

$$\overline{O_1O_2} = \sqrt{(5-0)^2 + \left(-\frac{15}{2} - 0\right)^2 + \left(\frac{25}{2} - 0\right)^2} = \frac{5}{2}\sqrt{38}$$

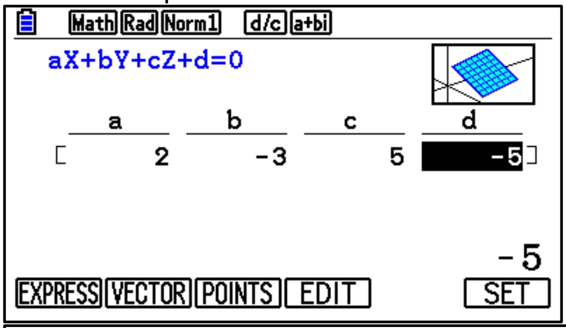
La suma dels radis és:

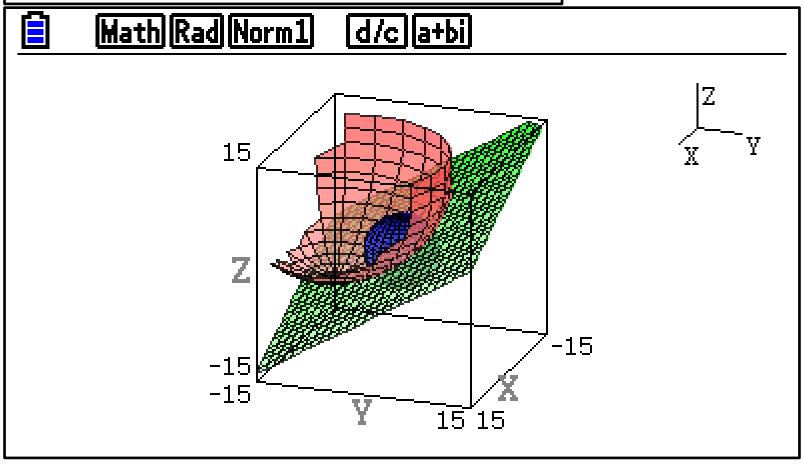
$R_1 + R_2 = 5 + \frac{5}{2}\sqrt{38} > \overline{O_1O_2}$

La diferència dels radis és:

$$R_2 - R_1 = \frac{5}{2}\sqrt{38} - 5 > \overline{O_1O_2}$$

Aleshores, les dues esferes són secants.

b)
El plànol intersecció de les dues esferes és el plànol format per la diferència de les equacions de les dues esferes:
$\Pi \equiv 10x - 15y + 25z = 25$
Simplificant:
$\Pi \equiv 2x - 3y + 5z - 5 = 0$
Dibuixem el plànol.




c)
El centre de la circumferència intersecció de les dues esferes és la projecció del centre $O_1(0,0,0)$ sobre el plànol $\Pi \equiv 2x - 3y + 5z - 5 = 0$
La recta r perpendicular al plànol que passa per $O_1(0,0,0)$ té vector director el característic del plànol $a = (2,-3,5)$ la seua equació és:
$r \equiv (x,y,z) = \alpha(2,-3,5)$

Substituïm les coordenades d'un punt qualsevol de la recta r, $(2\alpha, -3\alpha, 5\alpha)$ en l'equació del plànol:
$2(2\alpha) - 3(-3\alpha) + 5(5\alpha) - 5 = 0$
Resolent l'equació:
$$\alpha = \frac{5}{38}$$
La intersecció del plànol i la recta és:
$$O\left(\frac{5}{19}, -\frac{15}{38}, \frac{25}{38}\right)$$
$$\overline{O_1O} = d(O_1, \Pi) = \left|\frac{-5}{\sqrt{38}}\right| = \frac{5}{\sqrt{38}}$$
Considerem el triangle rectangle format pels catets $\overline{O_1O}$, O i un punt de la circumferència i d'hipotenusa $R_1 = 5$

Siga R el radi de la circumferència:

Aplicant el teorema de Pitàgores:

$$5^2 = R^2 + \left(\frac{5}{\sqrt{38}}\right)^2$$

$$R = 5 \cdot \sqrt{\frac{37}{38}} \approx 4.93$$