Mª Àngels Lonjedo
Ricard Peiró

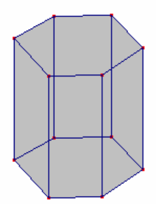
Políedres regulars
Cossos de revolució

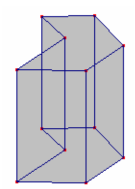
Políedre.
Un políedre és un cos limitat per cares poligonals.

Angle díedre. Angle políedre
S'anomena angle díedre d'un políedre el que està format per dues cares que tenen una aresta comú.
S'anomena angle políedre aquell en el qual concorren tres o més cares.

Ordre d'un vèrtex.
S'anomena ordre d'un vèrtex al nombre de cares que concorren en el vèrtex.

Políedre convex, políedre còncau
Un políedre és convex si qualsevol secció plana del políedre és convexa. El contrari s'anomena polígon còncau.


políedre convex

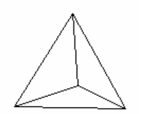
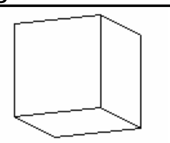
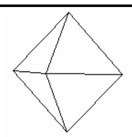
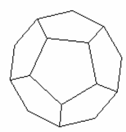
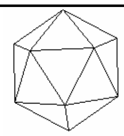

políedre còncau

Teorema d'Euler.
En un políedre convex es compleix que el nombre de cares més el de vèrtexs és igual al nombre d'arestes més dos.

$$\boxed{C+V=A+2}$$

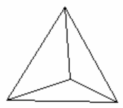
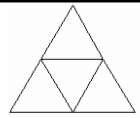
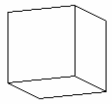
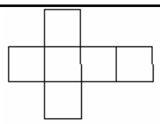
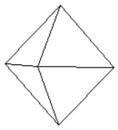
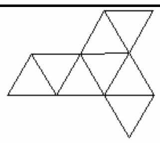
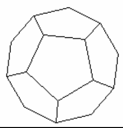
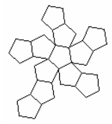
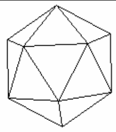
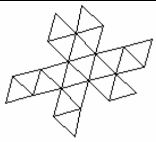
Políedre regular
Políedre regular és aquell que tenen totes les cares polígons regulars iguals i tots els vèrtexs són del mateix ordre.

De políedres regulars només hi ha 5.

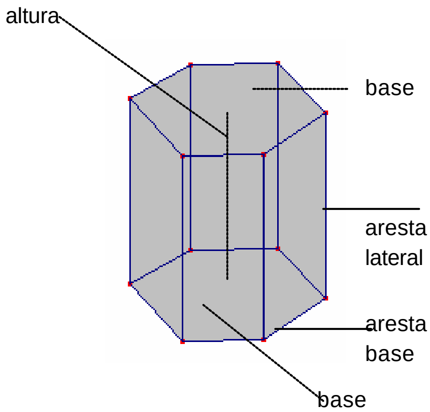
				
Tetràedre	Cub o hexàedre	Octàedre	Dodecàedre	Icosàedre

Mª Àngels Lonjedo
Ricard Peiró

Desenvolupaments del políedres regular. Àrees i volums.

Nom		Desenvolupament	àrea	Volum
Tetràedre			$A = a^2\sqrt{3}$	$V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$
Cub			$A = 6a^2$	$V = a^3$
Octàedre			$A = 2a^2\sqrt{3}$	$V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$
Dodecàedre			$A = 3a^2\sqrt{25+10\sqrt{5}}$	$V = \dfrac{a^3}{4}(15+7\sqrt{5})$
Icosàedre			$A = 5a^2\sqrt{3}$	$V = \dfrac{5a^3}{12}\left(3+\sqrt{5}\right)$

Altres políedres: Prismes i piràmides.



Prisma.

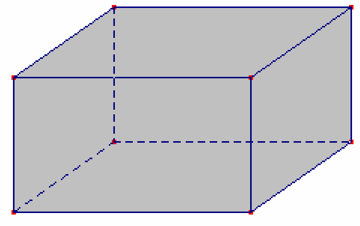
Els prismes són els políedres que tenen dues cares (polígons) iguals i paral·leles anomenades bases i les altres cares laterals són paral·lelograms.

Segons siguen els polígons base els prismes es classifiquen en: triangulars, quadrangulars, pentagonals, etc.

Anomenem altura d'un prisma la distància entre les dues bases.

Prisma regular.
S'anomena prisma regular el prisma recte que les bases són polígons regulars.

Paral·lelepípede.
Un paral·lelepípede és un prisma les bases del qual són paral·lelograms, és a dir, té 6 cares paral·leles dos a dos.
Els paral·lelepípedes rectes s'anomenen ortóedres.

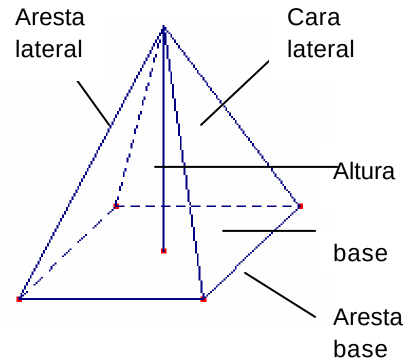


Ortòedre o paral·lepípede recte

El ortòedre tal que totes les cares són quadrats iguals s'anomena cub o hexàedre.

Piràmide.
Les piràmides són el políedres en què una de les cares (anomenada base) és un polígon i les altres cares (anomenades laterals) són triangles que tenen un vèrtex comú.

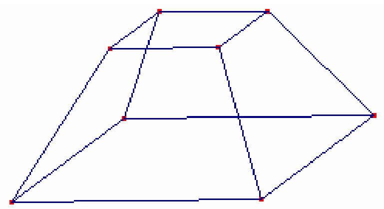
Segons siguen els polígons base les Piràmides es classifiquen en: triangulars, quadrangulars, pentagonals, etc.



Anomenem altura d'una piràmide la distància entre el vèrtex i la base.

Piràmides regulars.
Les piràmides regulars són les que tenen per base un polígon regular i les cares laterals són triangles isòsceles iguals.
S'anomena apotema d'una piràmide regular a l'altura de qualsevol triangle de la cara lateral.

Tronc de piràmide
Tronc de piràmide és la part de piràmide compresa entre la base i una secció paral·lela a la base.



Àrees de prismes i piràmides.

Prisma recte:
$S = 2S_b + S_L$
S_b àrea del polígon base
S_L àrea lateral, $S_L = P \cdot h$,
on P és el perímetre de la base i h és l'altura

Piràmide regular:

$S = S_b + S_L$

S_b àrea del polígon regular base

S_L àrea lateral, $S_L = \dfrac{P \cdot ap}{2}$, on P és el perímetre de la base i ap és l'altura de la cara lateral (apotema)

Tronc de piràmide regular:

$S = S_B + S_b + S_L$

S_B àrea del polígon regular base major. S_b àrea del polígon regular base menor. S_L àrea lateral que són trapezis.

Volums de prismes i piràmides.

Prisma:

$V = S_b \cdot h$

S_b àrea del polígon base, h és l'altura.

Piràmide:

$V = \dfrac{S_b \cdot h}{3}$

S_b àrea del polígon base, h és l'altura.

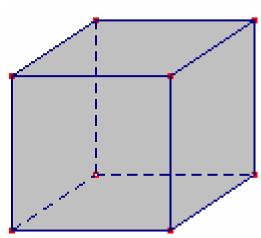
Tronc de piràmide:

$V = \dfrac{1}{3}\left(S_B + S_b + \sqrt{S_B \cdot S_b}\right)h$

on S_B àrea del polígon regular base major. S_b àrea del polígon regular base menor. h és l'altura del tronc de piràmide

Exercicis d'autoaprenentatge:

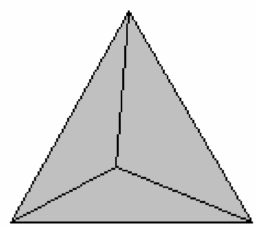
a) Observeu el cub i proveu que compleix el teorema d'Euler:



El cub o hexàedre té 6 cares, 8 vèrtexs i 12 arestes.
Aleshores: C+V=A+2

$6 + 8 = 12 + 2$

A fi de comprovar el teorema d'Euler dels políedres és convenient construir-los.



b) Calculeu l'aresta i el volum d'un tetràedre de superfície $100\,cm^2$.

L'àrea o superfície d'un tetràedre és $A = a^2\sqrt{3}$ on a és l'aresta.

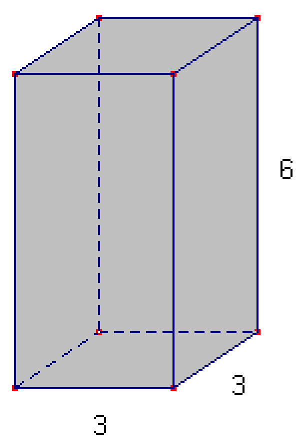
Aleshores $100 = a^2\sqrt{3}$, d'on $a^2 = \dfrac{100}{\sqrt{3}}$

Per tant l'aresta mesura $a=\sqrt{\frac{100}{\sqrt{3}}}\approx 7'598\text{cm}$

El volum d'un tetràedre és $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$

Aleshores el volum és $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}\approx\frac{7'598^3\cdot\sqrt{2}}{12}\approx 51'693\text{cm}^3$

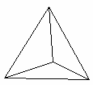
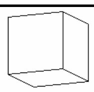
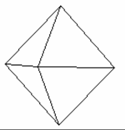
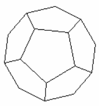
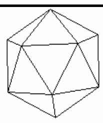
c) Calculeu l'àrea i el volum d'un prisma regular de base quadrangular que té per aresta de la base 3cm i altura 6cm.



La superfície del prisma és $S=2S_b+S_L$
La base és un quadrat de costat 3 i la superfície lateral està formada per 4 rectangles de costat 3cm i 6cm.
Aleshores,
$S=2\cdot 3^2+4\cdot(3\cdot 6)=90\text{cm}^2$
El volum d'un prisma és $V=S_b\cdot h$
Aleshores, $V=3^2\cdot 6=54\text{cm}^3$

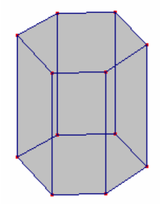
Problemes Proposats:

1 Observeu els políedres regulars (platònics) proveu que compleix el teorema d'Euler. Completeu la taula:

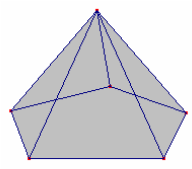
Nom		Cares	Vèrtexs	Arestes
Tetràedre				
Cub		6	8	12
Octàedre				
Dodecàedre				
Icosàedre				

2 Observeu el prima hexagonal i proveu que compleix el teorema d'Euler.

3 Observeu la piràmide pentagonal i proveu que compleix el teorema d'Euler.

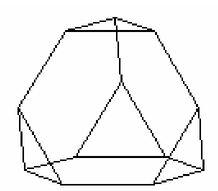


Prisma hexagonal

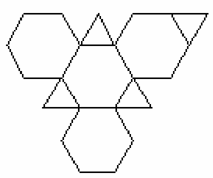


piràmide pentagonal

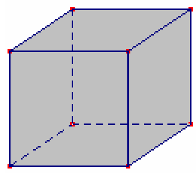
4 Observeu el tetràedre truncat i proveu que compleix el teorema d'Euler.



tetràedre truncat



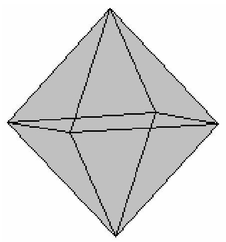
desenvolupament del tetràedre truncat



5 Calculeu l'àrea i el volum d'un cub d'aresta 10cm

6 Calculeu el volum i l'aresta d'un cub de superfície $96cm^2$

7 Calculeu l'àrea i l'aresta d'un cub de volum $800cm^3$.



8 Calculeu l'àrea i el volum d'un octàedre d'aresta 20cm.

9 Calculeu el volum i l'aresta d'un octàedre d'àrea $400cm^2$

10 Calculeu l'àrea i el volum d'un prisma regular hexagonal que té aresta de la base 3cm i altura 5cm.

11 Calculeu l'àrea i el volum d'un prisma regular triangular que té aresta de la base 20cm i altura 10cm.

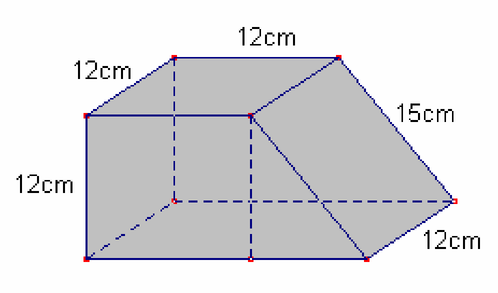
12 Calculeu l'àrea i el volum d'una piràmide regular de base quadrangular que té aresta de la base 30cm i altura 40cm.

13 Calculeu l'àrea i el volum d'una piràmide de base quadrangular que té aresta de la base 20cm i apotema 30cm.

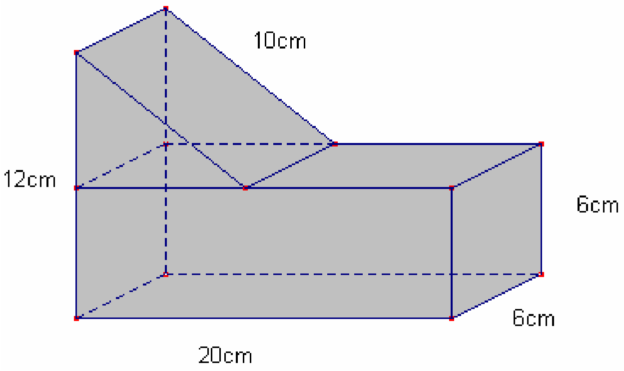
14 Calculeu l'àrea i el volum d'un ortóedre d'arestes 6cm, 8cm, 10cm.

15 Calculeu el volum d'un prisma quadrangular d'aresta de la base 4 i altura h.
Calculeu el volum d'una piràmide de base quadrangular de base 4 i altura h.
En quina proporció estan els dos volums.

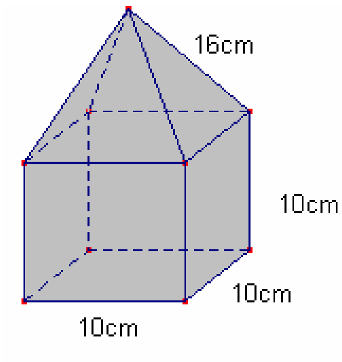
16 Calculeu la superfície i el volum de la següent figura:



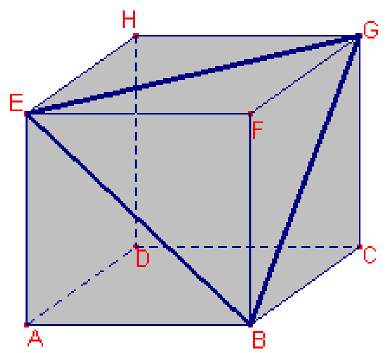
17 Calculeu la superfície i el volum de la següent figura:



18 Calculeu l'àrea i el volum de la següent figura.



19 Considerem el cub ABCDEFGH d'aresta 10cm.
Dins del cub construïm la piràmide BGEF
Calculeu l'àrea i el seu volum de la piràmide BGEF.
En quina proporció estan el volum del cub i el de la piràmide.

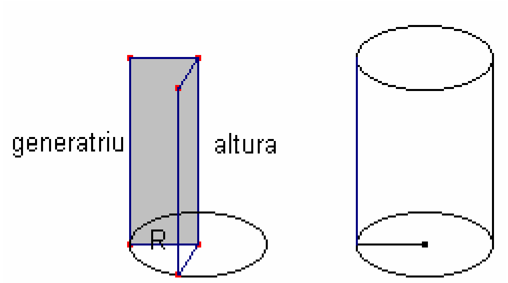


Mª Àngels Lonjedo
Ricard Peiró

COSSOS DE REVOLUCIÓ

Cilindre recte

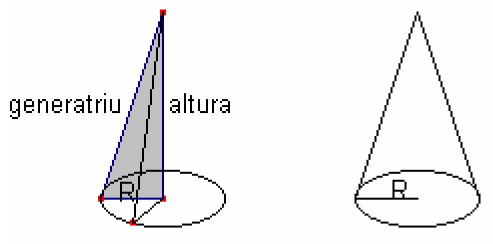
El cilindre recte és el cos geomètric que s'obté al girar un rectangle al voltant d'un costat.
El costat del rectangle que roman fix s'anomena altura.
Al costat oposat s'anomena generatriu.
Els altres dos costats són els radis dels cercles que formen la base.

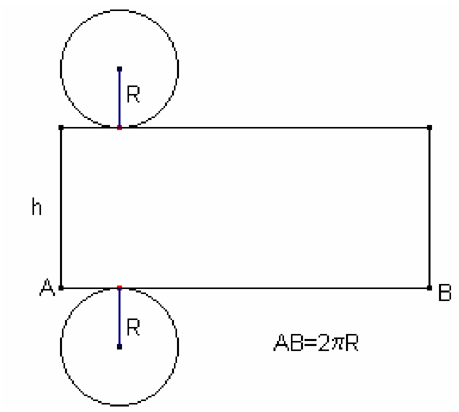


Con recte

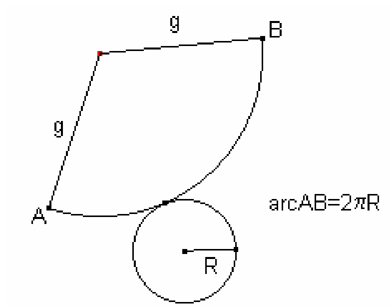
El con recte és el cos geomètric que s'obté quan un triangle rectangle gira sobre un dels catets.

El costat que actua com a eix s'anomena altura, l'altre catet s'anomena radi i a la hipotenusa s'anomena generatriu.





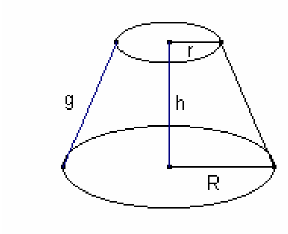
Desenvolupament del cilindre recte



Desenvolupament del con recte

Tronc de con recte

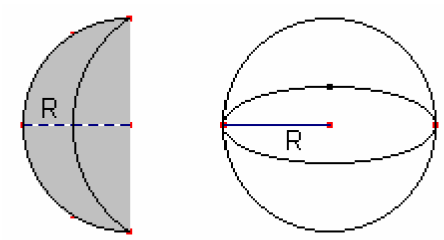
En tallar un con recte amb una secció paral·lela a la base s'obté un con i un tronc de con que és la part compresa entre les dues bases.



La esfera

La esfera és el cos geomètric que s'obté amb la revolució d'un semicercle al girar sobre el diàmetre.

El radi del semicercle s'anomena radi de l'esfera.



Àrees de cossos rodons.

Cilindre recte:	Con recte:	Tronc de con recte:	Esfera:
$S = 2 \cdot S_b + S_L$ $S_b = \pi \cdot R^2$ $S_L = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot h$ $S = 2 \cdot \pi \cdot R^2 + 2 \cdot \pi \cdot R \cdot h$	$S = S_b + S_L$ $S_b = \pi \cdot R^2$ $S_L = \pi \cdot R \cdot g$ $S = \pi \cdot R^2 + \pi \cdot R \cdot g$	$S = S_B + S_b + S_L$ $S = \pi \cdot R^2 + \pi \cdot r^2 + \pi(R + r)g$	$S = 4 \cdot \pi \cdot R^2$

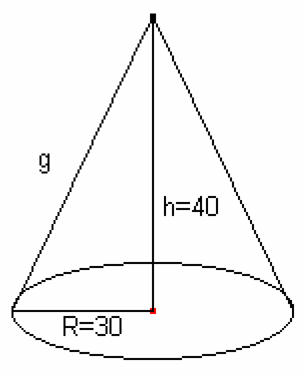
S_b àrea base, S_L àrea lateral

Volums de cossos rodons.

Cilindre:	Con:	Tronc de con:	Esfera:
$V = S_b \cdot h = \pi \cdot R^2 \cdot h$	$V = \frac{S_b \cdot h}{3} = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot h}{3}$	$V = \frac{\pi \cdot h}{3}\left(R^2 + r^2 + Rr\right)$	$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3$

Exercicis d'autoaprenentatge

a) Calculeu l'àrea i el volum d'un con recte de radi 30cm i altura 40cm.
Solució:



$S = \pi \cdot R^2 + \pi \cdot R \cdot g$ $\qquad V = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot h}{3}$

Recordem que aquest con s'obté per revolució d'un triangle rectangle de altura 40cm i radi de la base 30cm

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle:

$g^2 = R^2 + h^2$

$g^2 = 30^2 + 40^2$, $\qquad g^2 = 2500$

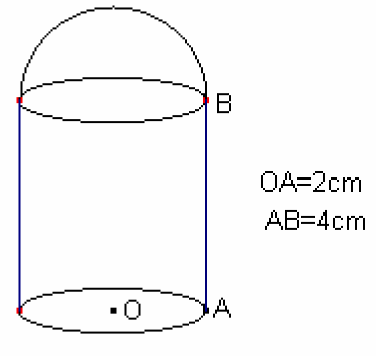
Per tant la generatriu mesura $g = 50cm$

Aleshores:

$S = \pi \cdot R^2 + \pi \cdot R \cdot g = \pi \cdot 30^2 + \pi \cdot 30 \cdot 50 = 2400\pi \approx 7539'82cm^2$

$V = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot h}{3} = \frac{\pi \cdot 30^2 \cdot 40}{3} = 12000\pi \approx 37699'11cm^3$

b) Calculeu la superfície i el volum de la següent figura:



Solució:
La figura està formada per un cilindre recte de radi R=2cm i altura h=4cm i una semiesfera de radi R=2

La superfície està formada per la del cilindre sense una base i mitja esfera.

$$S=\pi\cdot R^2+2\cdot\pi\cdot R\cdot h+\frac{4\cdot\pi\cdot R^2}{2}$$

$$S=\pi\cdot 2^2+2\cdot\pi\cdot 2\cdot 4+2\cdot\pi\cdot 2^2=28\pi\approx 87'96cm^2$$

El volum és la suma del volum del cilindre i la semiesfera.

$$V=\pi\cdot R^2\cdot h+\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot R^3=\pi\cdot 2^2\cdot 4+\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot 2^3=\frac{80}{3}\pi\approx 83'78cm^3$$

Problemes Proposats:

1 Calculeu la superfície i el volum d'una esfera de radi R=10cm

2 Calculeu la superfície i el volum d'un cilindre de radi R=10cm i altura h=20cm

3 Calculeu la superfície i el volum d'un con recte de radi R=20cm i generatriu g=30cm

4 Calculeu el radi i el volum d'una esfera de superfície $S=100cm^2$

5 Calculeu el radi i la superfície d'una esfera de volum $V=500cm^3$

6 Calculeu el pes d'una esfera massissa de ferro de radi R=10cm.

La densitat del ferro és $7873\,\frac{kg}{m^3}$

7 Calculeu el radi d'una esfera massissa de ferro que pesa 50kg.

8 Calculeu el pes d'un cable cilíndric de ferro massís de radi R=1cm i 20m de llarg.

9 Calculeu la superfície i el volum d'un con truncat de radi major R=10cm, radi menut r=4cm i altura h=8cm

10 Quants litres d'aigua caben en un cilindre de radi 2m i altura 4m.

11 Calculeu la superfície i el volum de les següents figures: