

Determineu l'equació de la recta perpendicular comuna a les rectes

$$r \equiv \begin{cases} x = -7 + 3\alpha \\ y = 4 - 2\alpha \\ z = 4 + 3\alpha \end{cases}, s \equiv \begin{cases} x = 1 + \beta \\ y = -9 + 2\beta \\ z = -12 - \beta \end{cases}$$

Solució:

Estudiem la posició relativa de les rectes  $r, s$

Un punt de la recta  $r$  és  $P_r(-7, 4, 4)$  i el vector director és  $v_r = (3, -2, 3)$

Un punt de la recta  $s$  és  $P_s(1, -9, -12)$  i el vector director és  $v_s = (1, 2, -1)$

$\{v_r, v_s\}$  són linealment independents ja que  $\frac{3}{1} \neq \frac{-2}{2}$

$$\overrightarrow{P_r P_s} = (8, -13, -16)$$

Calculem el determinant de la matriu formada pels vectors  $\{v_r, v_s, \overrightarrow{P_r P_s}\}$

Obrim el *Menú Ejec-Mat*

Definim la matriu formada pels tres vectors i calculem el seu determinant:

The left screenshot shows the matrix editor for matrix A. The rows are: Row 1: 3, -2, 3; Row 2: 1, 2, -1; Row 3: 8, -13, -16. The value -16 is highlighted. The right screenshot shows the 'Det Mat A' screen with the result -238.

El determinant és distint de zero.

Aleshores, les dues rectes es creuen.

El vector director de la recta perpendicular a les rectes  $r, s$  és  $v_r \times v_s$

Definim els vectors  $\{v_r, v_s\}$  i calculem el seu producte vectorial.

The top left screenshot shows matrix A with row 1: 3, -2, 3. The top right screenshot shows matrix B with row 1: 1, 2, -1. The bottom screenshot shows the 'CrossP(Vct A, Vct B)' calculation resulting in the vector [-4, 6, 8].

El vector director de la recta perpendicular comuna és  $n = (-2, 3, 4)$

a)

La recta que cerquem està formada per la intersecció de dos plànols.

El plànol que passa pel punt  $P_r(-7, 4, 4)$  i té direcció  $v_r = (3, -2, 3)$ ,  $n = (-2, 3, 4)$  i el plànol que passa pel punt  $P_s(1, -9, -12)$ , i té direcció  $v_s = (1, 2, -1)$ ,  $n = (-2, 3, 4)$

Determinem els dos plànols.

Definim el vector  $n = (-2, 3, 4)$  i calculem  $v_r \times n$ , vector característic.

L'equació del primer plànol és:

$$\pi_1 \equiv -17(x + 7) - 18(y - 4) + 5(z - 4) = 0$$

Simplificant:

$$\pi_1 \equiv -17x - 18y + 5z - 67 = 0$$

Calculem  $v_s \times n$ , vector característic del segon plànol

L'equació del segon plànol és:

$$\pi_2 \equiv 11(x - 1) - 2(y + 9) + 7(z + 12) = 0$$

Simplificant:

$$\pi_2 \equiv 11x - 2y + 7z + 55 = 0$$

El plànol que cerquem té equació general:

$$p \equiv \begin{cases} -17x - 18y + 5z - 67 = 0 \\ 11x - 2y + 7z + 55 = 0 \end{cases}$$

Resolent el sistema ens dona l'equació paramètrica de la recta.

L'equació vectorial és  $p \equiv (x, y, z) = \left(-\frac{281}{58}, \frac{99}{116}, 0\right) + \gamma(-2, 3, 4)$

a)

Un punt qualsevol de la recta  $r$  té coordenades  $P_r(-7 + 3\alpha, 4 - 2\alpha, 4 + 3\alpha)$

Un punt qualsevol de la recta  $s$  té coordenades  $P_s(1 + \beta, -9 + 2\beta, -12 - \beta)$

$$\overrightarrow{P_r P_s} = (-3\alpha + \beta + 8, 2\alpha + 2\beta - 13, -3\alpha - \beta - 16)$$

Els vectors  $\{v_r, \overrightarrow{P_r P_s}\}$  són ortogonals.

$$(3, -2, 3)(-3\alpha + \beta + 8, 2\alpha + 2\beta - 13, -3\alpha - \beta - 16) = 0$$

Simplificant:

$$11\alpha + 2\beta = 1$$

Els vectors  $\{v_s, \overrightarrow{P_r P_s}\}$  són ortogonals.

$$(1, 2, -1)(-3\alpha + \beta + 8, 2\alpha + 2\beta - 13, -3\alpha - \beta - 16) = 0$$

Simplificant:  $2\alpha + 3\beta = 1$

Considerem el sistema:

$$\begin{cases} 11\alpha + 2\beta = 1 \\ 2\alpha + 3\beta = 1 \end{cases}$$

Resolent el sistema:

<p>Math Rad Norm1 d/c  a+bi</p> <p><math>a_n X + b_n Y = C_n</math></p> <table border="1"><thead><tr><th></th><th>a</th><th>b</th><th>c</th></tr></thead><tbody><tr><td>1</td><td>11</td><td>2</td><td>1</td></tr><tr><td>2</td><td>2</td><td>3</td><td>1</td></tr></tbody></table> <p>1</p> <p>SOLVE DELETE CLEAR EDIT</p>		a	b	c	1	11	2	1	2	2	3	1	<p>Math Rad Norm1 d/c  a+bi</p> <p><math>a_n X + b_n Y = C_n</math></p> <p>X [ 0.0344 ]</p> <p>Y [ 0.3103 ]</p> <p>1</p> <p>REPEAT</p> <p><math>\frac{1}{29}</math></p>
	a	b	c										
1	11	2	1										
2	2	3	1										

Aleshores

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{29} \\ \beta = \frac{9}{29} \end{cases}$$

Per tant,  $P_r\left(\frac{-200}{29}, \frac{114}{29}, \frac{119}{29}\right)$

La perpendicular comuna passa pel punt  $P_r\left(\frac{-200}{29}, \frac{114}{29}, \frac{119}{29}\right)$  i té direcció  $n = (-2, 3, 4)$

La seua equació és:

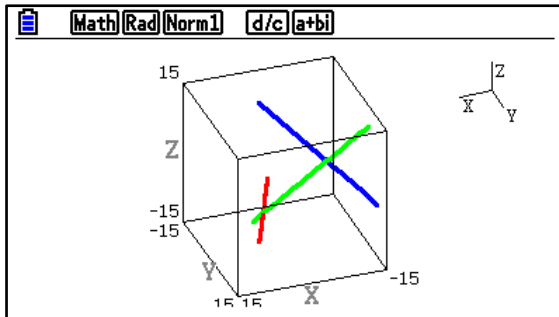
$$p \equiv (x, y, z) = \left(\frac{-200}{29}, \frac{114}{29}, \frac{119}{29}\right) + \mu(-2, 3, 4)$$

### Solució gràfica del problema

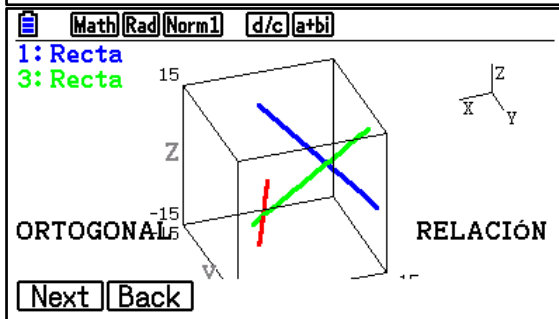
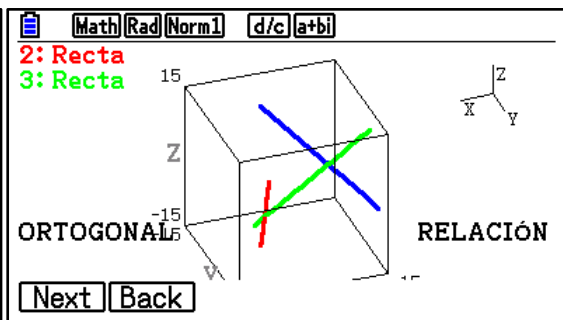
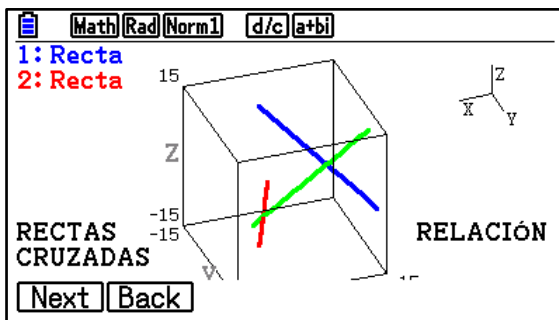
Obrim el *Menú Gráfico 3D*

Definim i representem les rectes:

$$r \equiv \begin{cases} x = -7 + 3\alpha \\ y = 4 - 2\alpha \\ z = 4 + 3\alpha \end{cases}, s \equiv \begin{cases} x = 1 + \beta \\ y = -9 + 2\beta \\ z = -12 - \beta \end{cases}, p \equiv (x, y, z) = \left(-\frac{281}{58}, \frac{99}{116}, 0\right) + \gamma(-2, 3, 4)$$



Estudiem la posició relativa de les 3 rectes amb la funció G-Solv.



Determinem la intersecció de les rectes.

