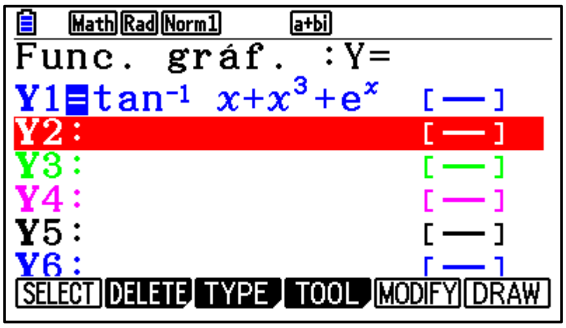
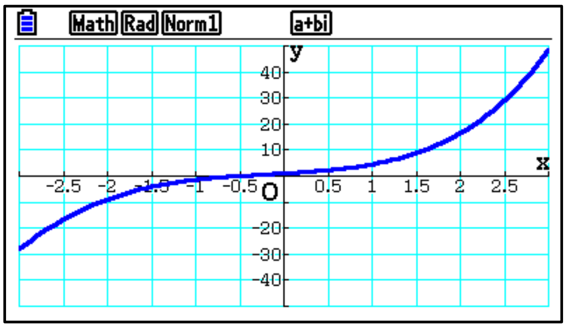
Demostreu que l'equació $arctg(x) + x^3 + e^x = 0$ té només una única solució.

Solució:
Considerem la funció $f(x) = arctg(x) + x^3 + e^x . x \in \mathbb{R}$
Representem la funció.





Notem, observant la gràfica que té un punt de tall amb l'eix d'abscisses (solució de l'equació) entre $]-1,1[$

La funció $f(x)$ és contínua i derivable en $\mathbb{R}$
Vegem que la funció és estrictament creixent, calculant el signe positiu de la derivada.

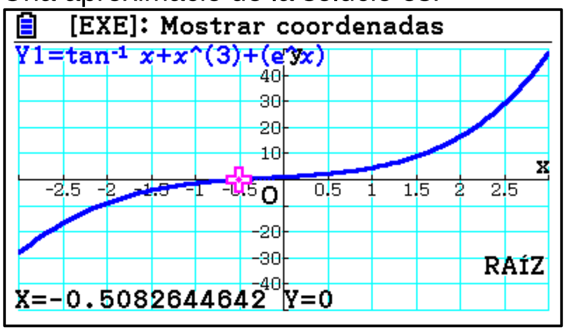
$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + 2x^2 + e^x$$

Els tres sumands són positius. Aleshores, $f'(x) > 0$
La funció $f(x)$ és creixent.
Si la funció té un punt de tall amb l'eix d'abscisses, és únic.

$$f(-1) = -\frac{\pi}{4} - 1 + \frac{1}{e} < 0$$
$$f(1) = \frac{\pi}{4} + 1 + e > 0$$

Aleshores, aplicant el teorema de Bolzano existeix un únic $x \in]-1,1[$ tal que $arctg(x) + x^3 + e^x = 0$

Una aproximació de la solució és:



$x \approx -0.5083$