

4. Considerati i punti $A(2, 3, 6)$, $B(6, 2, -3)$, $C(3, -6, 2)$ nello spazio tridimensionale, verificare che i segmenti OA , OB , OC (dove il punto O indica l'origine degli assi) costituiscono tre spigoli di un cubo. Determinare il centro e il raggio della sfera S circoscritta a tale cubo.

Maturità 2019. Italia.

Considerem els punts $A(2, 3, 6)$, $B(6, 2, -3)$, $C(3, -6, 2)$ en l'espai tridimensional. Verifiqueu que els segments \overline{OA} , \overline{OB} , \overline{OC} són arestes d'un cub, on $O(0, 0, 0)$. Determineu el centre i el radi de l'esfera circumscripca al cub.

Solució:

Obrim el Menú Ejec-Mat.

Definim els vectors

$$\overrightarrow{OA} = (2, 3, 6), \overrightarrow{OB} = (6, 2, -3), \overrightarrow{OC} = (3, -6, 2)$$

The image shows three screenshots of a calculator interface, likely a TI-84 Plus, used to input vectors. Each screenshot shows a vector definition screen with a title (A, B, or C), a list of components, and a menu at the bottom.

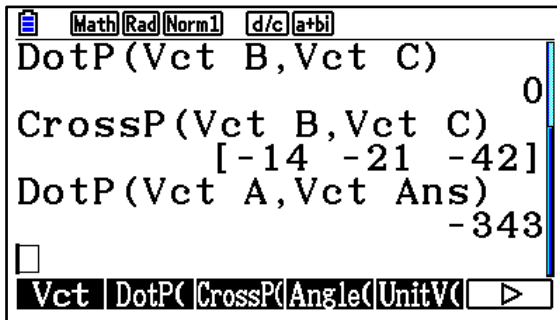
- Screen A:** Shows the vector \vec{A} with components 1, 2, 3, and 6. The value 6 is entered in the fourth position.
- Screen B:** Shows the vector \vec{B} with components 1, 6, 2, and -3. The value -3 is entered in the fourth position.
- Screen C:** Shows the vector \vec{C} with components 1, 3, -6, and 2. The value 2 is entered in the fourth position.

Vegem que els vectors dos a dos són ortogonals. Calculem els productes escalars i vegem que són zero.

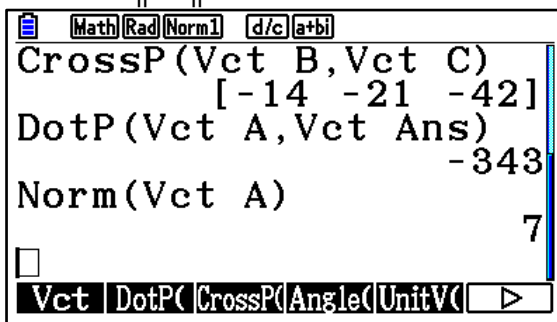
The image shows a screenshot of a calculator interface displaying the dot products of the vectors defined in the previous screenshots. The results are all zero, confirming that the vectors are orthogonal.

- DotP(Vct A, Vct B) = 0
- DotP(Vct A, Vct C) = 0
- DotP(Vct B, Vct C) = 0

Vegem que els tres vectors són linealment independents.
 Calculem el producte mixt dels tres vectors i vegem que és distint de zero.



Calculem la mesura de l'aresta del cub.
 Calculem $\|\vec{OA}\|$



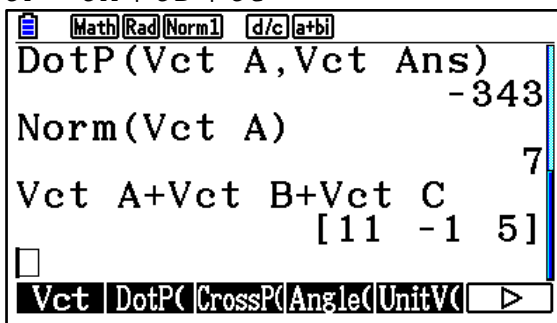
L'aresta del cub mesura $\vec{OA} = 7$

El radi de l'esfera mesura $R = \vec{OA} \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$R = \frac{7}{2}\sqrt{3}$$

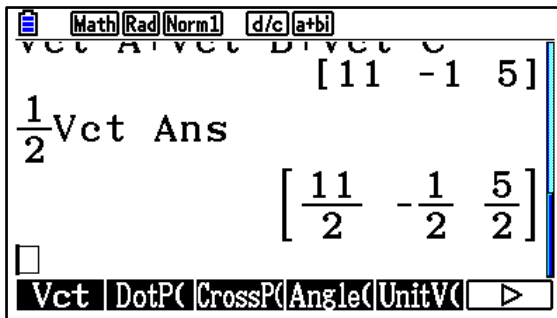
El vèrtex P del cub oposat al vèrtex O, les seues coordenades compleixen que:

$$\vec{OP} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$$



Les coordenades són $P(11, -1, 5)$

El centre Q de l'esfera compleix que $\vec{OQ} = \frac{1}{2}\vec{OP}$

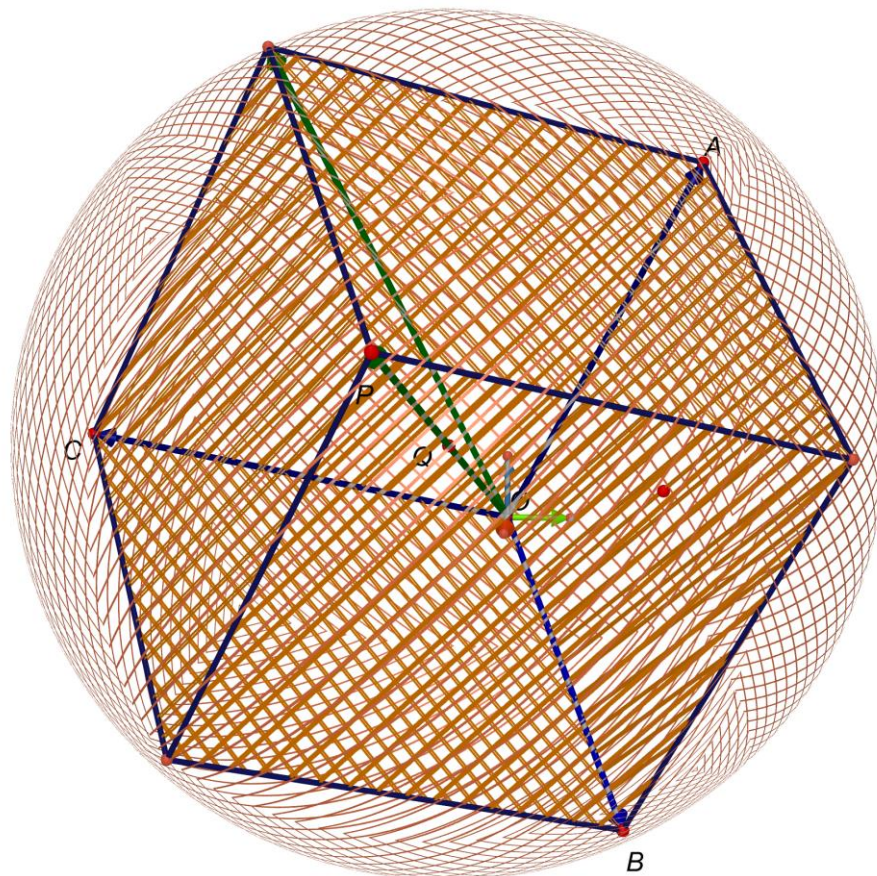


Les coordenades del centre són

$$Q\left(\frac{11}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

L'equació de l'esfera és:

$$\left(x - \frac{11}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{7\sqrt{3}}{2}\right)^2$$



$$(x-11/2)^2+(y+1/2)^2+(z-5/2)^2 = (7\sqrt{3}/2)^2$$