

Dins d'una cartolina rectangular es desitja fer un dibuix que ocupe un rectangle R de 600 cm^2 d'àrea de manera que:

Per damunt i per sota de R han de quedar uns marges de 3 cm d'altura cadascun. Els marges a esquerra i a dreta de R han de tenir una amplària de 2 cm cadascun.

Obtenui raonadament, escrivint tots els passos de raonament utilitzat:

- L'àrea de la cartolina en funció de la base x del rectangle R.
- El valor de x per al qual l'àrea de la cartolina és mínima.
- Les dimensions de dita cartolina d'àrea mínima.

Pau's València juliol 2018.

Solució:

Siga el rectangle R de vèrtexs $ABCD$.

Siga $x = \overline{AB}$.

Com l'àrea del rectangle R és 600 cm^2 , aleshores, $\overline{BD} = \frac{600}{x}$.

Siga la cartolina de vèrtexs $KLMN$.

$$\overline{KL} = x + 4, \overline{LM} = \frac{600}{x} + 6$$

a)

L'àrea de la cartolina és:

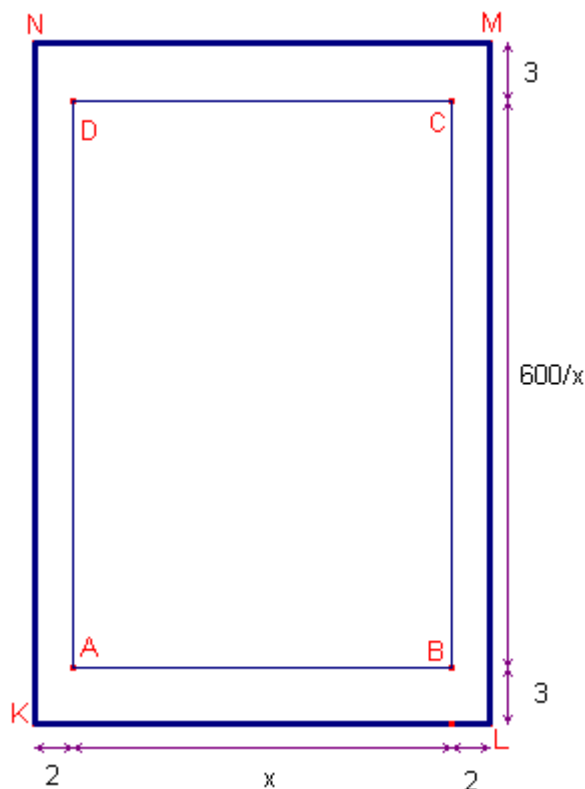
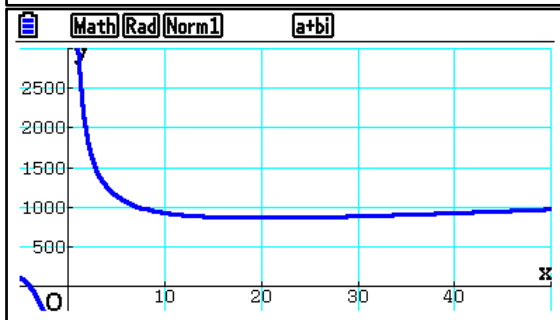
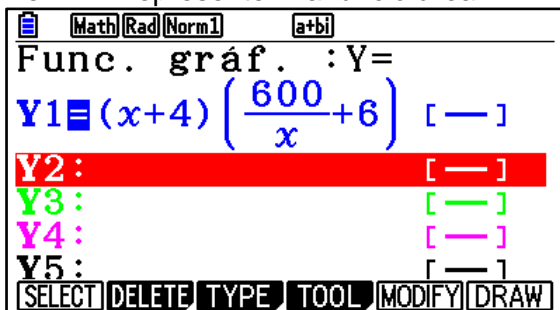
$$S(x) = (x + 4) \left(\frac{600}{x} + 6 \right)$$

$$S(x) = 624 + 6x + \frac{2400}{x}, \quad x \geq 0$$

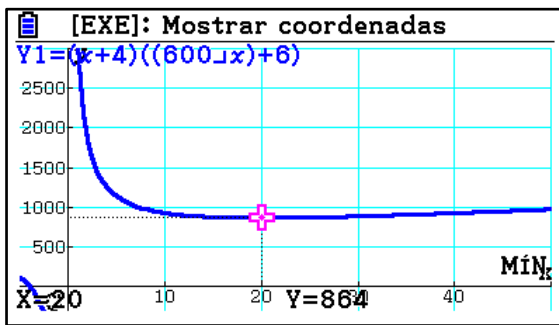
b)

Obrim el Menú Gráfico

Definim i representem la funció àrea:



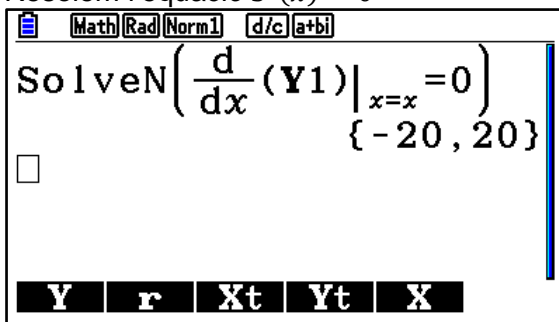
Calculem el mínim de l'àrea amb la funció $G-Solv$.



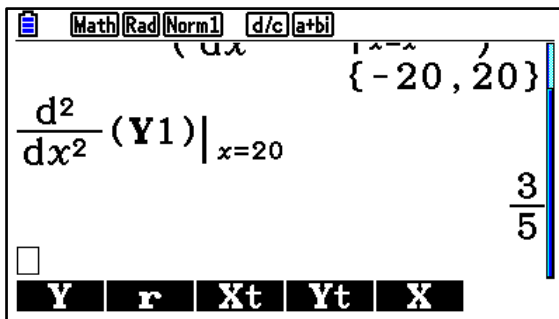
El mínim s'assoleix quan $x = 20$

Obrim el *Menú Ejec-Mat*.

Resolem l'equació $S'(x) = 0$



Calculem $S''(20)$



$$S''(20) > 0$$

Aleshores, el mínim de l'àrea s'assoleix quan $x = 20$, l'àrea mínima de la cartolina és

$$S(20) = 864 \text{ cm}^2$$

Les dimensions de la cartolina són:

$$\overline{KL} = 20 + 4 = 24 \text{ cm}, \overline{LM} = \frac{600}{20} + 6 = 36 \text{ cm}$$

b)

Calculem la derivada de la funció àrea.

$$S'(x) = 6 - \frac{2400}{x^2}$$

$$S'(x) = 0$$

$$6 - \frac{2400}{x^2} = 0$$

Resolent l'equació:

$$x = 20$$

Calculem la segona derivada:

$$S''(x) = \frac{4800}{x^3}$$

$$S''(20) = \frac{4800}{20^3} > 0$$

Aleshores, el mínim de l'àrea s'assoleix quan

$$x = 20$$

c)

Les dimensions de la cartolina d'àrea mínima són:

$$\overline{KL} = 20 + 4 = 24 \text{ cm}, \overline{LM} = \frac{600}{20} + 6 = 36 \text{ cm}$$