

Donades les esferes $E_1 \equiv 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 3x - 2y + z - 5 = 0$,
 $E_2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 - x + 3y - 2z + 1 = 0$

- Determineu la posició relativa de les dues esferes.
- Si són secants, determineu el plànol on es tallen.
- Determineu el centre i el radi de la circumferència intersecció de les dues esferes.

Solució:

Completant quadrats:

$$E_1 \equiv \left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{5}{2} + \frac{3}{16} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{54}{16}$$

El centre té coordenades, $O_1 \left(-\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ i el radi és $R_1 = \frac{3}{4}\sqrt{6}$

$$E_2 \equiv \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 + (z - 1)^2 = -1 + \frac{1}{4} + \frac{9}{4} + 1 = \frac{10}{4}$$

El centre té coordenades, $O_2 \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 1\right)$ i el radi és $R_2 = \frac{1}{2}\sqrt{10}$

$$\overrightarrow{O_1O_2} = \left(\frac{5}{4}, 2, \frac{5}{4}\right)$$

La distància entre els centres és:

$$\overline{O_1O_2} = \frac{\sqrt{114}}{4}$$

$$\overline{O_1O_2} = \frac{\sqrt{114}}{4} < R_1 + R_2 = \frac{3\sqrt{6} + 2\sqrt{10}}{4}$$

$$\overline{O_1O_2} = \frac{\sqrt{114}}{4} > |R_1 - R_2| = \frac{3\sqrt{6} - 2\sqrt{10}}{4}$$

The calculator displays the following steps:

- Screen 1: $\frac{3\sqrt{6}}{4} \rightarrow A$ and $\frac{\sqrt{10}}{2} \rightarrow B$. The result $\frac{3\sqrt{6}}{4}$ is shown on the right.
- Screen 2: $\frac{\sqrt{114}}{4} \rightarrow C$. The result $\frac{\sqrt{114}}{4}$ is shown on the right.
- Screen 3: Calculation of $A+B-C$ resulting in 0.7489865742 .
- Screen 4: Calculation of $|A-B|-C$ resulting in -2.413291086 .

Aleshores, les dues esferes són secants.

Calculem $E_1 - 2 \cdot E_2$ que ens dona el plànol intersecció de les dues esferes.

$$E_1 - 2 \cdot E_2 \equiv 5x - 8y + 5z - 7 = 0$$

Obrim el *Menú Gráfico 3D*.

Definim i representem les dues esferes i el plànol intersecció.

Math Rad Norm1 d/c a+bi

$(X-a)^2+(Y-b)^2+(Z-c)^2=r^2$

a	b	c	r
-0.75	0.5	-0.25	1.8371

1.837117307

FACTOR EXPAND EDIT SET

Math Rad Norm1 d/c a+bi

$(X-a)^2+(Y-b)^2+(Z-c)^2=r^2$

a	b	c	r
0.5	-1.5	1	1.5811

1.58113883

FACTOR EXPAND EDIT SET

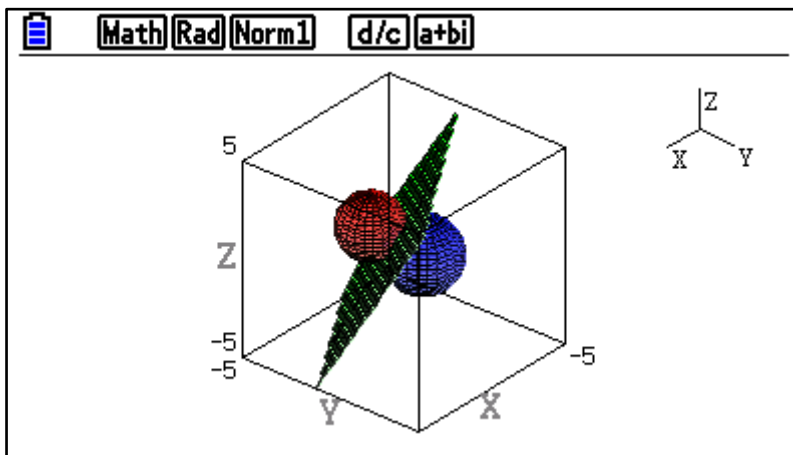
Math Rad Norm1 d/c a+bi

$aX+bY+cZ+d=0$

a	b	c	d
5	-8	5	-7

-7

EXPRESS VECTOR POINTS EDIT SET



Definim i representem la recta que passa pels centres $O_1\left(-\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$, $O_2\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 1\right)$

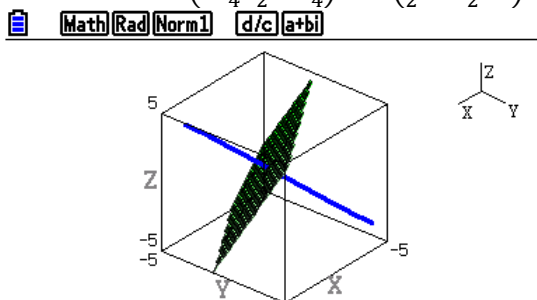
Math Rad Norm1 d/c a+bi

Recta passa por 2 puntos

X	Y	Z
-0.75	0.5	-0.25
0.5	-1.5	1

1

EXPRESS VECTOR P&V POINTS EDIT SET

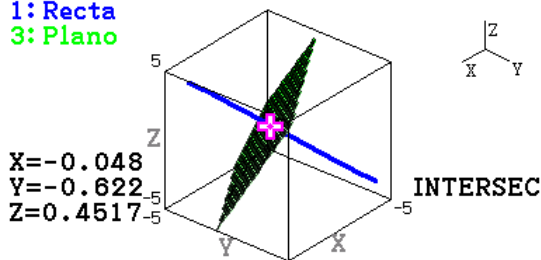


El centre de la circumferència intersecció és calcula efectuant la intersecció de la recta i el plànot.

Amb la funció G-Solv determinem la intersecció:

Math **Rad** **Norm1** **d/c** **a+bi**

1: Recta
3: Plano



El centre de la circumferència és:

$$O \left(\frac{-11}{228}, \frac{-71}{114}, \frac{103}{228} \right)$$

$$\text{Calculem } \overline{O_1O} = \sqrt{\left(\frac{-11}{228} + \frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{-71}{114} + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{103}{228} + \frac{1}{4}\right)^2} = \frac{8\sqrt{114}}{57}$$

Siga R el radi de la circumferència intersecció de les dues esferes.

Per calcular el radi R aplicarem el teorema de Pitàgores al triangle rectangle de catets,

$$R, \overline{O_1O} = \frac{8\sqrt{114}}{57} \text{ i hipotenusa } R_1 = \frac{3}{4}\sqrt{6}$$

$$\left(\frac{3}{4}\sqrt{6}\right)^2 = R^2 + \left(\frac{8\sqrt{114}}{57}\right)^2$$

$$R^2 = \frac{515}{456}$$

$$\text{El radi de la circumferència és } R = \sqrt{\frac{515}{456}}$$