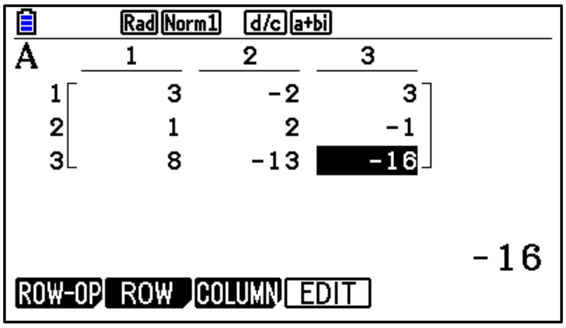
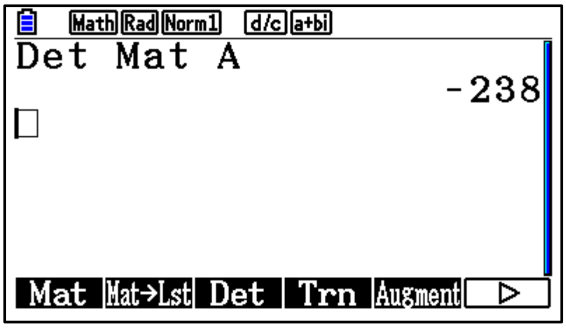
Determineu l’equació de la recta perpendicular comuna a les rectes

$r \equiv \begin{cases} x = -7 + 3\alpha \\ y = 4 - 2\alpha \\ z = 4 + 3\alpha \end{cases}, s \equiv \begin{cases} x = 1 + \beta \\ y = -9 + 2\beta \\ z = -12 - \beta \end{cases}$

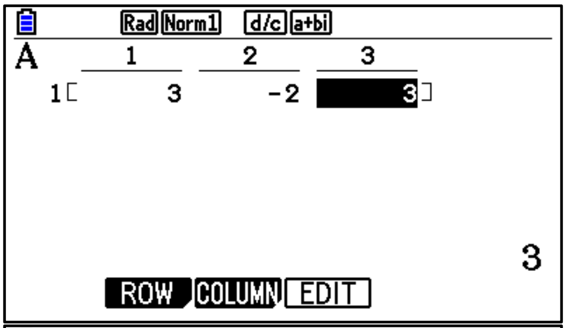
Solució:
Estudiem la posició relativa de les rectes r, s
Un punt de la recta r és $P_r(-7,4,4)$ i el vector director és $v_r = (3,-2,3)$
Un punt de la recta s és $P_s(1,-9,-12)$ i el vector director és $v_s = (1,2,-1)$
$\{v_r, v_s\}$ són linealment independents ja que $\frac{3}{1} \neq \frac{-2}{3}$
$\overrightarrow{P_rP_s} = (8,-13,-16)$
Calculem el determinat de la matriu formada pels vectors $\{v_r, v_s, \overrightarrow{P_rP_s}\}$
Obrim el *Menú Ejec-Mat*
Definim la matriu formada pels tres vectors i calculem el seu determinant:

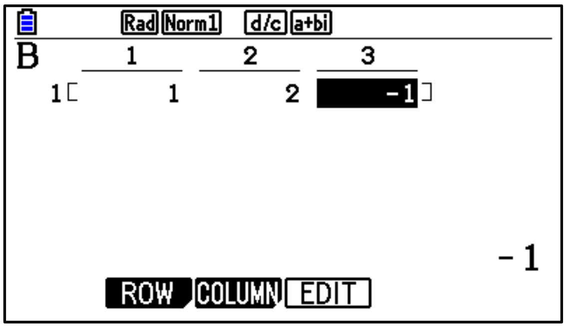


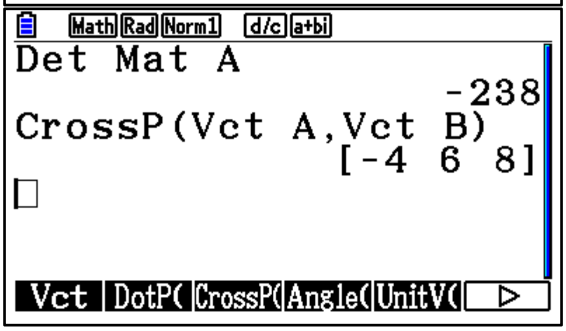


El determinant és distint de zero.
Aleshores, les dues rectes es creuen.

El vector director de la recta perpendicular a les rectes r, s és $v_r \times v_s$
Definim els vectors $\{v_r, v_s\}$ i calculem el seu producte vectorial.





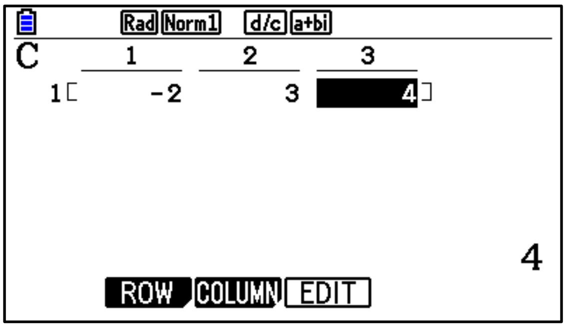


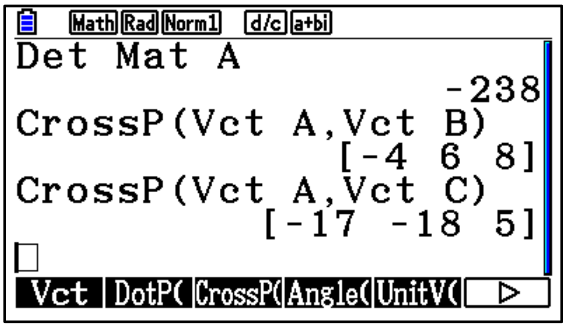
El vector director de la recta perpendicular comuna és $n = (-2,3,4)$

a)

La recta que cerquem està formada per la intersecció de dos plànols.
El plànol que passa pel punt $P_r(-7, 4, 4)$ i té direcció $v_r = (3, -2, 3), n = (-2, 3, 4)$ i el plànol que passa pel punt $P_s(1, -9, -12)$, i té direcció $v_s = (1, 2, -1), n = (-2, 3, 4)$

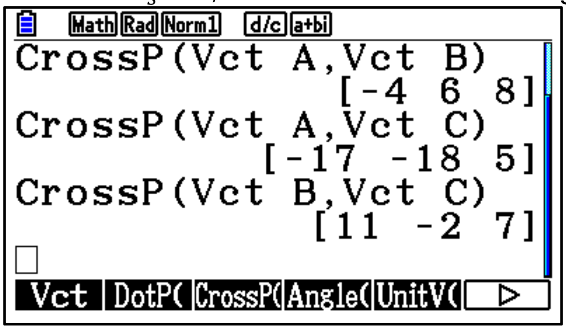
Determinem els dos plànols.
Definim el vector $n = (-2, 3, 4)$ i calculem $v_r \times n$, vector característic.





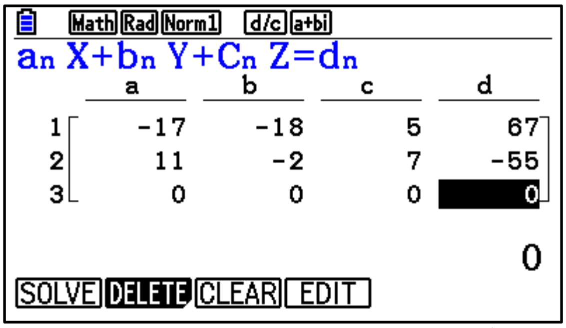
L'equació del primer plànol és:
$\pi_1 \equiv -17(x + 7) - 18(y - 4) + 5(z - 4) = 0$
Simplificant:
$\pi_1 \equiv -17x - 18y + 5z - 67 = 0$

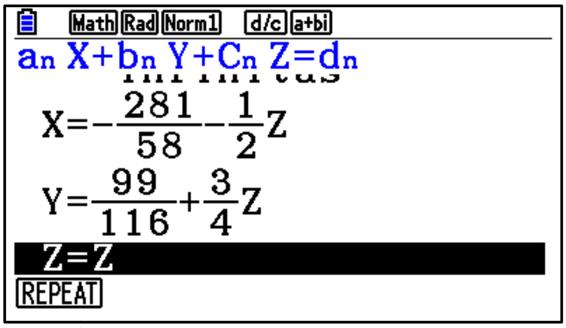
Calculem $v_s \times n$, vector característic del segon plànol



L'equació del segon plànol és:
$\pi_2 \equiv 11(x - 1) - 2(y + 9) + 7(z + 12) = 0$
Simplificant:
$\pi_2 \equiv 11x - 2y + 7z + 55 = 0$

El plànol que cerquem té equació general:
$$p \equiv \begin{cases} -17x - 18y + 5z - 67 = 0 \\ 11x - 2y + 7z + 55 = 0 \end{cases}$$
Resolent el sistema ens dóna l'equació paramètrica de la recta.





L'equació vectorial és $p \equiv (x, y, z) = \left(-\frac{281}{58}, \frac{99}{116}, 0\right) + \gamma(-2,3,4)$

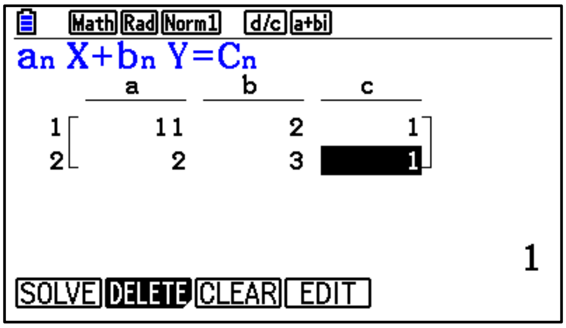
a)
Un punt qualsevol de la recta r té coordenades $P_r(-7+3\alpha, 4-2\alpha, 4+3\alpha)$
Un punt qualsevol de la recta s té coordenades $P_s(1+\beta, -9+2\beta, -12-\beta)$

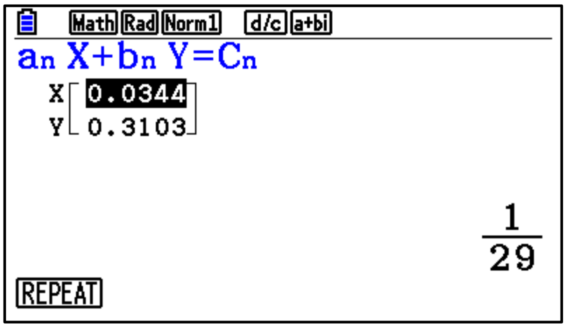
$\overrightarrow{P_rP_s} = (-3\alpha+\beta+8, 2\alpha+2\beta-13, -3\alpha-\beta-16)$

Els vectors $\{v_r, \overrightarrow{P_rP_s}\}$ són ortogonals.
$(3,-2,3)(-3\alpha+\beta+8, 2\alpha+2\beta-13, -3\alpha-\beta-16) = 0$
Simplificant:
$11\alpha + 2\beta = 1$

Els vectors $\{v_s, \overrightarrow{P_rP_s}\}$ són ortogonals.
$(1,2,-1)(-3\alpha+\beta+8, 2\alpha+2\beta-13, -3\alpha-\beta-16) = 0$
Simplificant:$2\alpha + 3\beta = 1$

Considerem el sistema:
$\begin{cases} 11\alpha + 2\beta = 1 \\ 2\alpha + 3\beta = 1 \end{cases}$
Resolent el sistema:





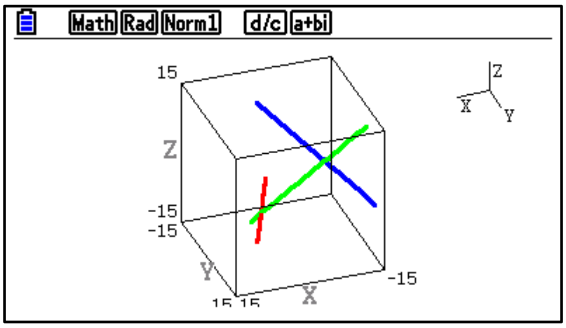
Aleshores
$\begin{cases} \alpha = \dfrac{1}{29} \\ \beta = \dfrac{9}{29} \end{cases}$
Per tant, $P_r\left(\frac{-200}{29}, \frac{114}{29}, \frac{119}{29}\right)$
La perpendicular comuna passa pel punt $P_r\left(\frac{-200}{29}, \frac{114}{29}, \frac{119}{29}\right)$ i té direcció $n = (-2,3,4)$
La seua equació és:
$p \equiv (x,y,z) = \left(\dfrac{-200}{29}, \dfrac{114}{29}, \dfrac{119}{29}\right) + \mu(-2,3,4)$

Solució gràfica del problema

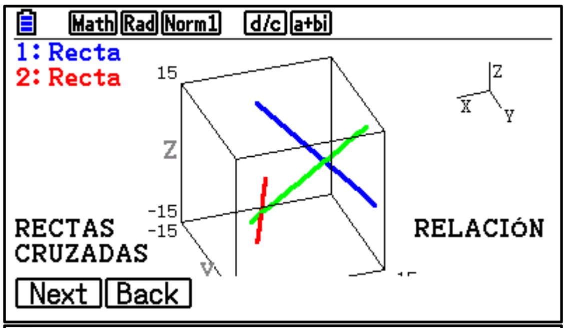
Obrim el *Menú Gráfico 3D*

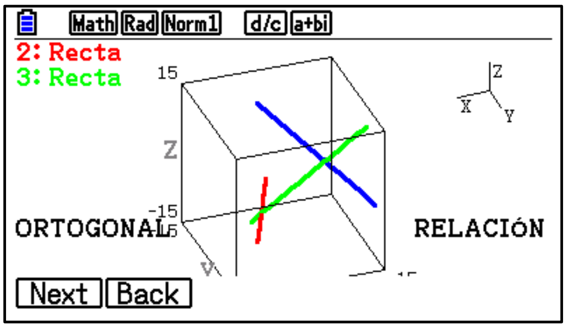
Definim i representem les rectes:

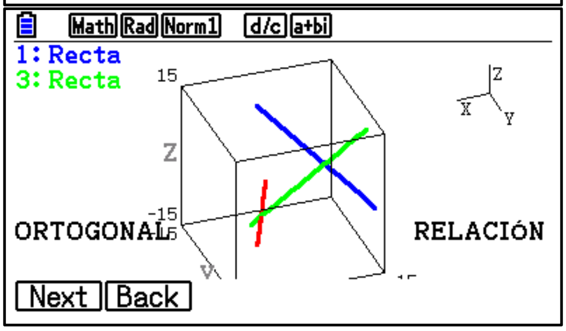
$$r \equiv \begin{cases} x = -7 + 3\alpha \\ y = 4 - 2\alpha \\ z = 4 + 3\alpha \end{cases}, s \equiv \begin{cases} x = 1 + \beta \\ y = -9 + 2\beta \\ z = -12 - \beta \end{cases}, p \equiv (x, y, z) = \left(-\frac{281}{58}, \frac{99}{116}, 0\right) + \gamma(-2,3,4)$$



Estudiem la posició relativa de les 3 rectes amb la funció *G-Solv*.







Determinem la intersecció de les rectes.