Donades les esferes $E_1 \equiv 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 3x - 2y + z - 5 = 0$,
$E_2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 - x + 3y - 2z + 1 = 0$

a) Determineu la posició relativa de les dues esferes.
b) Si són secants, determineu el plànol on es tallen.
c) Determineu el centre i el radi de la circumferència intersecció de les dues esferes.

Solució:
Completant quadrats:

$$E_1 \equiv \left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{5}{2} + \frac{3}{16} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{54}{16}$$

El centre té coordenades, $O_1\left(-\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ i el radi és $R_1 = \frac{3}{4}\sqrt{6}$

$$E_2 \equiv \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 + (z-1)^2 = -1 + \frac{1}{4} + \frac{9}{4} + 1 = \frac{10}{4}$$

El centre té coordenades, $O_2\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 1\right)$ i el radi és $R_1 = \frac{1}{2}\sqrt{10}$

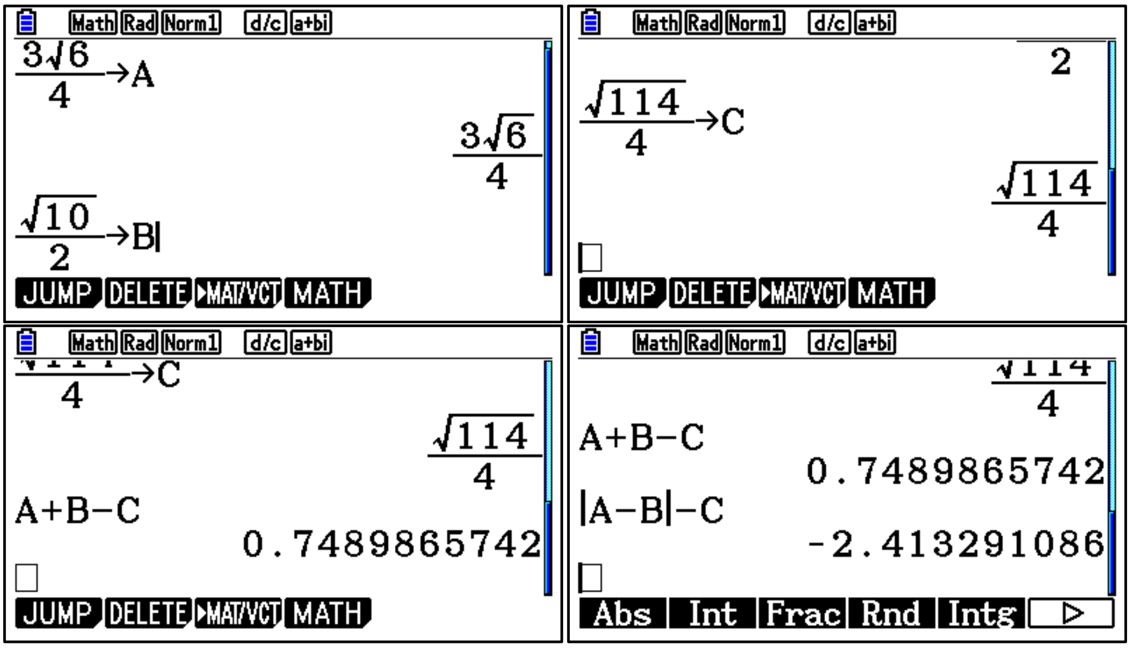
$$\overrightarrow{O_1O_2} = \left(\frac{5}{4}, 2, \frac{5}{4}\right)$$

La distància entre els centres és:

$$\overline{O_1O_2} = \frac{\sqrt{114}}{4}$$

$$\overline{O_1O_2} = \frac{\sqrt{114}}{4} < R_1 + R_2 = \frac{3\sqrt{6} + 2\sqrt{10}}{4}$$

$$\overline{O_1O_2} = \frac{\sqrt{114}}{4} > |R_1 - R_2| = \frac{3\sqrt{6} - 2\sqrt{10}}{4}$$

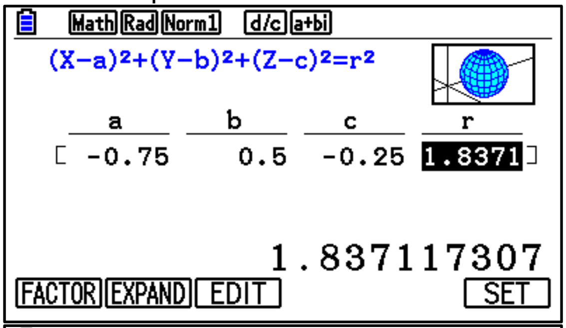


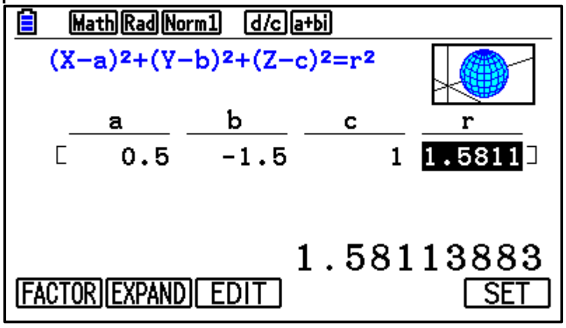
Aleshores, les dues esferes són secants.

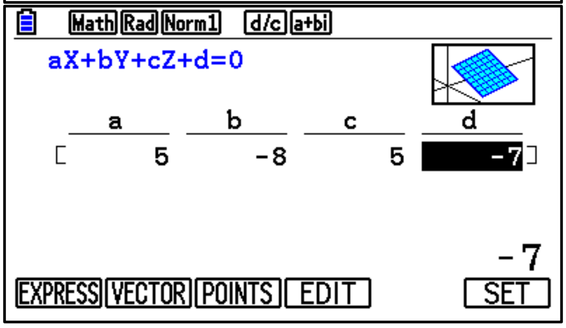
Calculem $E_1 - 2 \cdot E_2$ que ens dóna el plànol intersecció de les dues esferes.

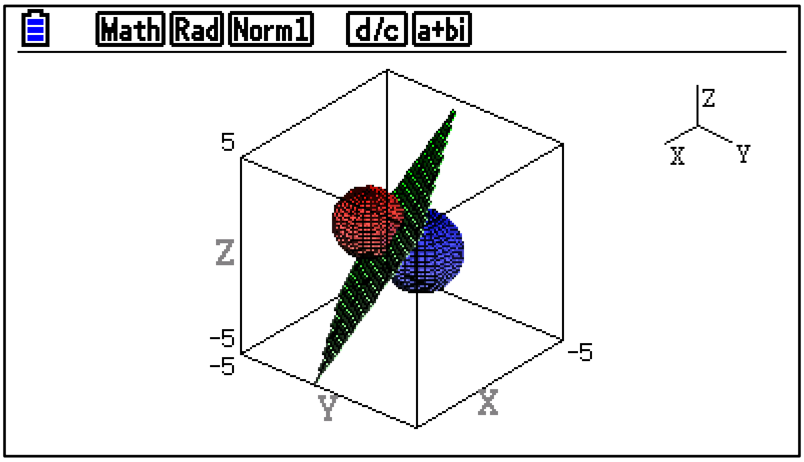
$E_1 - 2 \cdot E_2 \equiv 5x - 8y + 5z - 7 = 0$

Obrim el *Menú Gráfico 3D*.
Definim i representem les dues esferes i el plànol intersecció.

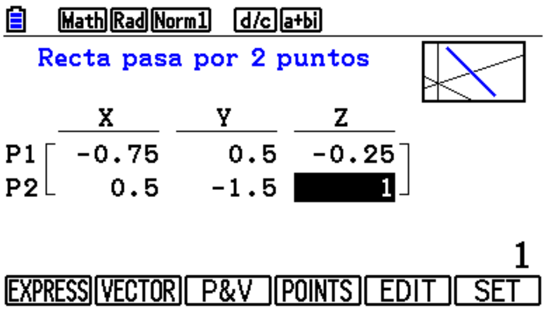


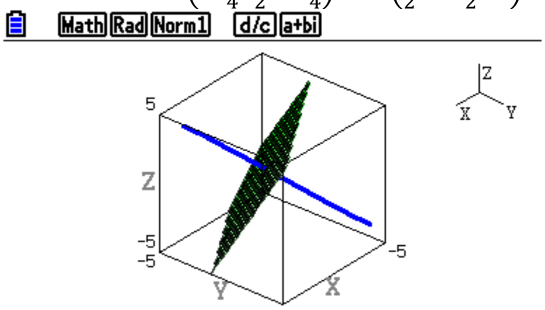






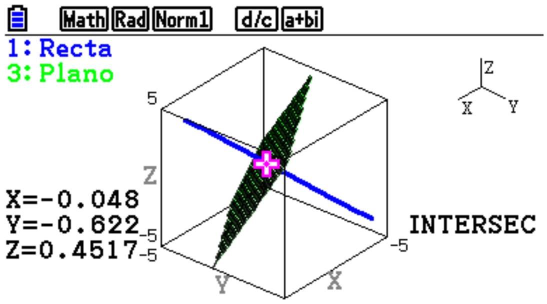
Definim i representem la recta que passa pels centres $O_1\left(-\frac{3}{4},\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$, $O_2\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{2},1\right)$





El centre de la circumferència intersecció és calcula efectuant la intersecció de la recta i el plànol.

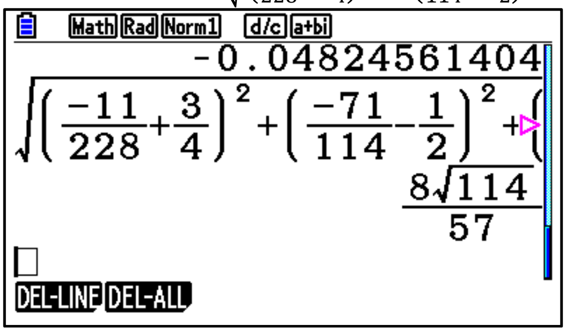
Amb la funció *G-Solv* determinem la intersecció:



El centre de la circumferència és:

$O\left(\frac{-11}{228}, \frac{-71}{114}, \frac{103}{228}\right)$

Calculem $\overline{O_1O} = \sqrt{\left(\frac{-11}{228} + \frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{-71}{114} + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{103}{228} + \frac{1}{4}\right)^2} = \frac{8\sqrt{114}}{57}$

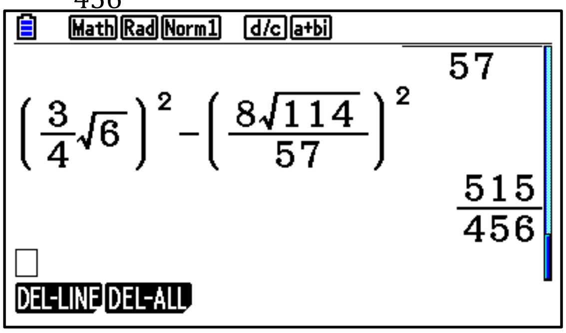


Siga R el radi de la circumferència intersecció de les dues esferes.

Per calcular el radi R aplicarem el teorema de Pitàgores al triangle rectangle de catets, R, $\overline{O_1O} = \frac{8\sqrt{114}}{57}$ i hipotenusa $R_1 = \frac{3}{4}\sqrt{6}$

$$\left(\frac{3}{4}\sqrt{6}\right)^2 = R^2 + \left(\frac{8\sqrt{114}}{57}\right)^2$$

$$R^2 = \frac{515}{456}$$



El radi de la circumferència és $R = \sqrt{\frac{515}{456}}$