Siguen els punts de l'espai tridimensional $A(3,1,0), B(3,-1,2), C(1,1,2)$

a) Proveu que els tres punts formen un triangle equilàter.
b) Determineu el plànol que conté els tres punts.
c) Determineu el punt P tal que ABCP siga un tetràedre regular.

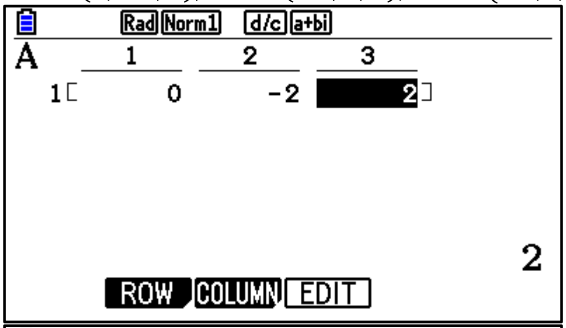
Solució:

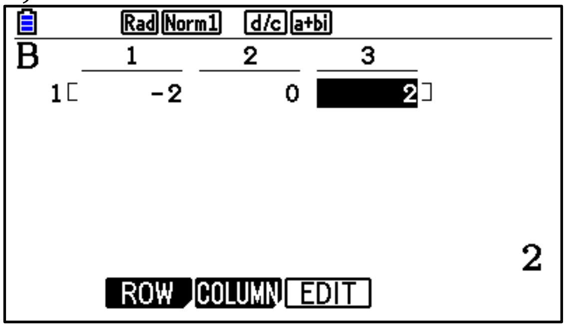
a)

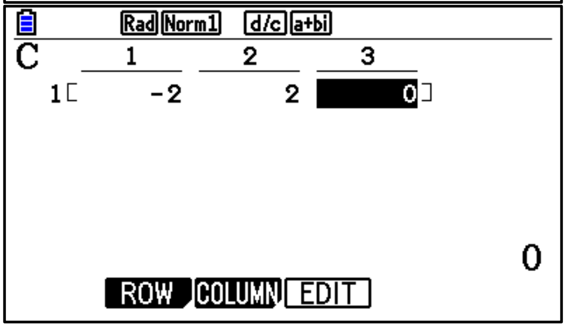
Obrim el *Menú Ejec-Mat*.

Definim els vectors.

$\overrightarrow{AB} = (0,-2,2), \overrightarrow{AC} = (-2,0,2), \overrightarrow{BC} = (-2,2,0)$



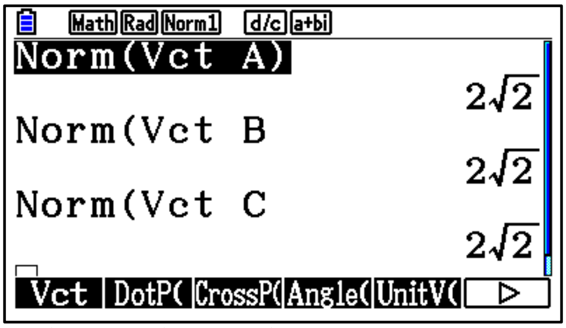




Els vectors $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\}$ són linealment independents ja que les components dels vectors no són proporcionals, $\frac{0}{-2} \neq \frac{-2}{0}$

Aleshores, els punts A, B, i C formen un triangle.

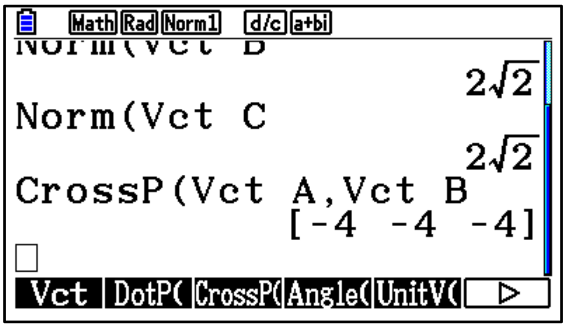
Calculem el mòdul dels tres vectors.



$\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{BC}\| = 2\sqrt{2}$

Aleshores, el triangle és equilàter.

b)
Calculem el vector $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ vector característic del plànol que conté els punts A, B, C.

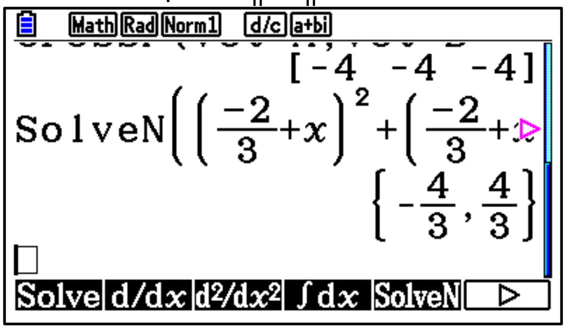


Un vector característic del plànol és $a = (1,1,1)$

L'equació del plànol que conté els tres punts és:
$\pi \equiv (x-3)+(y-1)+(z-0)=0$
Simplificant:
$\pi \equiv x+y+z-4=0$
c)
El circumcentre i el baricentre del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ coincideixen.
Les seues coordenades són:
$G\left(\frac{3+3+1}{3}, \frac{1-1+1}{3}, \frac{0+2+2}{3}\right)$
$G\left(\frac{7}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$

El vèrtex P del tetràedre pertany a la recta r perpendicular al plànol $\pi \equiv x+y+z-7=0$ que passa pel punt $G\left(\frac{7}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$ que té vector director el característic del plànol $a = (1,1,1)$

La seua equació és:
$r \equiv (x,y,z) = \left(\frac{7}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right) + \mu(1,1,1)$
Un punt qualsevol de la recta r té coordenades:
$P\left(\frac{7}{3}+\mu, \frac{1}{3}+\mu, \frac{4}{3}+\mu\right)$
Per ser vèrtexs del tetràedre $\|\overrightarrow{AP}\| = 2\sqrt{2}$
$\overrightarrow{AP} = \left(\frac{-2}{3}+\mu, \frac{-2}{3}+\mu, \frac{4}{3}+\mu\right)$
$\|\overrightarrow{AP}\| = \sqrt{\left(\frac{-2}{3}+\mu\right)^2 + \left(\frac{-2}{3}+\mu\right)^2 + \left(\frac{4}{3}+\mu\right)^2}$
Resolem l'equació $\|\overrightarrow{AP}\| = 2\sqrt{2}$



El problema té dues solucions:
Si $\mu = -\frac{4}{3}$
$P_1(1, -1, 0)$

Si $\mu = \frac{4}{3}$
$P_2\left(\frac{11}{3}, \frac{5}{3}, \frac{8}{3}\right)$