

# L'esfera



## L'esfera

L'**esfera** és la figura de l'espai generada per la rotació d'un cercle al voltant d'un dels seus diàmetres.

L'esfera és el lloc geomètric dels punts de l'espai la distància dels quals a un punt fix (anomenat centre) és igual a  $r$  (anomenat radi).

Siga  $O(a, b, c)$  centre de l'esfera. Sigui  $r$  el radi.

La seua equació és:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$$

**Corda** d'una esfera

Segment rectilini que uneix dos punts de l'esfera.

**Diàmetre** d'una esfera.

Corda màxima d'una esfera, és a dir, corda que passa pels centre de l'esfera.

Àrea d'una esfera.

$$S = 4\pi r^2$$

Volum d'una esfera:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Exemple:

Determineu l'equació de l'esfera de centre  $O(-2, 1, 2)$  i radi  $r = 3$

Solució:

L'equació és:

$$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 = 3^2$$

Obrim el *Menú Gráfico 3D*.

Definim i representem l'esfera.

The image shows two panels from a 3D graphing calculator. The left panel is the equation editor, displaying the formula  $(X-a)^2+(Y-b)^2+(Z-c)^2=r^2$ . Below the formula, there are input fields for  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , and  $r$ . The values entered are  $a = -2$ ,  $b = 1$ ,  $c = 2$ , and  $r = 3$ . The right panel shows a 3D coordinate system with a blue sphere centered at  $(-2, 1, 2)$ . The axes are labeled X, Y, and Z, with tick marks at 5 and -5.

Exemple:

Determineu l'equació de l'esfera de centre  $O(3, -2, 1)$  i passa pel punt  $A(2, -1, -3)$

Solució:

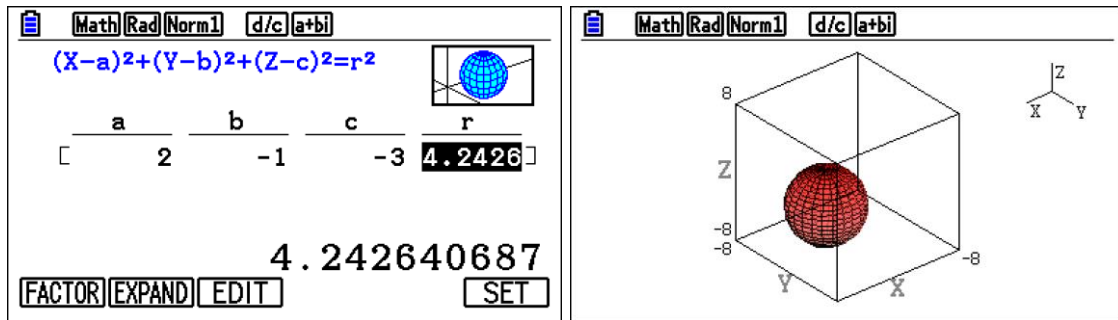
El radi de la circumferència és:

$$r = d(C, A) = \sqrt{(2 - 3)^2 + (-1 + 2)^2 + (-3 - 1)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

L'equació és:

$$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = (3\sqrt{2})^2$$

Obrim el *Menú Gráfico 3D*.  
Definim i representem l'esfera.



Exemple:

Determineu l'equació de l'esfera tals que els punts  $A(2, -3, 5)$ ,  $B(4, 1, -3)$  són els extrems d'un dels seus diàmetres.

Solució:

El centre de l'esfera és el punt mig del segment  $\overline{AB}$ . Les seues coordenades són:  
 $O(3, -1, 1)$

El radi és:

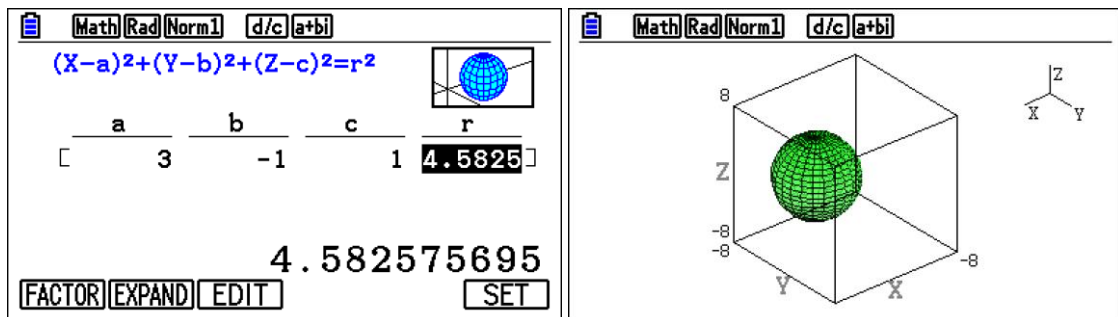
$$r = d(O, A) = +\sqrt{(2-3)^2 + (-3+1)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{21}$$

L'equació és:

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = (\sqrt{21})^2$$

Obrim el *Menú Gráfico 3D*.

Definim i representem l'esfera.



Exemple

Determineu el centre i el radi de l'esfera d'equació:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 2z - 19 = 0$$

Solució:

Completant quadrats:

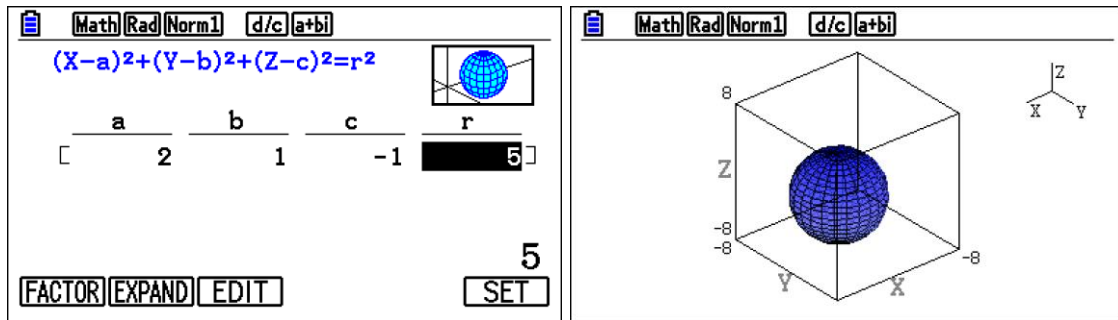
$$(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 19 + 2^2 + 1^2 + 1^2$$

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 5^2$$

El centre és el punt  $O(2, 1, -1)$  el radi és  $r = 5$

Obrim el *Menú Gráfico 3D*.

Definim i representem l'esfera.



## Posicions relatives

Posició relativa d'un punt  $P$  i una esfera de centre  $O$  i radi  $r$ .

Si  $d(O, P) > r$ , el punt és exterior a l'esfera.

Si  $d(O, P) = r$ , el punt pertany a l'esfera.

Si  $d(O, P) < r$ , el punt és interior a l'esfera.

Posició relativa d'una recta  $s$  i una esfera de centre  $O$  i radi  $r$ .

Si  $d(O, s) > r$ , la recta és exterior a l'esfera.

Si  $d(O, s) = r$ , la recta és tangent a l'esfera.

A més a més, Si  $T$  és el punt de tangència, la recta  $s$  és perpendicular a la recta  $\overline{OT}$

Si  $d(O, s) < r$ , la recta és secant a l'esfera, talla l'esfera en dos punts.

Posició relativa d'un plànel  $\pi$  i una esfera de centre  $O$  i radi  $r$ .

Si  $d(O, \pi) > r$ , el plànel és exterior a l'esfera.

Si  $d(O, \pi) = r$ , El plànel és tangent a l'esfera.

A més a més, Si  $T$  és el punt de tangència, el plànel és perpendicular a la recta  $\overline{OT}$

Si  $d(O, \pi) < r$ , El plànel és secant a l'esfera, talla l'esfera en una circumferència.

## Problemes

### Problema 1

Siga l'esfera d'equació  $E \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6z = 0$ .  
Determineu les coordenades del centre i la mesura del radi.  
Verifiqueu si el plànel  $\Pi \equiv 3x - 2y + 6z + 1 = 0$  i l'esfera són secants.  
Determineu el radi de la circumferència intersecció de  $E, \Pi$ .  
Determineu el centre de la circumferència intersecció de  $E, \Pi$ .

### Problema 2

Determineu l'equació de l'esfera de centre  $C(3, -5, -2)$  i tangent al plànel  $2x - y - 3z + 11 = 0$

### Problema 3

Determineu l'equació de l'esfera de radi  $r = 3$ , que és tangent al plànel  $x + 2y + 2z + 3 = 0$  en el punt  $A(1, 1, -3)$

### Problema 4

Determineu l'equació del plànel tangent a l'esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 49$  en el punt  $M(6, -3, -2)$

### Problema 5

Determineu les equacions dels plànols tangents a l'esfera  $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 25$  paral·lels al plànel  $4x + 3z - 17 = 0$

### Problema 6

Determineu l'equació de la circumferència que passa pels punts  $A(3, -1, -2), B(1, 1, -2), C(-1, 3, 0)$

### Problema 7

Demostreu que el plànel  $2x - 6y + 3z - 49 = 0$  és tangent a l'esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 49$   
Calculeu les coordenades del punt de tangència.

### Problema 8

Determineu l'equació del plànel tangent a l'esfera  $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 + (z + 2)^2 = 24$  que passe pel punt  $M(-1, 3, 0)$

### Problema 9

Determineu l'equació de l'esfera que és tangent als plànols  $\Pi \equiv 6x - 3y - 2z - 35 = 0$ ,  $\Omega \equiv 6x - 3y - 2z + 63 = 0$ , sabent que el punt  $M(5, -1, -1)$  és un punt de tangència en un dels plànols.

### Problema 10

Una esfera té el centre en la recta  $r \equiv \begin{cases} 2x + 4y - z - 7 = 0 \\ 4x + 5y + z - 14 = 0 \end{cases}$  i és tangent als plànols  $\Pi \equiv x + 2y - 2z - 2 = 0$ ,  $\Omega \equiv x + 2y - 2z + 4 = 0$ . Determineu la seua equació.

### Problema 11

Determineu la posició relativa de la recta  $r \equiv \begin{cases} x = 2 - 2\alpha \\ y = -\frac{7}{2} + 3\alpha \\ z = -2 + \alpha \end{cases}$  i l'esfera

$$E \equiv x^2 + y^2 + z^2 + x - 4y - 3z + \frac{1}{2} = 0$$

**Problema 12**

En l'esfera d'equació  $E \equiv (x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (x - 3)^2 = 25$  determineu el punt  $M$  més pròxim al plànel  $\Pi \equiv 3x - 4y + 19 = 0$  i calculeu la distància del punt  $M$  a aquest plànel.

**Problema 13**

Determineu l'equació de l'esfera de centre  $O(2, 3, -1)$  que talla la recta

$$s \equiv \begin{cases} 5x - 4y + 3z + 20 = 0 \\ 3x - 4y + z - 8 = 0 \end{cases} \text{ amb una corda de longitud igual a 16.}$$

**Problema 14**

Determineu el centre  $C$  i el radi  $r$  de la circumferència

$$\begin{cases} (x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 100 \\ 2x - 2y - z + 9 = 0 \end{cases}$$

**Problema 15**

Determineu l'equació de l'esfera que passa pels punts

$$A(1, -2, -1), B(-5, 10, -1), C(4, 1, 11), D(-8, -2, 2)$$

**Problema 16**

Determineu l'equació de l'esfera que passa pels punts

$$A(3, 1, -3), B(-2, 4, 1), C(-5, 0, 0) \text{ i té el centre en el plànel } \Pi \equiv 2x + y - z + 3 = 0$$

**Problema 17**

$$\text{Siga l'esfera } x^2 + y^2 + z^2 + 6y - 4z + 9 = 0$$

Determineu l'equació de l'esfera concèntrica amb ella que és tangent al plànel

$$2x - 3y + 2z + 4 = 0$$

**Problema 18**

$$\text{Siga l'esfera } x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 4y + 8z + 20 = 0$$

Calculeu l'esfera d'igual radi, tangent exterior en el punt  $A(1, 4, -3)$  de l'esfera.

Calculeu l'esfera d'igual radi, tangent exterior en el punt diametralment oposat al punt  $A(1, 4, -3)$  de l'esfera.

**Problema 19**

Siguen les esferes d'equacions

$$E_1 \equiv x^2 + y^2 + z^2 = 25, E_2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 15y - 25z = 0$$

- Proveu que les dues esferes són secants.
- Determineu el plànel que conté la intersecció de les dues esferes.
- Determineu el centre i el radi de la circumferència intersecció.

**Problema 20**

Calculeu la distància més curta del punt  $A(1, -1, 3)$  a l'esfera

$$E \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 10z - 62 = 0$$

En quin punt de l'esfera s'assoleix la distància més curta.

**Problema 21**

Pels punts intersecció de la recta  $r \equiv \begin{cases} x = -5 + 3t \\ y = -11 + 5t \\ z = 9 - 4t \end{cases}$  i de l'esfera d'equació

$E \equiv (x + 2)^2 + (y - 1)^2 + (z + 5)^2 = 49$  s'han traçat plànel tangents determineu les seues equacions.

### Problema 22

Determineu l'equació de l'esfera que passa per les circumferències  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ z = 2 \end{cases}$   
 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ z = 3 \end{cases}$

### Problema 23

Donades les esferes  $E_1 \equiv 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 3x - 2y + z - 5 = 0$ ,  
 $E_2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 - x + 3y - 2z + 1 = 0$

- Determineu la posició relativa de les dues esferes.
- Si són secants, determineu el plànel on es tallen.
- Determineu el centre i el radi de la circumferència intersecció de les dues esferes.

### Problema 24

Proveu que el punt  $T(1, 0, 1)$  pertany al plànel  $\pi \equiv x - 2y + 2z = 3$ .  
Determineu l'equació de l'esfera que passa pel punt  $P(1, 0, 5)$  i és tangent en  $T$  al plànel  $\pi$ .

### Problema 25

Considerem els punts  $A(2, 3, 6)$ ,  $B(6, 2, -3)$ ,  $C(3, -6, 2)$  en l'espai tridimensional.  
Verifiqueu que els segments  $\overline{OA}$ ,  $\overline{OB}$ ,  $\overline{OC}$  són arestes d'un cub, on  $O(0, 0, 0)$ .  
Determineu el centre i el radi de l'esfera circumscrita al cub.

### Problema 26

Siguen les esferes  $E_1 \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 12y + 6z + 45 = 0$ ,  $E_2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 = 81$   
a) Demostreu que les dues esferes són tangents.  
b) Determineu l'equació del plànel tangent a les dues esferes.

### Problema 27

Siguen les esferes  $E_1 \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 2y - 4z + 11 = 0$ ,  
 $E_2 \equiv (x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 2)^2 = 3^2$   
a) Demostreu que les dues esferes són tangents.  
b) Determineu l'equació del plànel tangent a les dues esferes.

### Problema 28

Determineu l'equació de l'esfera  $E$ , amb centre sobre la recta  $r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases} t \in \mathbb{R}$   
Tangent al plànel  $\pi \equiv 3x - y - 2z + 14 = 0$  en el punt  $T(-4, 0, 1)$

### Problema 29

Els punts  $A(3, -2, 5)$ ,  $B(-1, 6, -3)$  són els extrems d'un diàmetre d'una circumferència que passa pel punt  $C(1, -4, 1)$   
Determineu l'equació de la circumferència.

### Problema 30

El punt  $C(1, -1, -2)$  és el centre d'una circumferència que talla la recta  $r \equiv \begin{cases} 2x - y + 2z - 12 \\ 4x - 7y - z + 6 = 0 \end{cases}$  una corda de longitud 8.  
Determineu l'equació de la circumferència.



### Problema 31

Demostreu que per la recta  $r \equiv \begin{cases} x = 4 + 4t \\ y = 1 + 3t \\ z = 1 + t \end{cases}$  només es pot traçar un plànel tangent a l'esfera  $E \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y + 2z + 8 = 0$ .  
Determineu la seua equació.

### Problema 32

Determineu l'equació de l'esfera de radi  $\sqrt{6}$  tangent al plànel  $\pi \equiv x + 2y - z + 1 = 0$  en el punt de coordenades  $(1, 0, 2)$ .

### Problema 33

Determineu el punt  $O$  del plànel  $\pi \equiv x + y + z = 1$  que equidista dels punts  $A(1, -1, 2)$ ,  $B(3, 1, 2)$ ,  $C(1, 1, 0)$ . Determineu l'equació de l'esfera de centre el punt  $O$  anterior que passa pels tres punts  $A, B, C$ .

### Problema 34

Donades les esferes d'equacions:

$$E_1 \equiv (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 4, E_2 \equiv (x - 2)^2 + (y - 4)^2 + (z - 3)^2 = 4.$$

- Proveu que són secants.
- Determineu el plànel intersecció de les dues esferes.
- Calculeu el centre i el radi de la circumferència intersecció.
- Calculeu el volum de la intersecció de les dues esferes.

### Problema 35

Donades les esferes d'equacions:

$$E_1 \equiv (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 4, E_2 \equiv (x - 2)^2 + (y - 4)^2 + (z - 3)^2 = 9.$$

- Proveu que són secants.
- Determineu el plànel intersecció de les dues esferes.
- Calculeu el centre i el radi de la circumferència intersecció.
- Calculeu el volum de la intersecció de les dues esferes.

### Problema 36

Determineu l'equació de l'esfera que passe per l'origen de coordenades i per la circumferència d'equació  $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25 \\ 2x - 3y + 5z - 5 = 0 \end{cases}$

### Problema 37

Determineu l'equació de l'esfera que passa pel punt  $P(4, -1, -1)$  i és tangents als tres plànols coordenats.

### Problema 38

Donats el punt  $P(1, 2, -1)$  i el plànel  $\pi \equiv x + 2y - 2z + 2 = 0$ , siga  $S$  l'esfera que és tangent al plànel  $\pi$  en un punt  $P'$  de forma que el segment  $\overline{PP'}$  és un dels seus diàmetres.

Es demana:

Determinar les coordenades del punt de tangència  $P'$

Determinar l'equació de l'esfera  $S$ .

### Problema 39

Determineu l'equació de l'esfera que passa pels punts  $A(4, 2, -3)$ ,  $B(-1, 3, 1)$  i té el centre en la recta que passa pels punts  $C(2, 3, 7)$ ,  $D(1, 5, 9)$ .

**Problema 40**

Siguen l'esfera  $E \equiv x^2 + y^2 + z^2 = 9$  i els punts  $A(3, 0, 6), B(3, 5, 1)$ .  
Determineu els plànols tangents a l'esfera  $E$  que contenen els punts  $A, B$ .

**Problema 41**

Determineu l'esfera de centre  $A(6, 3, -4)$  i tangent a l'eix  $O_x$ .

**Problema 42**

Donats els punts  $A(2, 0, -1), B(-2, 2, 1)$ , proveu que el lloc geomètric dels punts  $P$  de l'espai que compleixen  $\overline{PA} = \sqrt{2} \cdot \overline{PB}$  és una esfera  $E$ .

- Escriu l'equació reduïda de l'esfera  $E$ .
- Proveu que el punt  $T(-10, 8, 7)$  pertany a l'esfera  $E$ .
- Determineu l'equació del plànel tangent a l'esfera  $E$  en el punt  $T$ .

**Problema 43**

Determineu l'equació de l'esfera de centre en el plànel  $z = 4$  tangent al plànel  $O_{xy}$  en el punt  $T(2, 3, 0)$

**Problema 44**

Determineu l'equació de l'esfera que té el centre en el plànel  $\pi_1 \equiv 2x + 2y - z + 2 = 0$  i és tangent al plànel  $\pi_2 \equiv 2x + 2y - z - 4 = 0$  en el punt  $T(3, 0, 2)$

**Problema 45**

Determineu l'equació de l'esfera que té el centre en el plànel  $\pi_1 \equiv x + y + z = 0$  i és tangent al plànel  $\pi_2 \equiv 2x - y + 2z - 3 = 0$  en el punt  $T(3, 1, -1)$

**Problema 46**

Determineu l'equació de l'esfera de radi 2 que té el centre en l'eix  $O_y$  que és tangent exterior a l'esfera  $E \equiv (x - 4)^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2 = 9$ .  
Determineu el punt de tangència.

**Problema 47**

Determineu l'equació de l'esfera de centre  $C(6, 3, -4)$  tangent a l'eix  $O_x$ .

**Problema 48**

Determineu el lloc geomètric dels punts de l'espai que la suma dels quadrats de les distàncies als punts  $A(-2, 2, 4), B(0, 0, -4)$  és 80.  
Determineu els seus elements.

**Problema 49**

Determineu la recta perpendicular al plànel  $\pi \equiv x - y - 2 = 0$  i siga un diàmetre de l'esfera  $E \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y = 0$   
Calculeu els extrems del diàmetre.

**Problema 50**

Determineu el lloc geomètric dels punts  $X$  tal que  $\overline{MX}$  i  $\overline{NX}$  són ortogonals essent  $M(1, 1, 0), N(0, 1, 0)$

**Problema 51**

Determineu l'equació de l'esfera concèntrica a l'esfera  $E \equiv x^2 + y^2 + z^2 + x + 2y - 2z - 1 = 0$ , que passa pel punt  $P\left(-\frac{1}{2}, -1, 1\right)$

**Problema 52**

Determineu l'equació de l'esfera que passa pels punts  $A(6, -1, 3)$ ,  $B(0, 7, 5)$  i té el centre en la recta  $r \equiv \begin{cases} x - 2z + 3 = 0 \\ y - z + 1 = 0 \end{cases}$

**Problema 53**

Determineu els plànols tangents a l'esfera d'equació

$$E \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 8z + 10 = 0$$

En els punts d'intersecció de la recta  $r \equiv \begin{cases} x - 2z = -1 \\ y + z = 1 \end{cases}$  i l'esfera.

**Problema 54**

Determineu el lloc geomètric dels punts tals que la proporció entre les distàncies a dos punts fixos  $A(1, 1, -2)$ ,  $B(-2, 3, 2)$  és 1:3.

**Problema 55**

Determineu l'equació de l'esfera tangent a la recta intersecció dels plànols

$$\pi_1 \equiv x - y + z = 0, \pi_2 \equiv 2x - y - z = 3 \text{ i concèntrica a l'esfera d'equació}$$

$$E \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 6y - 8z + 16 = 0$$

**Problema 56**

Determineu les equacions de les esferes els centres de les quals pertanyen al plànel  $\pi \equiv 3x + 2y - z - 8 = 0$  i són tangents als plànols coordenats.

**Problema 57**

Determineu la màxima esfera de centre  $O(5, 4, 9)$  continguda en el primer octant.

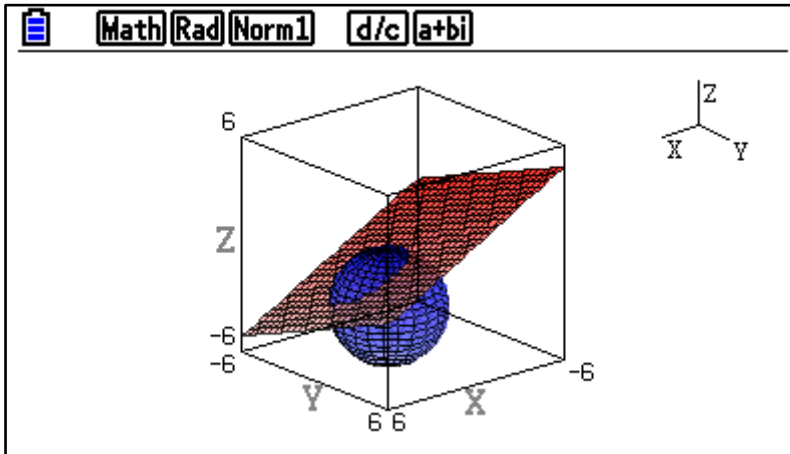
**Problema 1**

Siga l'esfera d'equació  $E \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6z = 0$ .  
 Determineu les coordenades del centre i la mesura del radi.  
 Verifiqueu si el plànol  $\Pi \equiv 3x - 2y + 6z + 1 = 0$  i l'esfera són secants.  
 Determineu el radi de la circumferència intersecció de  $E, \Pi$ .  
 Determineu el centre de la circumferència intersecció de  $E, \Pi$ .

Solució:

Obrim el *Menú Gráfico 3D*.

Representem l'esfera i el plànol:



Completant quadrats:

$$E \equiv (x - 1)^2 + y^2 + (z + 3)^2 = (\sqrt{10})^2$$

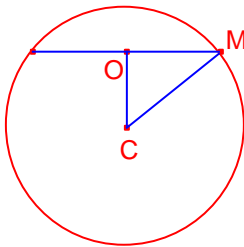
Les coordenades del centre són  $C(1, 0, -3)$  i el radi  $R = \sqrt{10}$ .

Per estudiar la posició relativa del plànol i l'esfera, calculem la distància del centre de l'esfera al plànol.

$$d(C, \Pi) = \left| \frac{3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 + 6(-3) + 1}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 6^2}} \right| = 2$$

$$d(C, \Pi) = 2 < R = \sqrt{10}$$

Aleshores, el plànol i l'esfera són secants.



Considerem la circumferència intersecció de l'esfera i el plànol.

Siga  $O$  el centre de la circumferència.

Siga la secció de l'esfera que passa pel centre  $C$  i perpendicular al plànol

Siga  $r = \overline{OM}$  el radi de la circumferència intersecció.

$$\overline{CO} = 2, \overline{CM} = \sqrt{10}$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $\triangle COM$

$$r^2 = (\sqrt{10})^2 - 2^2 = 6$$

$$r = \sqrt{6}$$

Per calcular el centre de la circumferència intersecció de  $E, \Pi$ , determinem la intersecció de la recta perpendicular a  $\Pi$  que passa pel centre  $C(1, 0, -3)$  de l'esfera i el plànol  $\Pi$

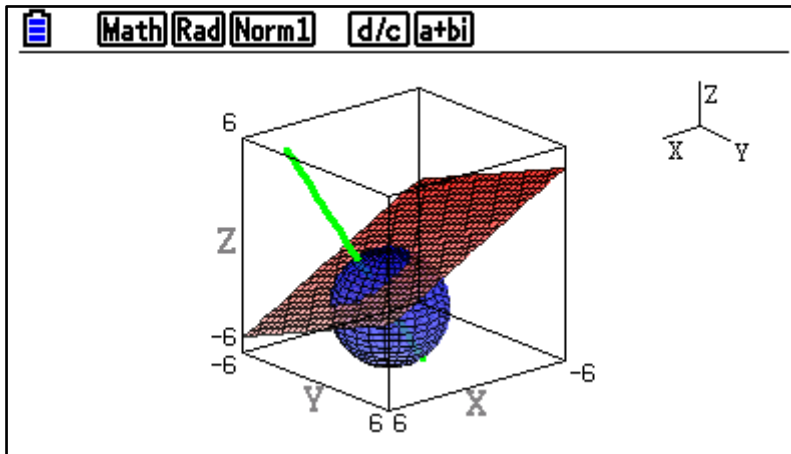
El vector director de la recta perpendicular al plànol que passa per  $C$  és el vector característic del plànol  $v = (3, -2, 6)$ .

La seua equació vectorial és:

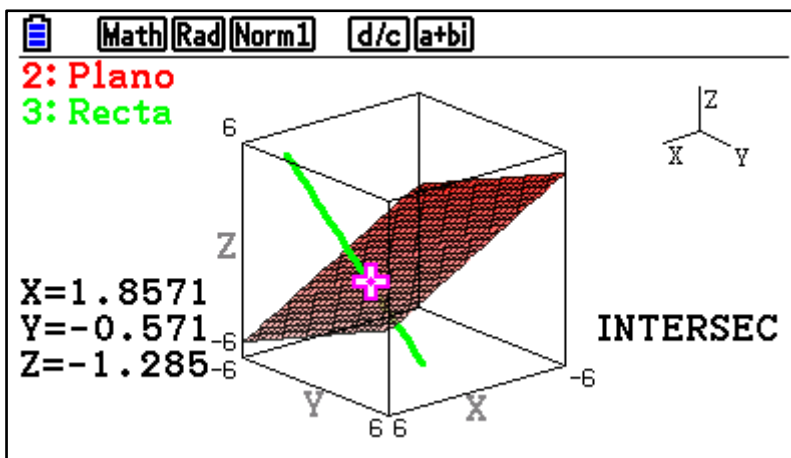
$$r \equiv (x, y, z) = (1, 0, -3) + (3, -2, 6)\alpha$$

Obrim el *Menú Gráfico 3D*.

Dibuixem la recta  $r$ :



Amb la funció *G-Solv* determinem la intersecció de la recta  $r$  i el plànol  $\Pi$ .



El centre de la circumferència és:  
 $P(1.8571, -0.571, -1.285)$

Analíticament, per calcular el punt intersecció resoldrem el sistema format per la recta  $r$  i el plànol  $\Pi$ .

$$r \equiv \begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ 3y + z = -3 \\ 3x - 2y + 6z = -1 \end{cases}$$

Obrim el *Menú Ecuación*:

Resolem el sistema d'equacions lineals format per la recta  $r$  i el plànol  $\Pi$ .

Math Rad Norm1 d/c a+bi

$a_n X + b_n Y + c_n Z = d_n$

	a	b	c	d
1	3	-2	6	-1
2	2	3	0	2
3	0	3	1	-3

SOLVE DELETE CLEAR EDIT

Math Rad Norm1 d/c a+bi

$a_n X + b_n Y + c_n Z = d_n$

X [ 1.8571 ]  
 Y [ -0.571 ]  
 Z [ -1.285 ]

$\frac{13}{7}$

REPEAT

$$\begin{cases} x = \frac{13}{7} \\ y = -\frac{4}{7} \\ z = -\frac{9}{7} \end{cases}$$

Aleshores, el centre de la circumferència és:

$$P\left(\frac{13}{7}, -\frac{4}{7}, -\frac{9}{7}\right)$$

**Problema 2**

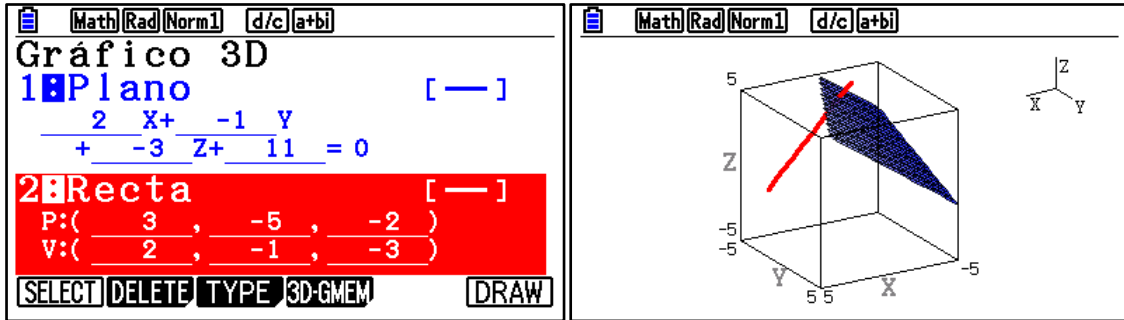
Determineu l'equació de l'esfera de centre  $C(3, -5, -2)$  i tangent al plànel  $2x - y - 3z + 11 = 0$

Solució:

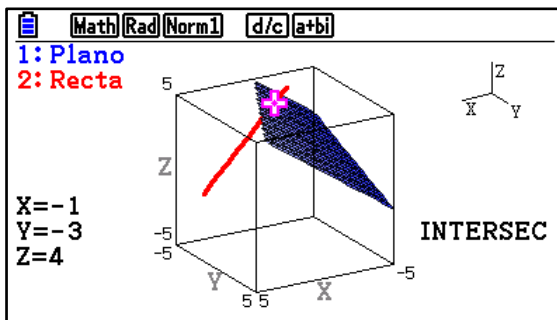
Obrim el *Menú Gráfico 3D*.

Definim el plànel i la recta que passa pel punt  $C(3, -5, -2)$  i té vector director el característic del plànel  $a = (2, -1, -3)$ . Recta perpendicular al plànel.

La intersecció de la recta i el plànel ens dona el punt de tangència de l'esfera i el plànel.



Amb la funció *G-Solv*, determinem la intersecció de la recta i el plànel.



El punt de tangència és  $T(-1, 3, 4)$

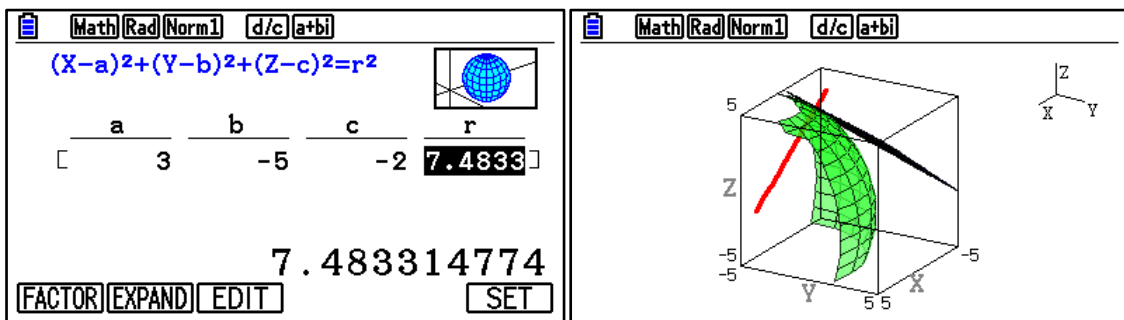
El radi de l'esfera és la distància entre el centre i el punt de tangència:

$$r = \sqrt{(-4)^2 + 2^2 + 6^2} = 2\sqrt{14}$$

L'equació de l'esfera és:

$$E \equiv (x - 3)^2 + (y + 5)^2 + (z + 2)^2 = (2\sqrt{14})^2$$

Definim l'equació de l'esfera i la representem gràficament.



### Problema 3

Determineu l'equació de l'esfera de radi  $r = 3$ , que és tangent al plànel  $x + 2y + 2z + 3 = 0$  en el punt  $A(1, 1, -3)$

Solució:

El centre de l'esfera pertany a la recta perpendicular al plànel en el punt  $A(1, 1, -3)$

La recta té per vector director el característic del plànel,  $a = (1, 2, 2)$

La seua equació paramètrica és:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = 1 + 2\alpha \\ z = -3 + 2\alpha \end{cases}$$

Un punt qualsevol de la recta  $r$  és:

$$P(1 + \alpha, 1 + 2\alpha, -3 + 2\alpha)$$

$$\overrightarrow{AP} = (\alpha, 2\alpha, 2\alpha)$$

El radi de l'esfera és:

$$r = \|\overrightarrow{AP}\| = 3$$

$$\sqrt{\alpha^2 + 4\alpha^2 + 4\alpha^2} = 3$$

Resolent l'equació:

$$\alpha = 1, -1$$

El problema de dues solucions.

Si  $\alpha = 1$

L'esfera de centre  $O_1(2, 3, -1)$

La seua equació és:

$$C_1 \equiv (x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z + 1)^2 = 3^2$$

Si  $\alpha = -1$

L'esfera de centre  $O_2(0, -1, -5)$

La seua equació és:

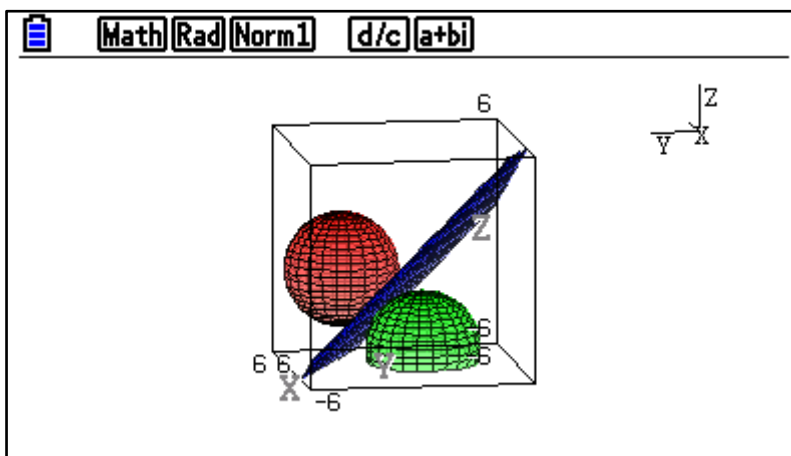
$$C_2 \equiv x^2 + (y + 1)^2 + (z + 5)^2 = 3^2$$

Obrim el *Menú Gráfico 3D*

Definim el plànel  $x + 2y + 2z + 3 = 0$  i les esferes

$$C_1 \equiv (x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z + 1)^2 = 3^2$$

$$C_2 \equiv x^2 + (y + 1)^2 + (z + 5)^2 = 3^2$$





**Problema 4**

Determineu l'equació del plànel tangent a l'esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 49$  en el punt  $M(6, -3, -2)$

Solució:

L'esfera té centre el punt  $O(0, 0, 0)$  i radi  $r = 7$

El punt  $M(6, -3, -2)$  pertany a l'esfera ja que  $6^2 + (-3)^2 + (-2)^2 = 49$

El vector característic del plànel tangent a l'esfera en el punt  $M$  és:

$$\overrightarrow{OM} = (6, -3, -2)$$

L'equació del plànel és:

$$6(x - 6) - 3(y + 3) - 2(z + 2) = 0$$

Simplificant:

$$6x - 3y - 2z - 49 = 0$$

Obrim el *Menú Gráfico 3D*

Definim l'esfera i el plànel i els representem:

Math Rad Norm1 d/c a+bi

$$(X-a)^2+(Y-b)^2+(Z-c)^2=r^2$$

a      b      c      r

[ 0      0      0      7 ]

7

FACTOR EXPAND EDIT SET

Math Rad Norm1 d/c a+bi

$$aX+bY+cZ+d=0$$

a      b      c      d

[ 6      -3      -2      -49 ]

-49

EXPRESS VECTOR POINTS EDIT SET

Math Rad Norm1 d/c a+bi

Gráfico 3D

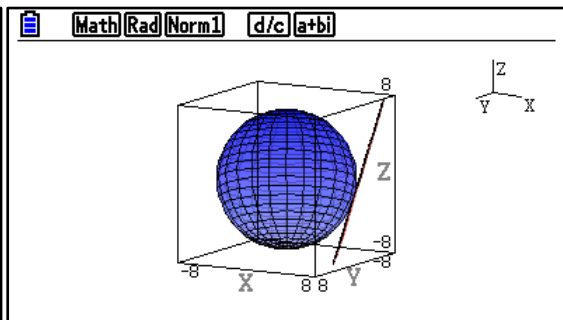
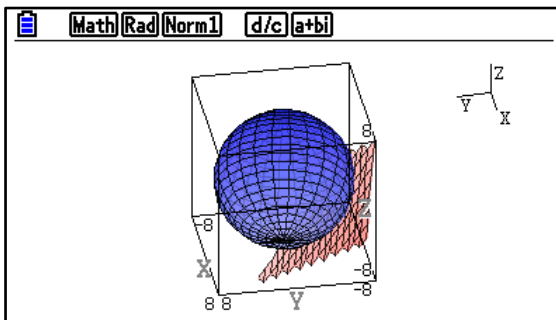
1 Esfera [ — ]

$$(X-0)^2+(Y-0)^2+(Z-0)^2=7^2$$

2 Plano [ — ]

$$6X + -3Y + -2Z + -49 = 0$$

SELECT DELETE TYPE 3D-GMEM DRAW



**Problema 5**

Determineu les equacions dels plànols tangents a l'esfera

$$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 25 \text{ paral·lels al plànel } 4x + 3z - 17 = 0$$

Solució:

L'esfera té centre  $O(3, -2, 1)$  i radi  $r = 5$

El vector característic del plànel  $4x + 3z - 17 = 0$  és  $a = (4, 0, 3)$

La recta perpendicular al plànel  $4x + 3z - 17 = 0$  que passa pel centre de l'esfera té direcció el vector característic del plànel:

$$(x, y, z) = (3, -2, 1) + \alpha(4, 0, 3)$$

Amb la intersecció de la recta i l'esfera calculem els punts de tangència:

$$\begin{cases} (x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 25 \\ (x, y, z) = (3, -2, 1) + \alpha(4, 0, 3) \end{cases}$$

$$(4\alpha)^2 + 0^2 + (3\alpha)^2 = 25$$

$$(4\alpha)^2 + 0^2 + (3\alpha)^2 = 25$$

Aleshores,  $\alpha = 1, -1$

Si  $\alpha = 1$ , el punt de tangència és  $T_1(7, -2, 4)$

L'equació del plànel és:

$$\pi_1 \equiv 4(x - 7) + 3(z - 4) = 0$$

$$\pi_1 \equiv 4x + 3z - 40 = 0$$

$\alpha = -1$

el punt de tangència és  $T_2(-1, -2, -2)$

L'equació del plànel és:

$$\pi_2 \equiv 4(x + 1) + 3(z + 2) = 0$$

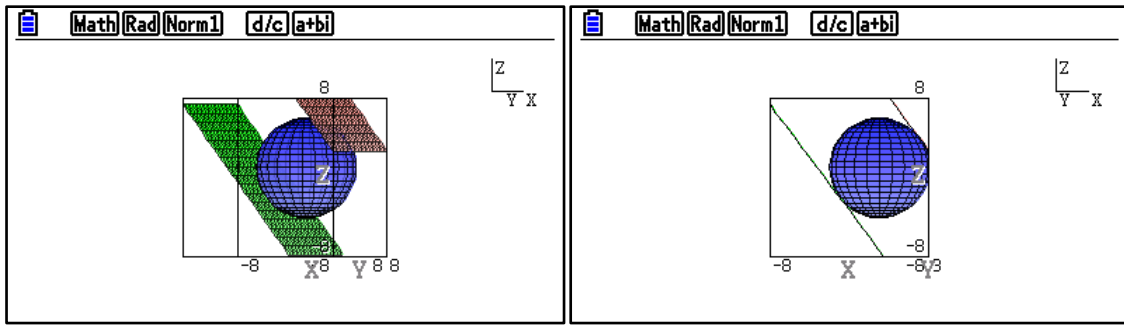
$$\pi_2 \equiv 4x + 3z + 10 = 0$$

Obrim el *Menú Gráfico 3D*

Definim l'esfera i els dos plànols i els representem:

The image shows four screenshots of a TI-84 Plus calculator interface, arranged in a 2x2 grid, demonstrating the input of a sphere and two planes in 3D mode.

- Top-left screenshot:** Shows the sphere equation  $(X-a)^2 + (Y-b)^2 + (Z-c)^2 = r^2$ . The input fields are:  $a=3$ ,  $b=-2$ ,  $c=1$ , and  $r=5$ . The value 5 is entered in the  $r$  field. Buttons: FACTOR, EXPAND, EDIT, SET.
- Top-right screenshot:** Shows the plane equation  $aX+bY+cZ+d=0$ . The input fields are:  $a=4$ ,  $b=0$ ,  $c=3$ , and  $d=-40$ . The value -40 is entered in the  $d$  field. Buttons: EXPRESS, VECTOR, POINTS, EDIT, SET.
- Bottom-left screenshot:** Shows the plane equation  $aX+bY+cZ+d=0$ . The input fields are:  $a=4$ ,  $b=0$ ,  $c=3$ , and  $d=10$ . The value 10 is entered in the  $d$  field. Buttons: EXPRESS, VECTOR, POINTS, EDIT, SET.
- Bottom-right screenshot:** Shows the 3D Graphics menu. It lists two planes:
  - 2 Plano:  $4X + 0Y + 3Z - 40 = 0$
  - 3 Plano:  $4X + 0Y + 3Z + 10 = 0$  (highlighted in green)
 Buttons: SELECT, DELETE, TYPE, 3D-GMEM, DRAW.



**Problema 6**

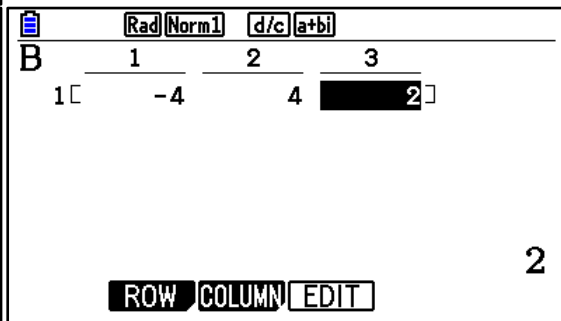
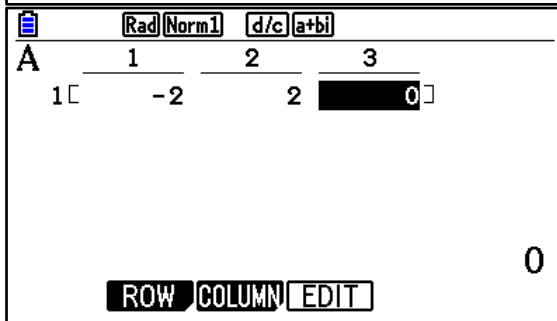
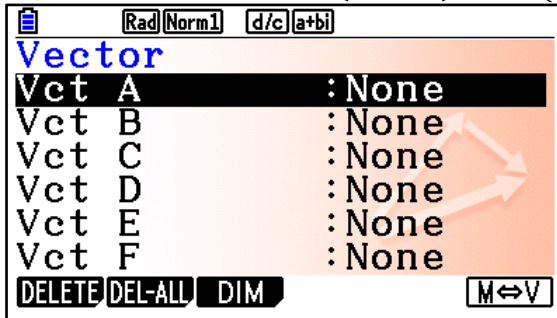
Determineu l'equació de la circumferència que passa pels punts  $A(3, -1, -2), B(1, 1, -2), C(-1, 3, 0)$

Solució:

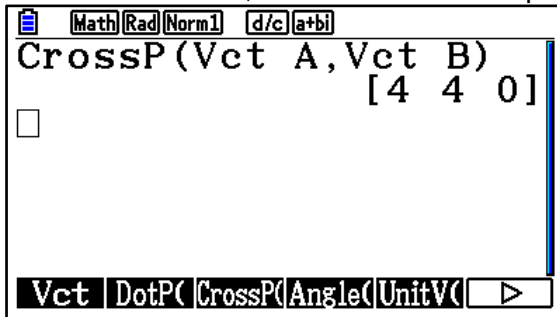
Determineu el plànel que passa pels punts  $A, B, C$ :

Obrim el *Menú Ejec-Mat*.

Definim els vectors  $\overrightarrow{AB} = (-2, 2, 0), \overrightarrow{AC} = (-4, 4, 2)$



Calculem  $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ , vector característic que passa pels punts  $A, B, C$ .



El plànel que passa per  $A, B, C$  té equació:

$$\pi_{ABC} \equiv x + y + D = 0$$

El punt  $A(3, -1, -2)$  pertany al plànel.

$$\text{Aleshores, } 3 - 1 + D = 0$$

$$D = -2$$

$$\pi_{ABC} \equiv x + y - 2 = 0$$

Per determinar el centre d'una de les esferes que passen pels punts  $A, B, C$

determinarem els plànols mediadors dels segments  $\overline{AB}, \overline{AC}$  i calcularem la intersecció d'aquests dos plànols i del plànel que passa per  $A, B, C$ .

El punt mig  $C_1$  del segment  $\overline{AB}$  té coordenades:

$$C_1(2, 0, -2)$$

El vector característic del plànel medidor del segment  $\overline{AB}$  és  $\overrightarrow{AB} = (-2, 2, 0)$

La seua equació és:

$$\pi_1 \equiv -x + y + E = 0$$

El punt  $C_1(2, 0, -2)$  pertany al plànel

$$-2 + 0 + E = 0$$

$$E = 2$$

$$\pi_1 \equiv -x + y + 2 = 0$$

El punt mig  $B_1$  del segment  $\overline{AC}$  té coordenades:

$$B_1(1, 1, -1)$$

El vector característic del plànol mediador del segment  $\overline{AC}$  és  $\overline{AC} = (-4, 4, 2)$

La seua equació és:

$$\pi_2 \equiv -2x + 2y + z + F = 0$$

El punt  $B_1(1, 1, -1)$  pertany al plànol

$$-2 + 2 - 1 + F = 0$$

$$F = 1$$

$$\pi_2 \equiv -2x + 2y + z + 1 = 0$$

El centre és la intersecció dels tres plànol.:

Obrim el *Menú Ecuación*:

Resolem el sistema:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ -x + y = -2 \\ -2x + 2y + z = -1 \end{cases}$$

Calculator screen showing the augmented matrix for the system of equations:

$$\begin{array}{cccc|c} & a & b & c & d \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & 2 & 1 & -1 \end{array}$$

Buttons: SOLVE, DELETE, CLEAR, EDIT

Calculator screen showing the solution for the variables:

$$\begin{array}{l} X \\ Y \\ Z \end{array} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Button: REPEAT

Les coordenades del centre són:

$$O(2, 0, 3)$$

El radi de la circumferència que passa pels punts  $A, B, C$  és:

$$r = \sqrt{(3-2)^2 + (-1-0)^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{27}$$

L'equació de la circumferència és igual a la intersecció del plànol  $\pi_{ABC} \equiv x + y - 2 = 0$

i l'esfera de centre  $O(2, 0, 3)$  i radi  $r = \sqrt{27}$

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ (x-2)^2 + y^2 + (z-3)^2 = 27 \end{cases}$$

Obrim el *Menú Gráfico 3D*

Definim i representem les equacions del plànol  $\pi_{ABC} \equiv x + y - 2 = 0$  i l'esfera

$$(x-2)^2 + y^2 + (z-3)^2 = 27$$

Calculator screen showing the 3D equation of the plane:

$$aX + bY + cZ + d = 0$$

$$\begin{array}{cccc|c} & a & b & c & d \\ [ & 1 & 1 & 0 & -2 \end{array}$$

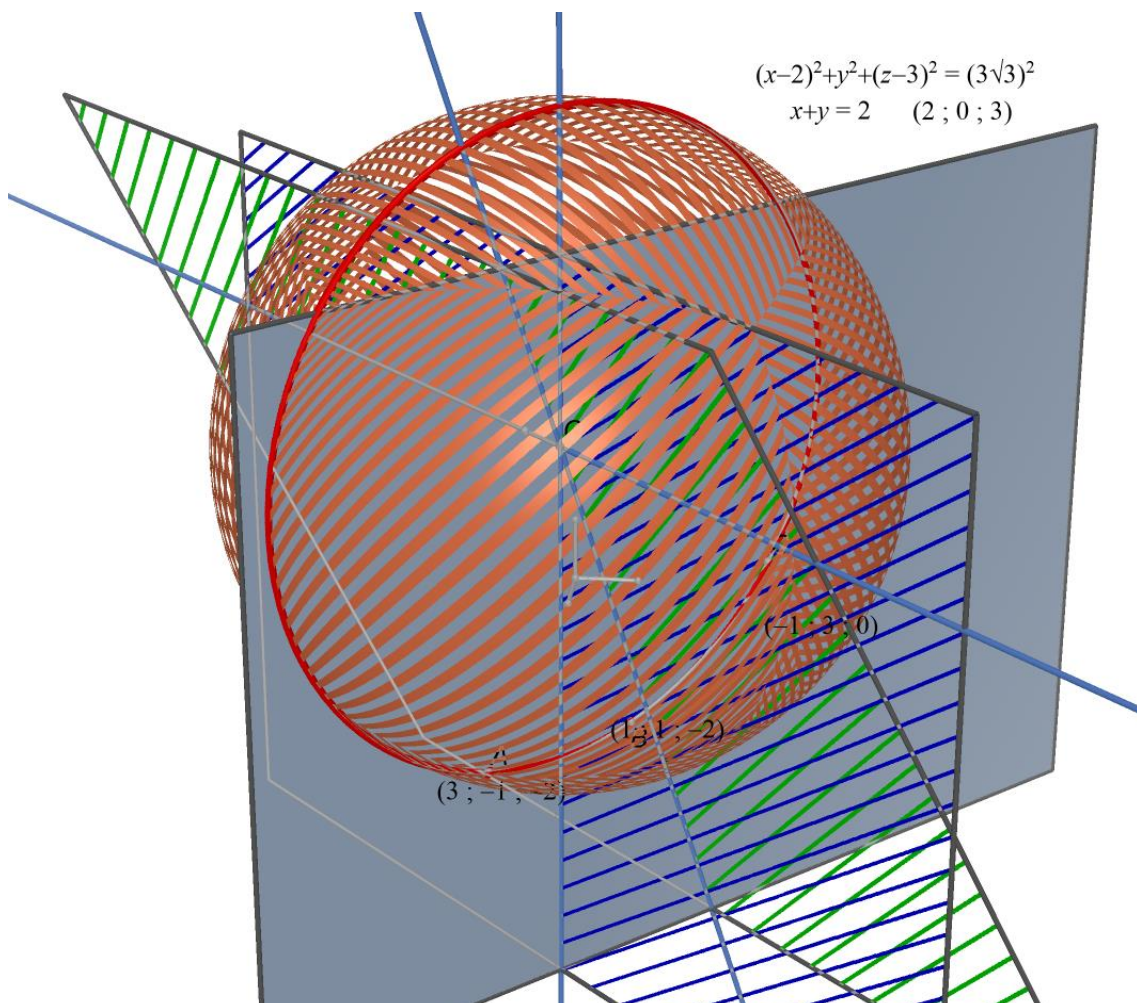
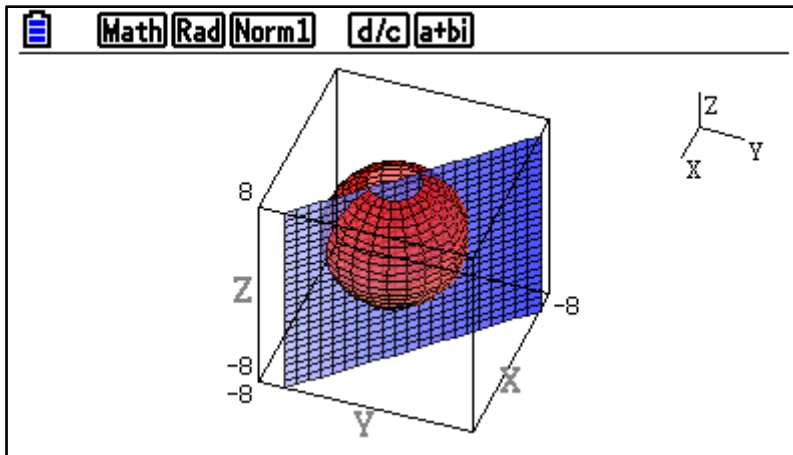
Buttons: EXPRESS, VECTOR, POINTS, EDIT, SET

Calculator screen showing the 3D equation of the sphere:

$$(X-a)^2 + (Y-b)^2 + (Z-c)^2 = r^2$$

$$\begin{array}{cccc|c} & a & b & c & r \\ [ & 2 & 0 & 3 & 5.1961 \end{array}$$

Buttons: FACTOR, EXPAND, EDIT, SET



**Problema 7**

Demostreu que el plànel  $2x - 6y + 3z - 49 = 0$  és tangent a l'esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 49$$

Calculeu les coordenades del punt de tangència.

Solució:

l'esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 49$  té centre  $O(0, 0, 0)$  i radi  $r = 7$ .

El plànel és tangent si la distància del centre de l'esfera al plànel és igual al radi.

La distància del centre  $O(0, 0, 0)$  al plànel  $2x - 6y + 3z - 49 = 0$  és:

$$d = \frac{|2 \cdot 0 - 6 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 49|}{\sqrt{2^2 + (-6)^2 + 3^2}} = 7$$

Aleshores el plànel és tangent a l'esfera.

Per calcular el punt de tangència calcularem la intersecció del plànel

$2x - 6y + 3z - 49 = 0$  i la recta perpendicular al plànel que passa pel centre de l'esfera:

La recta passa pel punt  $O(0, 0, 0)$  i té direcció el vector característic del plànel,

$$a = (2, -6, 3)$$

La seua equació és

$$r \equiv (x, y, z) = (0, 0, 0) + \alpha(2, -6, 3)$$

$$(x, y, z) = (2\alpha, -6\alpha, 3\alpha)$$

Substituint les coordenades en l'equació del plànel:

$$2 \cdot (2\alpha) - 6(-6\alpha) + 3(3\alpha) - 49 = 0$$

Resolent l'equació  $\alpha = 1$

El punt de tangència de coordenades  $P(2, -6, 3)$

Obrim el *Menú Gráfico 3D*.

Definim i representem l'equació de l'esfera, del plànel i de la recta.

Math Rad Norm1 d/c a+bi

$$(X-a)^2+(Y-b)^2+(Z-c)^2=r^2$$

a b c r

[ 0 0 0 7 ]

7

FACTOR EXPAND EDIT SET

Math Rad Norm1 d/c a+bi

$$aX+bY+cZ+d=0$$

a b c d

[ 2 -6 3 -49 ]

-49

EXPRESS VECTOR POINTS EDIT SET

Math Rad Norm1 d/c a+bi

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v}$$

$\vec{r}_0$   $\vec{v}$

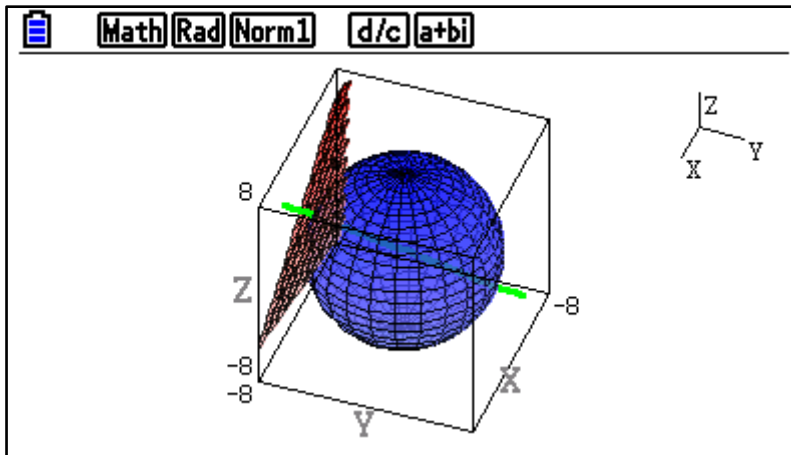
X [ 0 ] X [ 2 ]

Y [ 0 ] Y [ -6 ]

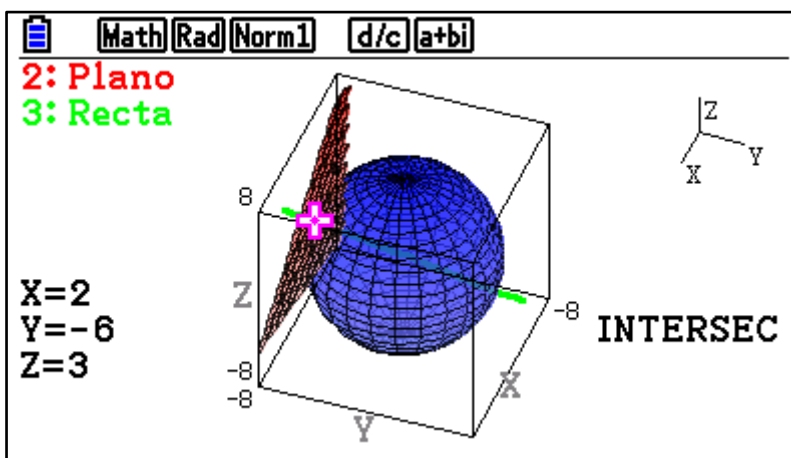
Z [ 0 ] Z [ 3 ]

3

EXPRESS VECTOR P&V POINTS EDIT SET



Determinem amb la funció G-Solv, la intersecció de la recta i el plànol:



El punt de tangència de coordenades  $P(2, -6, 3)$



**Problema 8**

Determineu l'equació del plànel tangent a l'esfera  $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 + (z + 2)^2 = 24$  que passe pel punt  $M(-1, 3, 0)$

Solució:

L'esfera  $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 + (z + 2)^2 = 24$  té centre  $O(3, 1, -2)$  i radi  $r = \sqrt{24}$

El punt  $M(-1, 3, 0)$  pertany a l'esfera ja que  $(-1 - 3)^2 + (3 - 1)^2 + (0 + 2)^2 = 24$

El plànel tangent a l'esfera passa pel punt  $M(-1, 3, 0)$  i té vector característic  $\overrightarrow{OM} = (-4, 2, 2)$

L'equació del plànel és:

$$-4(x + 1) + 2(y - 3) + 2(z - 0) = 0$$

Simplificant:

$$-2x + y + z - 5 = 0$$

Obrim el *Menú Gráfico 3D*.

Definim i representem l'esfera i el plànel.

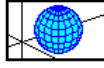
Math Rad Norm1 d/c | a+bi

$(X-a)^2+(Y-b)^2+(Z-c)^2=r^2$

a: 3, b: 1, c: -2, r: 4.8989

4.898979486

FACTOR EXPAND EDIT SET



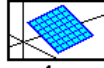
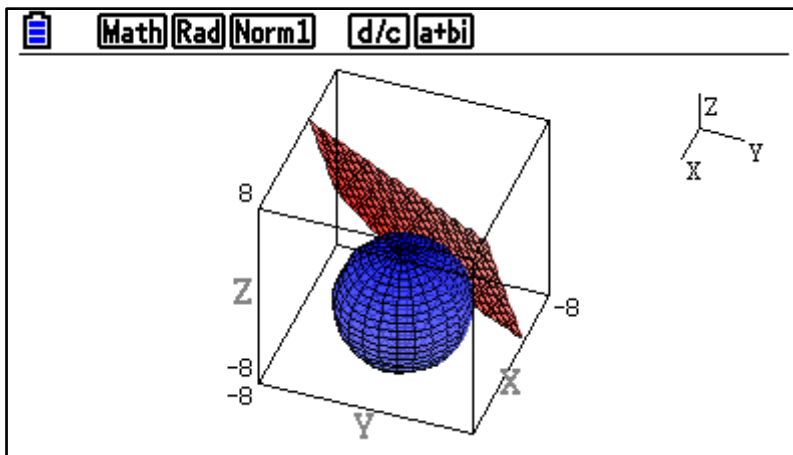
Math Rad Norm1 d/c | a+bi

$aX+bY+cZ+d=0$

a: -2, b: 1, c: 1, d: -5

-5

EXPRESS VECTOR POINTS EDIT SET

**Problema 9**

Determineu l'equació de l'esfera que és tangent als plans  $\Pi \equiv 6x - 3y - 2z - 35 = 0$ ,  $\Omega \equiv 6x - 3y - 2z + 63 = 0$ , sabent que el punt  $M(5, -1, -1)$  és un punt de tangència en un dels plans.

Solució:

Els dos plans són paral·lels ja que  $\frac{6}{6} = \frac{-2}{-2} = \frac{-2}{-2} \neq \frac{-35}{63}$

Notem que  $M(5, -1, -1)$  pertany al pla  $\Pi \equiv 6x - 3y - 2z - 35 = 0$  ja que satisfà la seua equació:

$$6 \cdot 5 - 3 \cdot (-1) - 2 \cdot (-1) - 35 = 0$$

El diàmetre de l'esfera és la distància del punt  $M(5, -1, -1)$  al pla

$$\Omega \equiv 6x - 3y - 2z + 63 = 0$$

$$2r = \left| \frac{6 \cdot 5 - 3 \cdot (-1) - 2 \cdot (-1) + 63}{\sqrt{6^2 + (-3)^2 + (-2)^2}} \right| = 14$$

Aleshores, el radi de l'esfera és  $r = 7$

El centre de l'esfera és el punt mig del segment format pel punt  $M$  i la projecció de  $M$  sobre el pla  $\Omega \equiv 6x - 3y - 2z + 63 = 0$

Calculem l'equació de la recta perpendicular al pla  $\Omega \equiv 6x - 3y - 2z + 63 = 0$  que passa per  $M$  que té vector director el característic del pla  $a = (6, -3, -2)$

La seua equació és:

$$r \equiv (x, y, z) = (5, -1, -1) + \alpha(6, -3, -2)$$

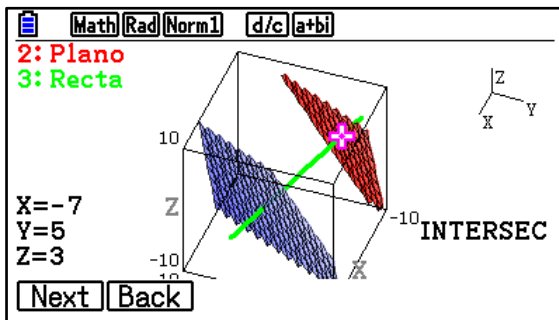
Obrim el *Menú Gráfico 3D*

Definim i representem els dos plans i la recta.

The image shows four screenshots of a 3D calculator interface:

- Top-left:** Input of the plane equation  $aX+bY+cZ+d=0$  with  $a=6, b=-3, c=-2, d=-35$ . The  $d$  field is highlighted in black. Buttons: EXPRESS, VECTOR, POINTS, EDIT, SET.
- Top-right:** Input of the plane equation  $aX+bY+cZ+d=0$  with  $a=6, b=-3, c=-2, d=63$ . The  $d$  field is highlighted in black. Buttons: EXPRESS, VECTOR, POINTS, EDIT, SET.
- Bottom-left:** Input of a point  $(X_0, Y_0, Z_0) = (5, -1, -1)$  and a direction vector  $[a, b, c] = [6, -3, -2]$ . The  $c$  field is highlighted in black. Buttons: EXPRESS, VECTOR, P&V, POINTS, EDIT, SET.
- Bottom-right:** A 3D plot showing two parallel planes (one blue, one red) and a green line passing through the point  $M(5, -1, -1)$ . The axes are labeled X, Y, and Z.

Per determinar la intersecció del pla  $\Omega \equiv 6x - 3y - 2z + 63 = 0$  i la recta  $r \equiv (x, y, z) = (5, -1, -1) + \alpha(6, -3, -2)$  s'utilitza la funció G-Solv:



Les coordenades del punt projecció són:

$$M'(-7, 5, 3)$$

El centre de l'esfera és el punt mig del segment  $\overline{MM'}$

Les seues coordenades són:

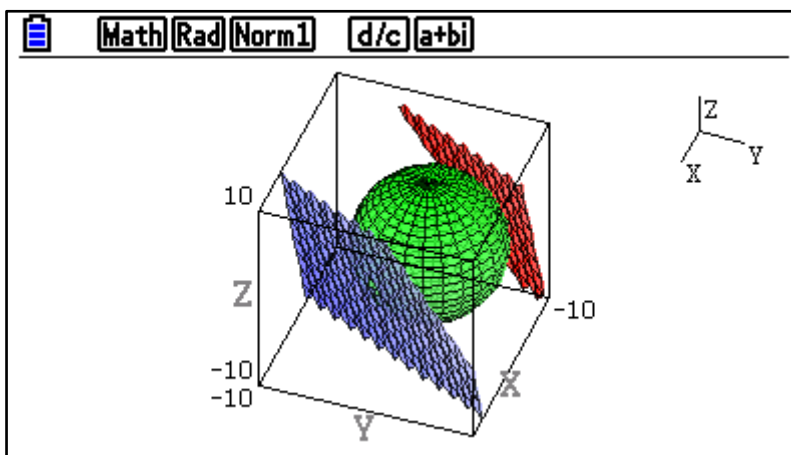
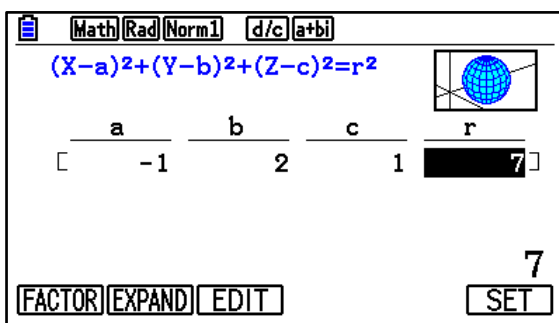
$$O(-1, 2, 1)$$

L'equació de l'esfera és:

$$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 7^2$$

Obrim el *Menú Gráfico 3D*.

Definim l'equació de l'esfera i la representem.



**Problema 10**

Una esfera té el centre en la recta  $r \equiv \begin{cases} 2x + 4y - z - 7 = 0 \\ 4x + 5y + z - 14 = 0 \end{cases}$  i és tangent als plans  $\Pi \equiv x + 2y - 2z - 2 = 0$ ,  $\Omega \equiv x + 2y - 2z + 4 = 0$ . Determineu la seua equació:

Solució:

Determinem l'equació paramètrica de la recta  $r$ .

Obrim el *Menú Ecuación*

L'equació paramètrica de la recta  $r$  és:

$$r \equiv \begin{cases} x = \frac{7}{2} - 3\alpha \\ y = 2\alpha \\ z = 2\alpha \end{cases}$$

Els dos plans són paral·lels ja que  $\frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{-2}{-2} \neq \frac{-2}{4}$

Obrim el *Menú Gráfico 3D*

Definim els dos plans i la recta.

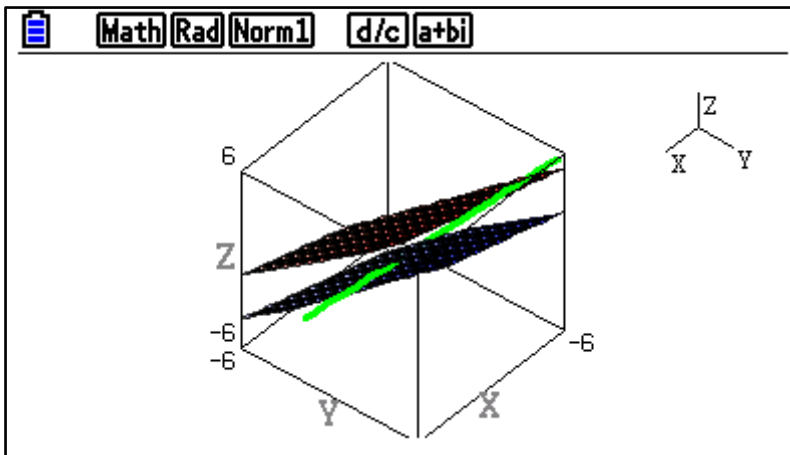
Math Rad Norm1 d/c a+bi

Punto de paso (Xo, Yo, Zo)  
Vector direcció [a, b, c]

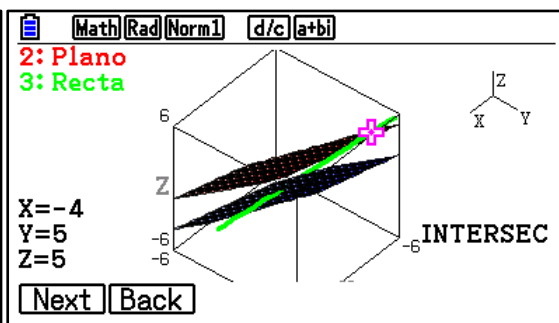
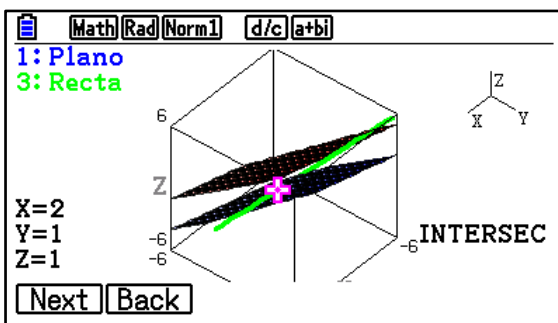
Xo	Yo	Zo
[ 3.5	0	0 ]
a	b	c
[ -3	2	2 ]

2

EXPRESS VECTOR P&V POINTS EDIT SET



Amb la funció G-Solv, determinem la intersecció de la recta i cadascun dels plànols.



Les coordenades del punt intersecció del plànol  $\Pi \equiv x + 2y - 2z - 2 = 0$  i la recta

$$r \equiv \begin{cases} 2x + 4y - z - 7 = 0 \\ 4x + 5y + z - 14 = 0 \end{cases} \text{ és:}$$

$P(2, 1, 1)$

Les coordenades del punt intersecció del plànol  $\Omega \equiv x + 2y - 2z + 4 = 0$  i la recta

$$r \equiv \begin{cases} 2x + 4y - z - 7 = 0 \\ 4x + 5y + z - 14 = 0 \end{cases} \text{ és:}$$

$Q(-4, 5, 5)$

El centre de l'esfera és el punt mig del segment  $\overline{PQ}$ . Les seues coordenades són:

$O(-1, 3, 3)$

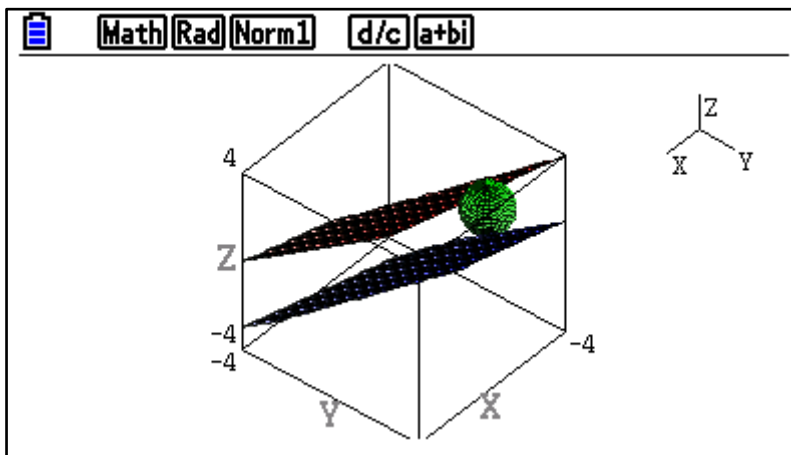
El radi és igual a la distància del centre  $O(-1, 3, 3)$  al plànol  $\Pi \equiv x + 2y - 2z - 2 = 0$

$$r = \left| \frac{-1 + 2 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 2}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} \right| = 1$$

L'equació de l'esfera és:

$$(x + 1)^2 + (y - 3)^2 + (z - 3)^2 = 1^2$$

Definim i representem l'esfera:



Per calcular els punts intersecció de la recta  $r$  i cadascun dels plànol es poden resoldre els sistemes format per la recta i cadascun dels plànols:

Obrim el *Menú Ecuación*:

<div style="border: 1px solid black; padding: 2px;"> <span style="font-size: small;">Math Rad Norm1 d/c a+bi</span>  <math>a_n X + b_n Y + c_n Z = d_n</math>  <table style="width: 100%; border-collapse: collapse; font-size: small;"> <thead> <tr> <th style="width: 5%;"></th> <th style="width: 20%; text-align: center;">a</th> <th style="width: 20%; text-align: center;">b</th> <th style="width: 20%; text-align: center;">c</th> <th style="width: 35%; text-align: center;">d</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td style="text-align: center;">2</td> <td style="text-align: center;">4</td> <td style="text-align: center;">-1</td> <td style="text-align: center;">7</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td style="text-align: center;">4</td> <td style="text-align: center;">5</td> <td style="text-align: center;">1</td> <td style="text-align: center;">14</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td style="text-align: center;">1</td> <td style="text-align: center;">2</td> <td style="text-align: center;">-2</td> <td style="text-align: center;">2</td> </tr> </tbody> </table> <div style="text-align: right; margin-top: 5px;">2</div> <div style="font-size: x-small; margin-top: 5px;"> <span>SOLVE</span> <span>DELETE</span> <span>CLEAR</span> <span>EDIT</span> </div> </div>		a	b	c	d	1	2	4	-1	7	2	4	5	1	14	3	1	2	-2	2	<div style="border: 1px solid black; padding: 2px;"> <span style="font-size: small;">Math Rad Norm1 d/c a+bi</span>  <math>a_n X + b_n Y + c_n Z = d_n</math>  <table style="width: 100%; border-collapse: collapse; font-size: small;"> <tr> <td style="width: 5%;"></td> <td style="width: 20%; text-align: center;">X</td> <td style="width: 20%; text-align: center;">2</td> </tr> <tr> <td></td> <td style="text-align: center;">Y</td> <td style="text-align: center;">1</td> </tr> <tr> <td></td> <td style="text-align: center;">Z</td> <td style="text-align: center;">1</td> </tr> </table> <div style="text-align: right; margin-top: 5px;">2</div> <div style="font-size: x-small; margin-top: 5px;"> <span>REPEAT</span> </div> </div>		X	2		Y	1		Z	1
	a	b	c	d																										
1	2	4	-1	7																										
2	4	5	1	14																										
3	1	2	-2	2																										
	X	2																												
	Y	1																												
	Z	1																												

Les coordenades del punt intersecció del plànol  $\Pi \equiv x + 2y - 2z - 2 = 0$  i la recta

$$r \equiv \begin{cases} 2x + 4y - z - 7 = 0 \\ 4x + 5y + z - 14 = 0 \end{cases} \text{ és:}$$

$P(2, 1, 1)$

<div style="border: 1px solid black; padding: 2px;"> <span style="font-size: small;">Math Rad Norm1 d/c a+bi</span>  <math>a_n X + b_n Y + c_n Z = d_n</math>  <table style="width: 100%; border-collapse: collapse; font-size: small;"> <thead> <tr> <th style="width: 5%;"></th> <th style="width: 20%; text-align: center;">a</th> <th style="width: 20%; text-align: center;">b</th> <th style="width: 20%; text-align: center;">c</th> <th style="width: 35%; text-align: center;">d</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td style="text-align: center;">2</td> <td style="text-align: center;">4</td> <td style="text-align: center;">-1</td> <td style="text-align: center;">7</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td style="text-align: center;">4</td> <td style="text-align: center;">5</td> <td style="text-align: center;">1</td> <td style="text-align: center;">14</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td style="text-align: center;">1</td> <td style="text-align: center;">2</td> <td style="text-align: center;">-2</td> <td style="text-align: center;">-4</td> </tr> </tbody> </table> <div style="text-align: right; margin-top: 5px;">-4</div> <div style="font-size: x-small; margin-top: 5px;"> <span>SOLVE</span> <span>DELETE</span> <span>CLEAR</span> <span>EDIT</span> </div> </div>		a	b	c	d	1	2	4	-1	7	2	4	5	1	14	3	1	2	-2	-4	<div style="border: 1px solid black; padding: 2px;"> <span style="font-size: small;">Math Rad Norm1 d/c a+bi</span>  <math>a_n X + b_n Y + c_n Z = d_n</math>  <table style="width: 100%; border-collapse: collapse; font-size: small;"> <tr> <td style="width: 5%;"></td> <td style="width: 20%; text-align: center;">X</td> <td style="width: 20%; text-align: center;">-4</td> </tr> <tr> <td></td> <td style="text-align: center;">Y</td> <td style="text-align: center;">5</td> </tr> <tr> <td></td> <td style="text-align: center;">Z</td> <td style="text-align: center;">5</td> </tr> </table> <div style="text-align: right; margin-top: 5px;">-4</div> <div style="font-size: x-small; margin-top: 5px;"> <span>REPEAT</span> </div> </div>		X	-4		Y	5		Z	5
	a	b	c	d																										
1	2	4	-1	7																										
2	4	5	1	14																										
3	1	2	-2	-4																										
	X	-4																												
	Y	5																												
	Z	5																												

Les coordenades del punt intersecció del plànol  $\Omega \equiv x + 2y - 2z + 4 = 0$  i la recta

$$r \equiv \begin{cases} 2x + 4y - z - 7 = 0 \\ 4x + 5y + z - 14 = 0 \end{cases} \text{ és:}$$

$Q(-4, 5, 5)$

**Problema 11**

Determineu la posició relativa de la recta  $r \equiv \begin{cases} x = 2 - 2\alpha \\ y = -\frac{7}{2} + 3\alpha \\ z = -2 + \alpha \end{cases}$  i l'esfera

$$E \equiv x^2 + y^2 + z^2 + x - 4y - 3z + \frac{1}{2} = 0$$

Solució:

Completant quadrats l'equació de l'esfera és:

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y - 2)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = 6$$

El centre de l'esfera és el punt  $O \left(-\frac{1}{2}, 2, \frac{3}{2}\right)$  el radi és  $r = \sqrt{6}$

Calculem la projecció del centre  $O$  sobre la recta  $r$ .

Considerem el plànel perpendicular a la recta  $r$  que passa per  $O \left(-\frac{1}{2}, 2, \frac{3}{2}\right)$  i vector característic el director de la recta  $v = (-2, 3, 1)$

La seua equació és:

$$\Pi \equiv -2\left(x + \frac{1}{2}\right) + 3(y - 2) + \left(z - \frac{3}{2}\right) = 0$$

Simplificant:

$$\Pi \equiv -2x + 3y + z - \frac{17}{2} = 0$$

Obrim el *Menú Gráfico 3D*

Definim i representem l'esfera la recta i el plànel

Math Rad Norm1 d/c a+bi

$(X-a)^2+(Y-b)^2+(Z-c)^2=r^2$

a	b	c	r
-0.5	2	1.5	2.4494

2.449489743

FACTOR EXPAND EDIT SET

Math Rad Norm1 d/c a+bi

Punto de paso  $(X_0, Y_0, Z_0)$   
Vector dirección  $[a, b, c]$

$X_0$	$Y_0$	$Z_0$
2	-3.5	-2
a	b	c
-2	3	1

1

EXPRESS VECTOR P&V POINTS EDIT SET

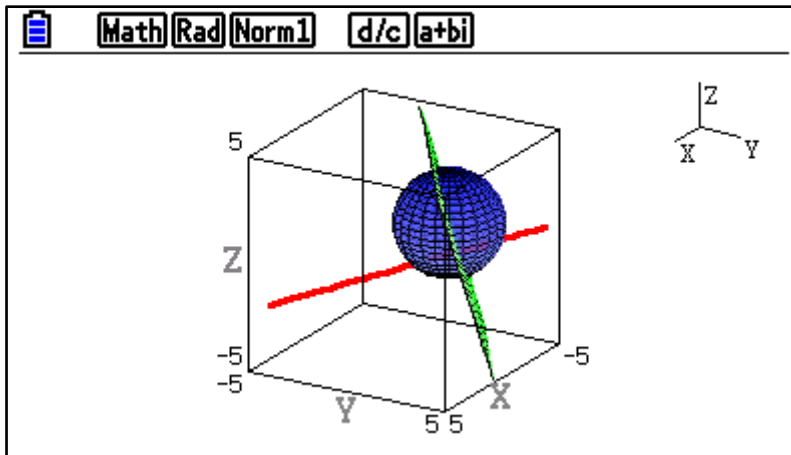
Math Rad Norm1 d/c a+bi

$aX+bY+cZ+d=0$

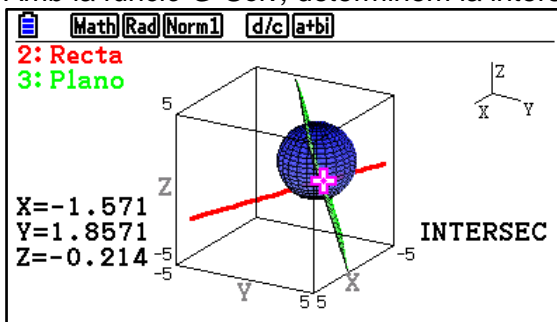
a	b	c	d
-2	3	1	-8.5

-8.5

EXPRESS VECTOR POINTS EDIT SET



Amb la funció G-Solv, determinem la intersecció de la recta i el plànel (punt projecció)



El punt projecció té coordenades  $P\left(\frac{-11}{7}, \frac{13}{7}, \frac{-3}{14}\right)$

Calculem el quadrat de la distància entre el centre  $O$  i la projecció  $P$ .

$$(d(OP))^2 = \left(-\frac{11}{7} + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{13}{7} - 2\right)^2 + \left(-\frac{3}{14} - \frac{3}{2}\right)^2$$

Aleshores, la recta talla l'esfera ja que  $(d(OP))^2 < r^2 = 6$



**Problema 12**

En l'esfera d'equació  $E \equiv (x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (x - 3)^2 = 25$  determineu el punt  $M$  més pròxim al plànol  $\Pi \equiv 3x - 4y + 19 = 0$  i calculeu la distància del punt  $M$  a aquest plànol.

Solució:

L'esfera té centre el punt  $O(1, -2, 3)$  i radi  $r = 5$

Vegem que el plànol és exterior a l'esfera.

Calculem la distància del centre  $O(1, -2, 3)$  al plànol  $\Pi \equiv 3x - 4y + 19 = 0$

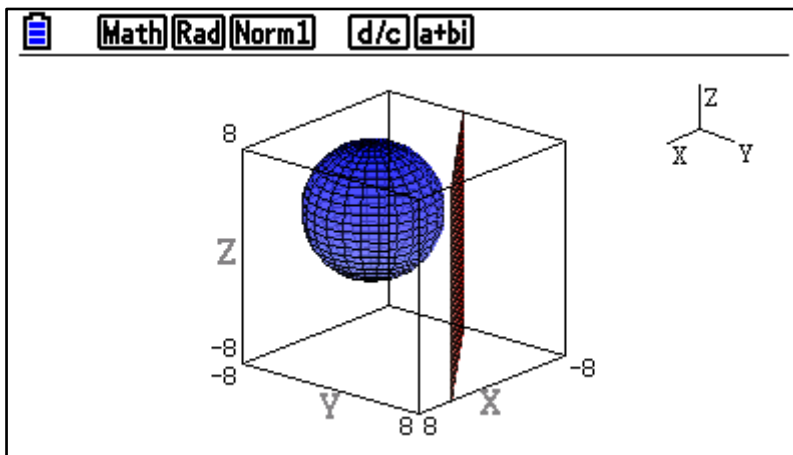
$$d(O, \Pi) = \left| \frac{3 \cdot 1 - 4 \cdot (-2) + 0 \cdot 3 + 19}{\sqrt{3^2 + (-4)^2 + 0^2}} \right| = 6$$

$$d(O, \Pi) = 6 > r = 5$$

Aleshores, el plànol és exterior a l'esfera.

Obrim el *Menú Gráfico 3D*

Definim i representem l'esfera i el plànol.



La recta perpendicular al plànol  $\Pi \equiv 3x - 4y + 19 = 0$  que passa pel centre  $O(1, -2, 3)$  té vector director el característic del plànol  $a = (3, -4, 0)$ .

La seua equació és:

$$r \equiv (x, y, z) = (1, -2, 3) + \alpha(3, -4, 0)$$

Un punt qualsevol de la recta té coordenades:

$$M(1 + 3\alpha, -2 - 4\alpha, 3)$$

Substituint les coordenades del punt en l'equació del plànol:

$$(3\alpha)^2 + (-4\alpha)^2 = 25$$

Resolent l'equació:

$$\alpha = 1, -1$$

Si  $\alpha = 1$  el punt intersecció té coordenades  $M_1(4, -6, 3)$

Si  $\alpha = -1$  el punt intersecció té coordenades  $M_2(-2, 2, 3)$

Calculem la distància del punt  $M_1(4, -6, 3)$  al plànel  $\Pi \equiv 3x - 4y + 19 = 0$

$$d(M_1, \Pi) = \left| \frac{3 \cdot 4 - 4 \cdot (-6) + 0 \cdot 3 + 19}{\sqrt{3^2 + (-4)^2 + 0^2}} \right| = 11$$

Calculem la distància del punt  $M_2(-2, 2, 3)$  al plànel  $\Pi \equiv 3x - 4y + 19 = 0$

$$d(M_2, \Pi) = \left| \frac{3 \cdot (-2) - 4 \cdot 2 + 0 \cdot 3 + 19}{\sqrt{3^2 + (-4)^2 + 0^2}} \right| = 1$$

El punt més pròxim al plànel  $\Pi \equiv 3x - 4y + 19 = 0$  és  $M_2(-2, 2, 3)$

**Problema 13**

Determineu l'equació de l'esfera de centre  $O(2, 3, -1)$  que talla la recta

$$s \equiv \begin{cases} 5x - 4y + 3z + 20 = 0 \\ 3x - 4y + z - 8 = 0 \end{cases} \text{ amb una corda de longitud igual a 16.}$$

Solució:

Obrim el *Menú Ecuación*.

Resolem el sistema format per la recta per determinar la forma paramètrica:

The left screenshot shows the 'Ecuación' menu with options: F1: Simultáneo, F2: Polinomio, F3: Resolver. The right screenshot shows the matrix input screen for the system of equations:

	a	b	c	d
1	5	-4	3	-20
2	3	-4	1	8
3	0	0	0	0

The screenshot shows the solution for the system of equations:

Soluciones  
Infinitas  
 $X = -14 - Z$   
 $Y = -\frac{25}{2} - \frac{1}{2}Z$   
 $Z = 7$

L'equació paramètrica de la recta és:

$$s \equiv \begin{cases} x = -14 - \alpha \\ y = -\frac{25}{2} - \frac{1}{2}\alpha \\ z = \alpha \end{cases}$$

Un punt de la recta  $s$  és  $A\left(-14, -\frac{25}{2}, 0\right)$  i el vector director  $v = (-2, -1, 2)$

Determinem el punt projecció del centre  $O$  sobre la recta  $s$ .

El plànol que passa per  $O(2, 3, -1)$  i és perpendicular a la recta  $s \equiv \begin{cases} x = -14 - \alpha \\ y = -\frac{25}{2} - \frac{1}{2}\alpha \\ z = \alpha \end{cases}$  té

vector característic el vector director de la recta  $s$ ,  $v = (-2, -1, 2)$

L'equació és

$$\Pi \equiv -2(x - 2) - (y - 3) + 2(z + 1) = 0$$

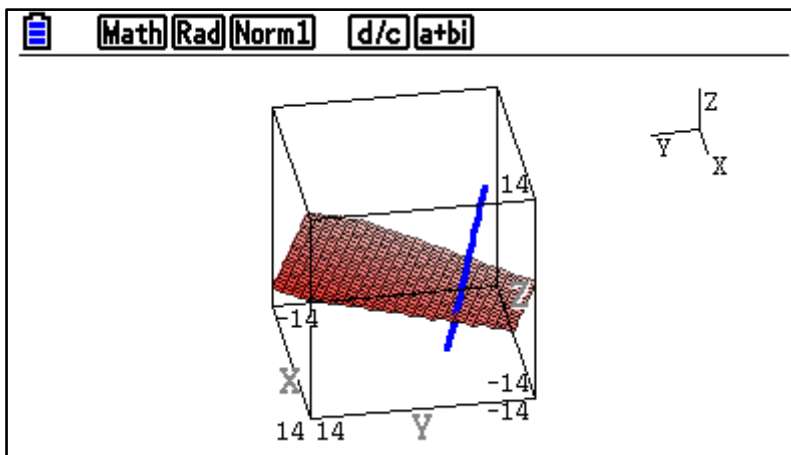
Simplificant:

$$\Pi \equiv -2x - y + 2z + 9 = 0$$

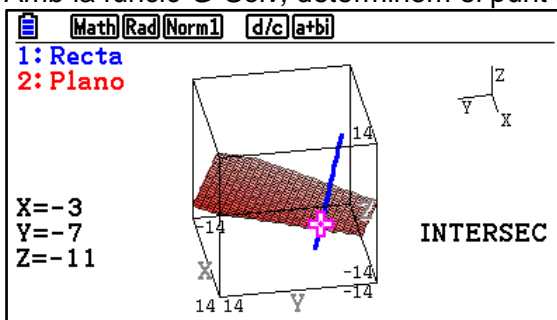
Obrim el *Menú Gráfico 3D*.

Definim i representem la recta  $s \equiv \begin{cases} x = -14 - \alpha \\ y = -\frac{25}{2} - \frac{1}{2}\alpha \\ z = \alpha \end{cases}$  i el plànol  $\Pi \equiv -2x - y + 2z + 9 = 0$

<div style="border: 1px solid black; padding: 2px;"> <span style="float: right;">Math Rad Norm1 d/c   a+bi</span> <p>Punto de paso (X<sub>0</sub>, Y<sub>0</sub>, Z<sub>0</sub>) Vector dirección [a, b, c]</p> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="text-align: center;">X<sub>0</sub></td> <td style="text-align: center;">Y<sub>0</sub></td> <td style="text-align: center;">Z<sub>0</sub></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">[ -14</td> <td style="text-align: center;">-12.5</td> <td style="text-align: center;">0 ]</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">a</td> <td style="text-align: center;">b</td> <td style="text-align: center;">c</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">[ -2</td> <td style="text-align: center;">-1</td> <td style="text-align: center;">2 ]</td> </tr> </table> <p style="text-align: right; font-weight: bold;">2</p> <div style="border-top: 1px solid black; padding-top: 2px;"> <span>EXPRESS VECTOR P&amp;V POINTS EDIT SET</span> </div> </div>	X <sub>0</sub>	Y <sub>0</sub>	Z <sub>0</sub>	[ -14	-12.5	0 ]	a	b	c	[ -2	-1	2 ]	<div style="border: 1px solid black; padding: 2px;"> <span style="float: right;">Math Rad Norm1 d/c   a+bi</span> <p>aX+bY+cZ+d=0</p> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="text-align: center;">a</td> <td style="text-align: center;">b</td> <td style="text-align: center;">c</td> <td style="text-align: center;">d</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">[ -2</td> <td style="text-align: center;">-1</td> <td style="text-align: center;">2</td> <td style="text-align: center;">9 ]</td> </tr> </table> <p style="text-align: right; font-weight: bold;">9</p> <div style="border-top: 1px solid black; padding-top: 2px;"> <span>EXPRESS VECTOR POINTS EDIT SET</span> </div> </div>	a	b	c	d	[ -2	-1	2	9 ]
X <sub>0</sub>	Y <sub>0</sub>	Z <sub>0</sub>																			
[ -14	-12.5	0 ]																			
a	b	c																			
[ -2	-1	2 ]																			
a	b	c	d																		
[ -2	-1	2	9 ]																		



Amb la funció G-Solv, determinem el punt intersecció, punt mig de la corda.

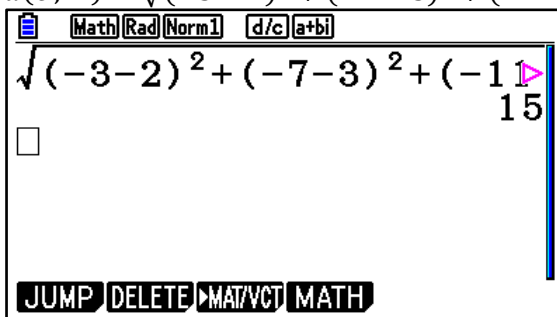


Les coordenades del punt mig de la corda són:  
M(-3, -7, -11)

Obrim el *Menú Ejec-Mat*

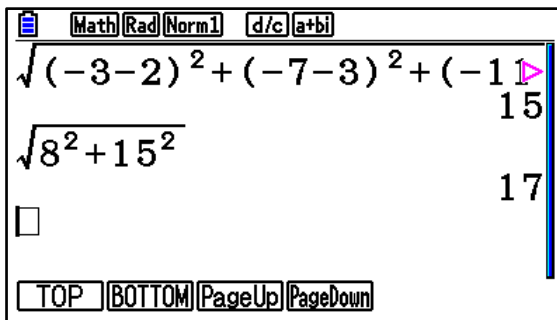
Calculem la distància del centre O al punt M

$$d(O, M) = \sqrt{(-3 - 2)^2 + (-7 - 3)^2 + (-11 + 1)^2}$$



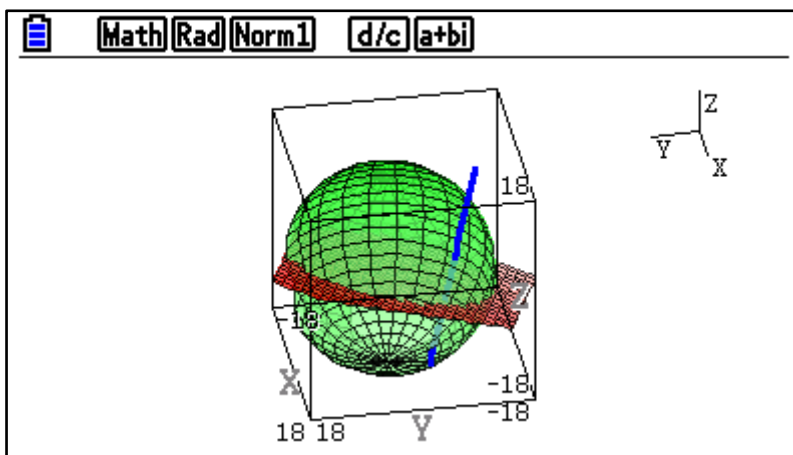
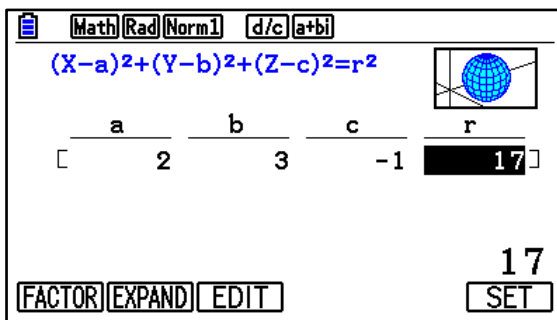
$$d(O, M) = 15$$

Siga  $r$  el radi de l'esfera.  
 Aplicant el teorema de Pitàgores:  
 $r^2 = 8^2 + 15^2$



El radi de l'esfera és  $r = 17$   
 L'equació de l'esfera és:  
 $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z + 1)^2 = 17^2$

Obrim el *Menú Gráfico 3D*  
 Definim i representem l'esfera.



**Problema 14**

Determineu el centre  $C$  i el radi  $r$  de la circumferència

$$\begin{cases} (x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 100 \\ 2x - 2y - z + 9 = 0 \end{cases}$$

Solució:

$E \equiv (x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 100$  és una esfera de centre  $O(3, -2, 1)$  i radi  $R = 10$

El centre de la circumferència és igual a la projecció del centre  $O(3, -2, 1)$  sobre el pla  $\Pi \equiv 2x - 2y - z + 9 = 0$

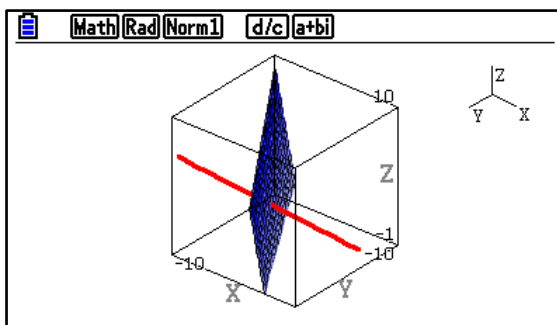
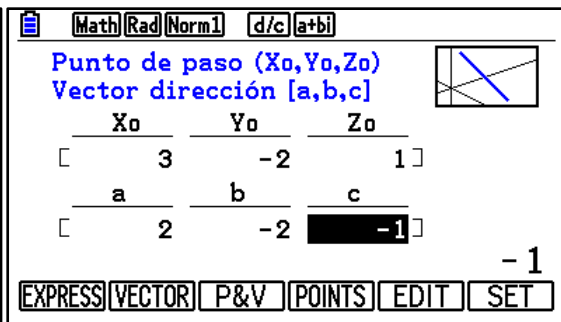
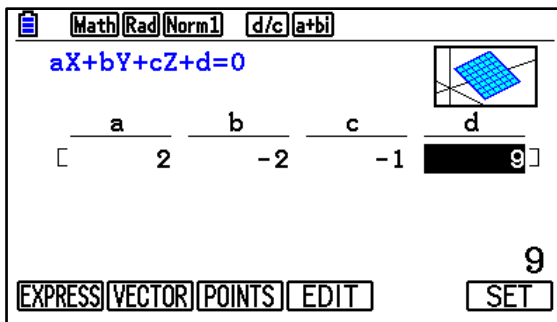
La recta perpendicular al pla  $2x - 2y - z + 9 = 0$  que passa pel punt  $O(3, -2, 1)$  té vector director el característic del pla,  $a = (2, -2, -1)$

La seua equació és:

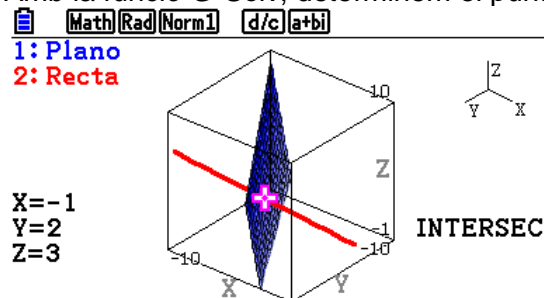
$$r \equiv (x, y, z) = (3, -2, 1) + \alpha(2, -2, -1)$$

Obrim el *Menú Gráfico 3D*

Definim i representem el pla i la recta.



Amb la funció *G-Solv*, determinem el punt intersecció del pla i la recta:



Les coordenades del centre de la circumferència és:

$$C(-1, 2, 3)$$

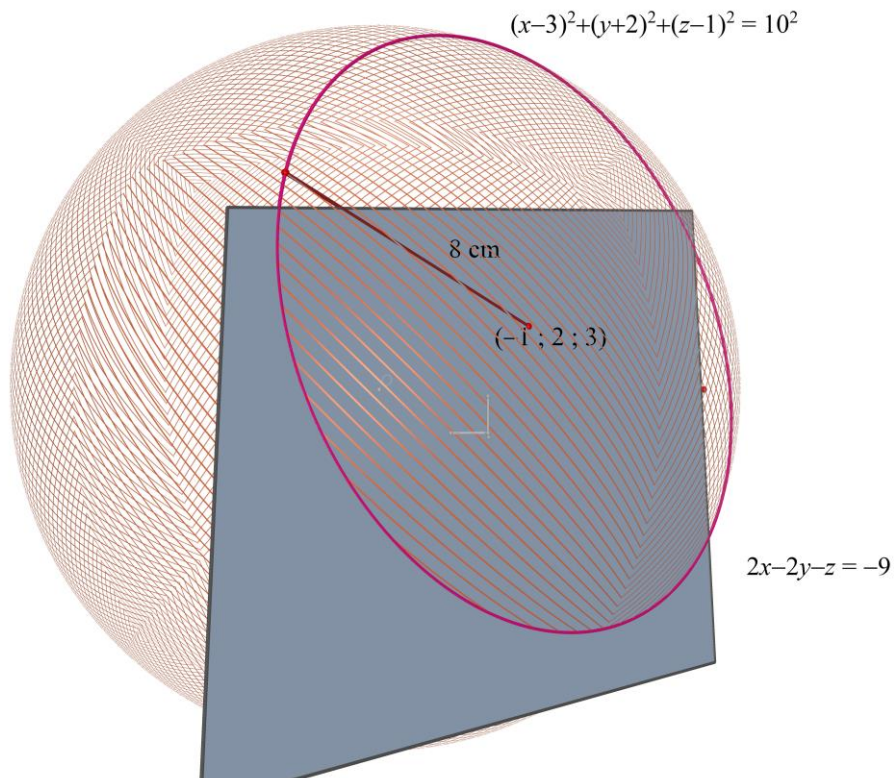
Calculem la distància entre els punts  $O$  i  $C$ .

$$\overline{OC} = \sqrt{(-1-3)^2 + (2-(-2))^2 + (3-1)^2} = 6$$

Siga  $r$  el radi de la circumferència que cerquem

Un punt  $A$  qualsevol de la circumferència,  $O$  i  $C$  formen un triangle rectangle  $\triangle ACO$ ,  
 $C = 90^\circ, \overline{OA} = R = 10, \overline{OC} = 6. \overline{CA} = r$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $\triangle ACO$ :  
 $r = 8$



**Problema 15**

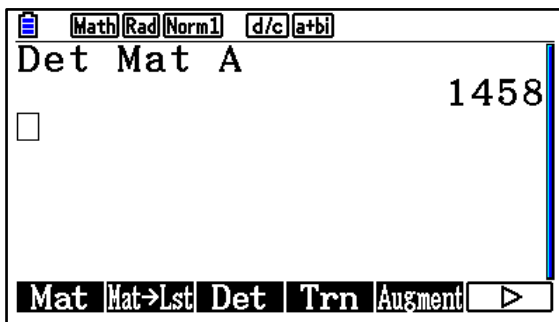
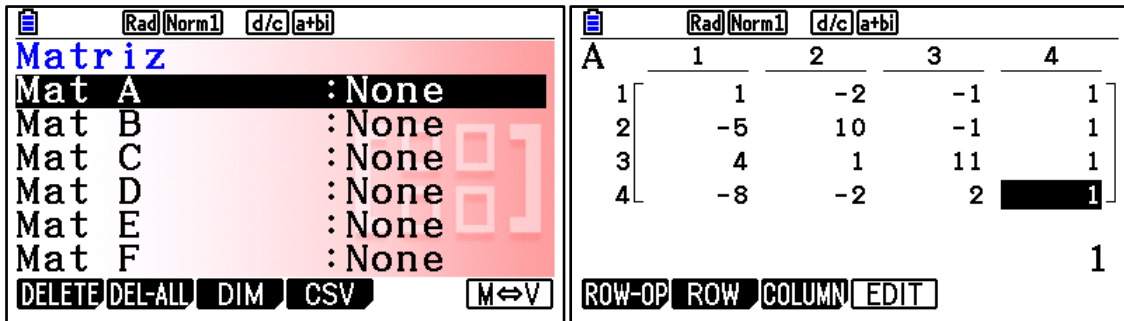
Determineu l'equació de l'esfera que passa pels punts  $A(1, -2, -1)$ ,  $B(-5, 10, -1)$ ,  $C(4, 1, 11)$ ,  $D(-8, -2, 2)$

Solució 1:

Vegem que els quatre punts no són coplanaris.

Obrim el *Menú Ejec-Mat*

Vegem que el determinant de la matriu  $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ -5 & 10 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 11 & 1 \\ -8 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  és distint de zero.



Calculem els punts migs dels segments  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$ ,  $\overline{AD}$

El punt mig del segment  $\overline{AB}$  és  $E(-2, 4, -1)$

El punt mig del segment  $\overline{AC}$  és  $F\left(\frac{5}{2}, \frac{-1}{2}, 5\right)$

El punt mig del segment  $\overline{AD}$  és  $G\left(\frac{-7}{2}, -2, \frac{1}{2}\right)$

Calculem les components dels vectors  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$ ,  $\overrightarrow{AD}$

$$\overrightarrow{AB} = (-6, -12, 0)$$

$$\overrightarrow{AC} = (3, 3, 12)$$

$$\overrightarrow{AD} = (-9, 0, 3)$$

El plànol mediador del segment  $\overline{AB}$  té equació:

$$\Pi_1 \equiv (x + 2) + 2(y - 4) = 0$$

$$\Pi_1 \equiv x + 2y = 6$$

El plànol mediador del segment  $\overline{AC}$  té equació:

$$\Pi_2 \equiv \left(x - \frac{5}{2}\right) + \left(y + \frac{1}{2}\right) + 4(z - 5) = 0$$

$$\Pi_2 \equiv x + y + 4z = 22$$



El plànol mediador del segment  $\overline{AD}$  té equació:

$$\Pi_3 \equiv -3\left(x + \frac{7}{2}\right) + \left(z - \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\Pi_3 \equiv -3x + z = 11$$

El centre de l'esfera és igual al punt intersecció dels tres plànol.

Obrim el *Menú Ecuación*:

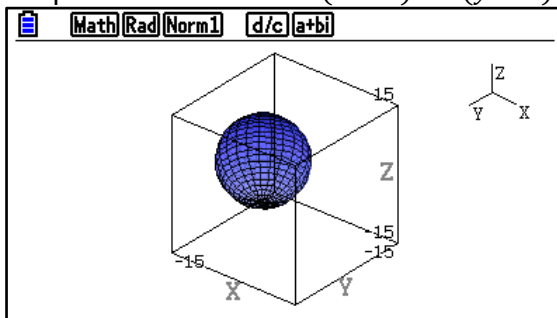
El centre de l'esfera és el punt  $O(-2, 4, 5)$

El radi de l'esfera és:

$$r = \overline{OA} = \sqrt{(1+2)^2 + (-2-4)^2 + (-1-5)^2}$$

El radi de l'esfera és  $r = 9$

L'equació de l'esfera és  $(x + 2)^2 + (y - 4)^2 + (z - 5)^2 = 9^2$



Solució 2

L'equació general de l'esfera és:

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$$

Substituïm les coordenades dels quatre punts en l'equació general i resollem el sistema format per les 4 equacions amb les incògnites  $A, B, C, D$ .

Obrim el *Menú Ecuación*:

<p>Math Rad Norm1 d/c a+bi</p> <p><b>Ecuación</b></p> <p>Seleccionar tipo <math>x^2+bx+c=0</math></p> <p>F1: Simultáneo F2: Polinomio F3: Resolver</p> <p>SIMUL POLY SOLVER</p>	<p>Math Rad Norm1 d/c a+bi</p> <p><b>Simultáneo</b></p> <p>Datos en memoria</p> <p>Incógnitas: 3</p> <p>¿Número incógnitas?</p> <p>2 3 4 5 6</p>
---	--

<p>Math Rad Norm1 d/c a+bi</p> <p><math>a_n X + b_n Y + C_n Z + d_n T = e_n</math></p> <table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>a</th> <th>b</th> <th>c</th> <th>d</th> <th>→</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>-2</td> <td>-1</td> <td>1</td> <td></td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>-5</td> <td>10</td> <td>-1</td> <td>1</td> <td></td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>4</td> <td>1</td> <td>11</td> <td>1</td> <td></td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>-8</td> <td>-2</td> <td>2</td> <td>1</td> <td>1</td> </tr> </tbody> </table> <p>SOLVE DELETE CLEAR EDIT</p>		a	b	c	d	→	1	1	-2	-1	1		2	-5	10	-1	1		3	4	1	11	1		4	-8	-2	2	1	1	<p>Math Rad Norm1 d/c a+bi</p> <p><math>a_n X + b_n Y + C_n Z + d_n T = e_n</math></p> <table border="1"> <tbody> <tr> <td>X</td> <td>4</td> </tr> <tr> <td>Y</td> <td>-8</td> </tr> <tr> <td>Z</td> <td>-10</td> </tr> <tr> <td>T</td> <td>-36</td> </tr> </tbody> </table> <p>4</p> <p>REPEAT</p>	X	4	Y	-8	Z	-10	T	-36
	a	b	c	d	→																																		
1	1	-2	-1	1																																			
2	-5	10	-1	1																																			
3	4	1	11	1																																			
4	-8	-2	2	1	1																																		
X	4																																						
Y	-8																																						
Z	-10																																						
T	-36																																						

La solució és:

$$\begin{cases} A = 4 \\ B = -8 \\ C = -10 \\ D = -36 \end{cases}$$

L'equació general de l'esfera és:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 8y - 10z + 36 = 0$$

Completant quadrats:

$$(x + 2)^2 + (y - 4)^2 + (z - 5)^2 = 36 + 2^2 + 4^2 + 5^2$$

$$(x + 2)^2 + (y - 4)^2 + (z - 5)^2 = 9^2$$

El centre de l'esfera és el punt  $O(-2, 4, 5)$  i el radi  $r = 9$

**Problema 16**

Determineu l'equació de l'esfera que passa pels punts

$A(3, 1, -3), B(-2, 4, 1), C(-5, 0, 0)$  i té el centre en el plànel  $\Pi \equiv 2x + y - z + 3 = 0$

Solució:

Calculem les components dels vectors  $\overline{AB}, \overline{AC}$

$$\overline{AB} = (-5, 3, 4)$$

$$\overline{AC} = (-8, -1, 3)$$

Els vectors són linealment independents ja que les components no són proporcionals

$$\frac{-5}{-8} \neq \frac{3}{-1}$$

Calculem els punts migs dels segments  $\overline{AB}, \overline{AC}$

El punt mig del segment  $\overline{AB}$  és  $D\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, -1\right)$

El punt mig del segment  $\overline{AC}$  és  $E\left(-1, \frac{1}{2}, \frac{-3}{2}\right)$

El plànel mediador del segment  $\overline{AB}$  té equació:

$$\Pi_1 \equiv -5\left(x - \frac{1}{2}\right) + 3\left(y - \frac{5}{2}\right) + 4(z + 1) = 0$$

$$\Pi_1 \equiv -5x + 3y + 4z = 1$$

El plànel mediador del segment  $\overline{AC}$  té equació:

$$\Pi_2 \equiv -8(x + 1) - \left(y - \frac{1}{2}\right) + 3\left(z + \frac{3}{2}\right) = 0$$

$$\Pi_2 \equiv -8x - y + 3z = 3$$

El centre de l'esfera és igual al punt intersecció dels tres plànel.

Obrim el *Menú Ecuación*:

**Ecuación**

Seleccionar tipo  $x^2 + bx + c = 0$

F1: Simultáneo  
F2: Polinomio  
F3: Resolver

**SIMUL POLY SOLVER**

$a_n X + b_n Y + c_n Z = d_n$

	a	b	c	d
1	-5	3	4	1
2	-8	-1	3	3
3	2	1	-1	-3

**SOLVE DELETE CLEAR EDIT**

$a_n X + b_n Y + c_n Z = d_n$

X [ 1 ]  
Y [ -2 ]  
Z [ 3 ]

**1**

**REPEAT**

El centre de l'esfera és el punt  $O(1, -2, 3)$

El radi de l'esfera és:

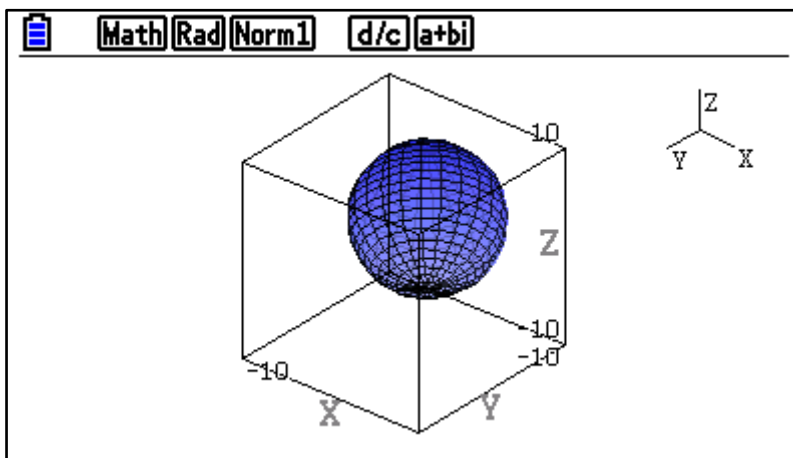
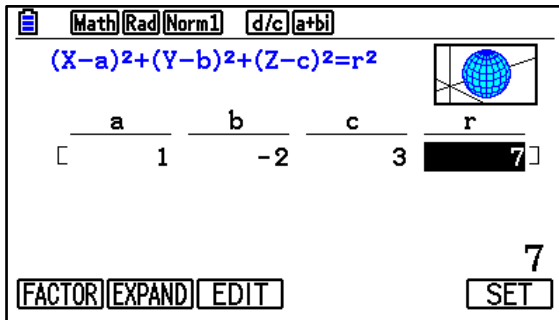
$$r = \overline{OA} = \sqrt{(3-1)^2 + (1+2)^2 + (-3-3)^2} = 7$$

El radi de l'esfera és  $r = 7$

L'equació de l'esfera és  $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 7^2$

Obrim el *Menú Gráfico 3D*.

Definim i representem l'esfera.



**Problema 17**

Siga l'esfera  $x^2 + y^2 + z^2 + 6y - 4z + 9 = 0$

Determineu l'equació de l'esfera concèntrica amb ella que és tangent al plànel

$$2x - 3y + 2z + 4 = 0$$

Solució:

Completant quadrats en l'esfera  $x^2 + y^2 + z^2 + 6y - 4z + 9 = 0$

$$x^2 + (y + 3)^2 + (z - 2)^2 = 2^2$$

El centre de l'esfera és el punt  $O(0, -3, 2)$  i el radi  $r = 2$

El radi de l'esfera concèntrica tangent al plànel  $\Pi \equiv 2x - 3y + 2z + 4 = 0$  té radi

$$R = d(O, \Pi)$$

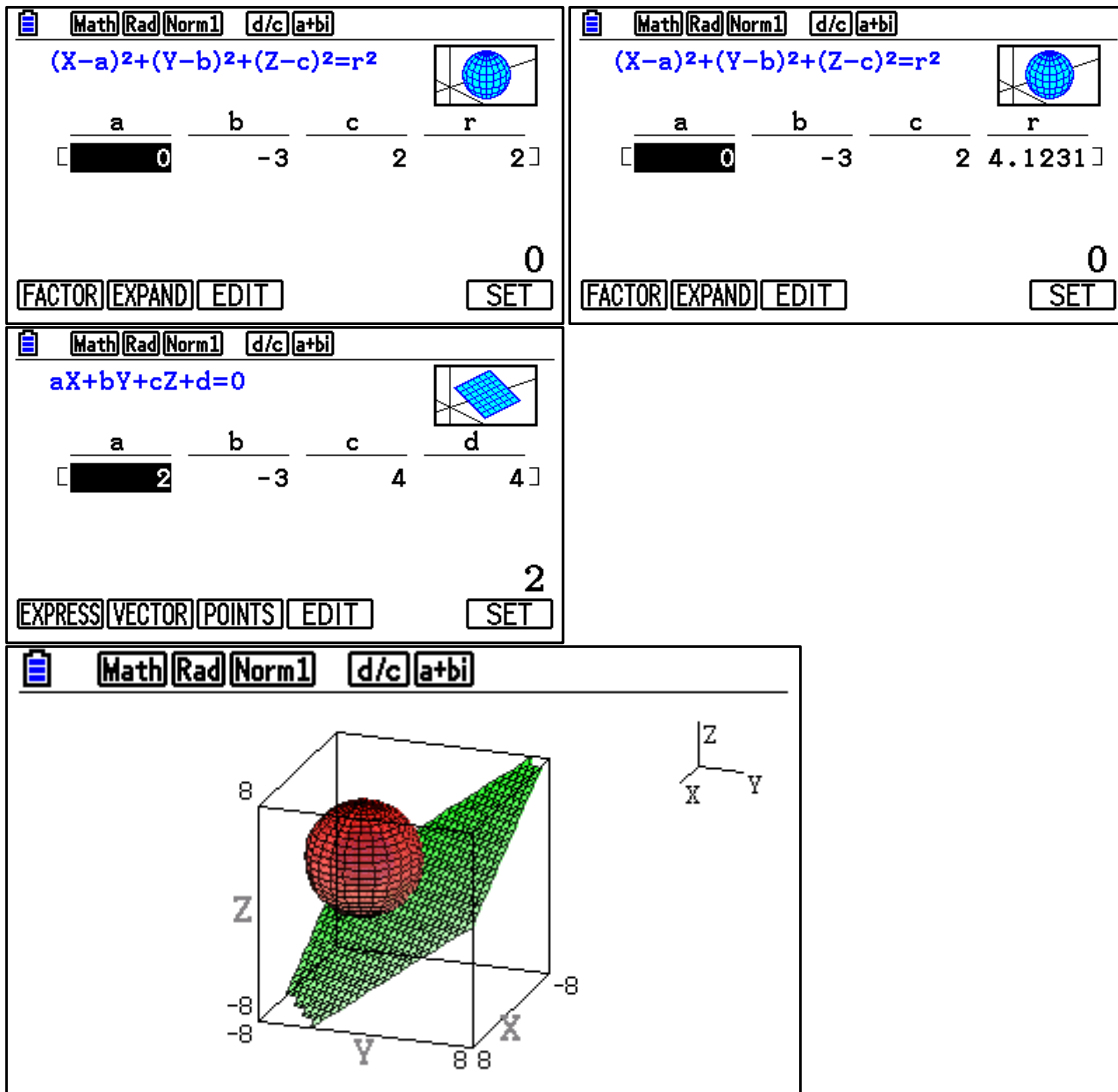
$$R = d(O, \Pi) = \left| \frac{2 \cdot 0 - 3 \cdot (-3) + 2 \cdot 2 + 4}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 2^2}} \right| = \sqrt{17}$$

L'equació de l'esfera:

$$x^2 + (y + 3)^2 + (z - 2)^2 = 17$$

Obrim el *Menú Gráfico 3D*.

Definim i representem les dues esferes i el plànel



**Problema 18**

Siga l'esfera  $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 4y + 8z + 20 = 0$

Calculeu l'esfera d'igual radi, tangent exterior en el punt  $A(1, 4, -3)$  de l'esfera.

Calculeu l'esfera d'igual radi, tangent exterior en el punt diametralment oposat al punt  $A(1, 4, -3)$  de l'esfera.

Solució:

Completant quadrats:

$$E \equiv (x - 3)^2 + (y - 2)^2 + (z + 4)^2 = 3^2$$

L'esfera  $E$  té centre  $O(3, 2, -4)$  i radi  $r = 3$

Notem que el punt  $A(1, 4, -3)$  pertany a l'esfera  $E$  ja que satisfà la seua equació:

$$E \equiv (1 - 3)^2 + (4 - 2)^2 + (-3 + 4)^2 = 3^2$$

El centre  $O_1$  de l'esfera tangent en el punt  $A(1, 4, -3)$  compleix:

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AO_1}$$

$$(-2, 2, 1) = (x - 2, y - 4, z + 3)$$

Resolent l'equació:

$$O_1(-1, 6, -2)$$

L'equació de l'esfera de radi 3 tangent en  $A$  a l'esfera  $E$  té equació:

$$E_1 \equiv (x + 1)^2 + (y - 6)^2 + (z + 2)^2 = 3^2$$

El punt  $A'$  diametralment oposat del punt  $A$  compleix:

$$\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OA'}$$

$$(2, -2, -1) = (x - 3, y - 2, z + 4)$$

Resolent l'equació:

$$A'(5, 0, -5)$$

El centre  $O_2$  de l'esfera tangent en el punt  $A'(5, 0, -5)$  compleix:

$$\overrightarrow{O_1O} = \overrightarrow{OO_2}$$

$$(4, -4, -2) = (x - 3, y - 2, z + 4)$$

Resolent l'equació:

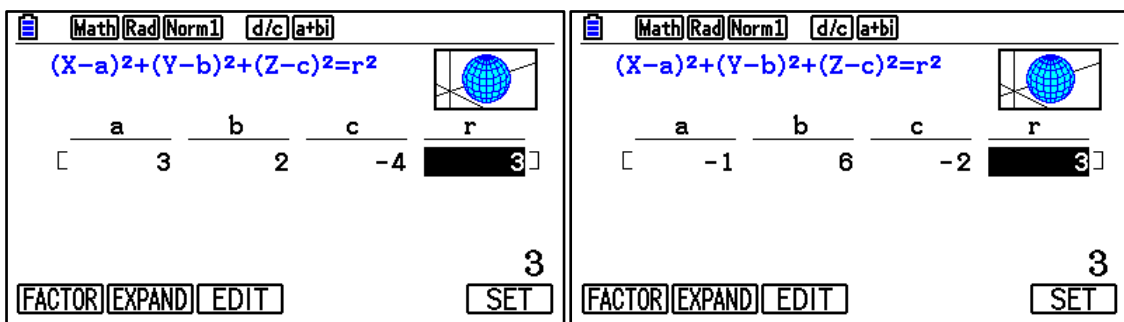
$$O_2(7, -2, -6)$$

L'equació de l'esfera de radi 3 tangent en  $A'$  a l'esfera  $E$  té equació:

$$E_1 \equiv (x - 7)^2 + (y + 2)^2 + (z + 6)^2 = 3^2$$

Obrim el *Menú Gráfico 3D*.

Definim i representem les tres esferes.



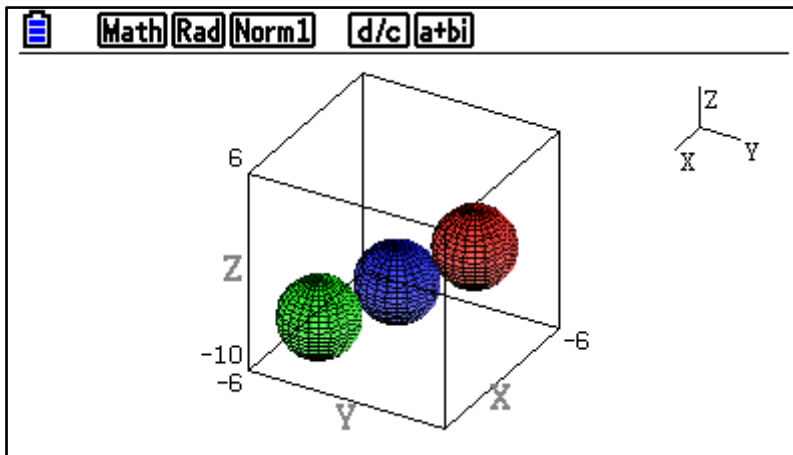
Math Rad Norm1 d/c a+bi

$$(X-a)^2+(Y-b)^2+(Z-c)^2=r^2$$

a 7    b -2    c -6    r 3

3

FACTOR EXPAND EDIT SET



**Problema 19**

Siguen les esferes d'equacions

$$E_1 \equiv x^2 + y^2 + z^2 = 25, E_2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 15y - 25z = 0$$

- d) Proveu que les dues esferes són secants.
- e) Determineu el plànol que conté la intersecció de les dues esferes.
- f) Determineu el centre i el radi de la circumferència intersecció.

Solució:

a)

L'esfera  $E_1 \equiv x^2 + y^2 + z^2 = 25$  té centre  $O_1(0, 0, 0)$  i radi  $R_1 = 5$

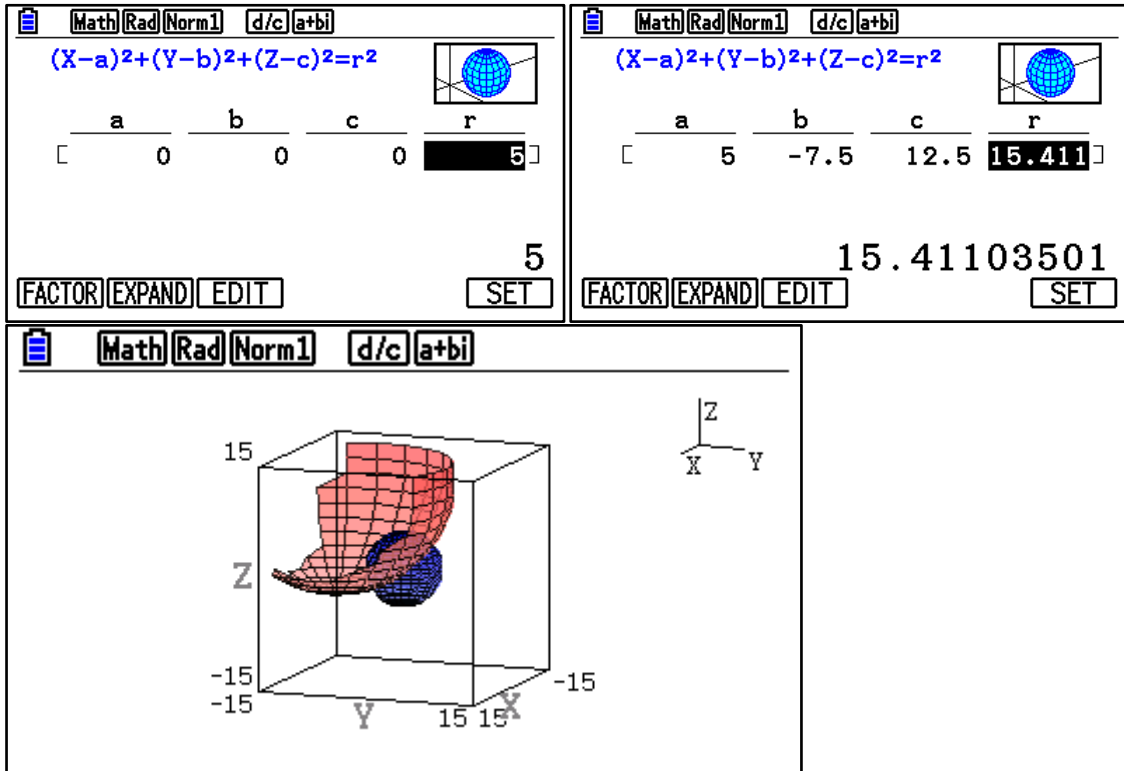
Completant quadrat en l'esfera  $E_2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 15y - 25z = 0$

$$(x - 5)^2 + \left(y + \frac{15}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{25}{2}\right)^2 = 25 + \frac{225}{4} + \frac{625}{4} = \left(\frac{5}{2}\sqrt{38}\right)^2$$

El centre de l'esfera és  $O_2\left(5, -\frac{15}{2}, \frac{25}{2}\right)$  i radi  $R_2 = \frac{5}{2}\sqrt{38}$

Obrim el *Menú Gráfico 3D*

Definim i representem les dues esferes.



Vegem analíticament que les dues esferes són secants.

Calculem la distància entre els dos centres.

$$\overline{O_1O_2} = \sqrt{(5 - 0)^2 + \left(-\frac{15}{2} - 0\right)^2 + \left(\frac{25}{2} - 0\right)^2} = \frac{5}{2}\sqrt{38}$$

La suma dels radis és:

$$R_1 + R_2 = 5 + \frac{5}{2}\sqrt{38} > \overline{O_1O_2}$$

La diferència dels radis és:

$$R_2 - R_1 = \frac{5}{2}\sqrt{38} - 5 > \overline{O_1O_2}$$

Aleshores, les dues esferes són secants.



b)

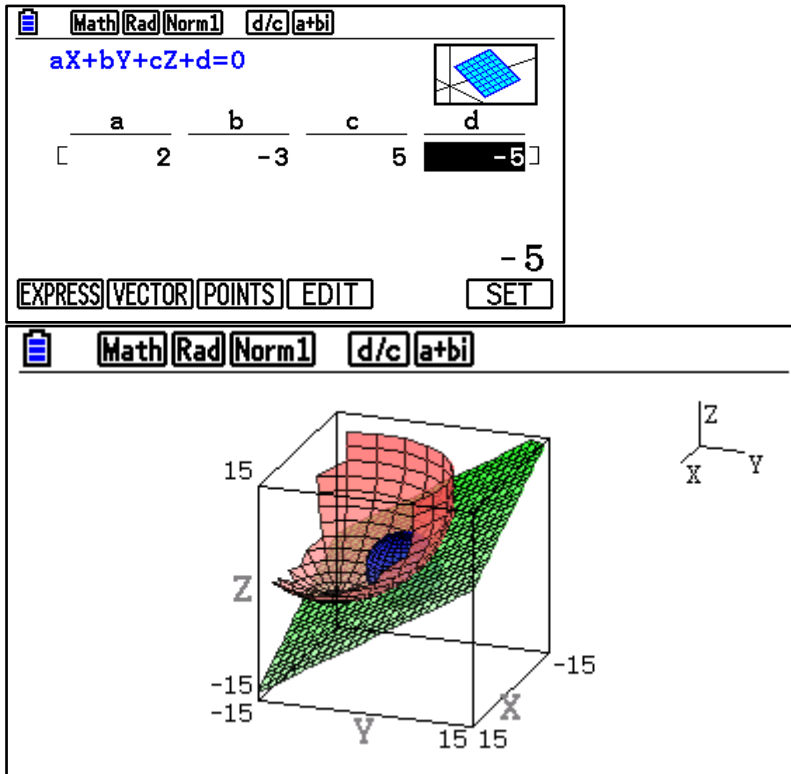
El plànol intersecció de les dues esferes és el plànol format per la diferència de les equacions de les dues esferes:

$$\Pi \equiv 10x - 15y + 25z = 25$$

Simplificant:

$$\Pi \equiv 2x - 3y + 5z - 5 = 0$$

Representem el plànol.



c)

El centre de la circumferència intersecció de les dues esferes és la projecció del centre  $O_1(0, 0, 0)$  sobre el plànol  $\Pi \equiv 2x - 3y + 5z - 5 = 0$

La recta  $r$  perpendicular al plànol que passa per  $O_1(0, 0, 0)$  té vector director el característic del plànol  $a = (2, -3, 5)$  la seua equació és:

$$r \equiv (x, y, z) = \alpha(2, -3, 5)$$

Substituïm les coordenades d'un punt qualsevol de la recta  $r$ ,  $(2\alpha, -3\alpha, 5\alpha)$  en l'equació del plànol:

$$2(2\alpha) - 3(-3\alpha) + 5(5\alpha) - 5 = 0$$

Resolent l'equació:

$$\alpha = \frac{5}{38}$$

La intersecció del plànol i la recta és:

$$O \left( \frac{5}{19}, -\frac{15}{38}, \frac{25}{38} \right)$$

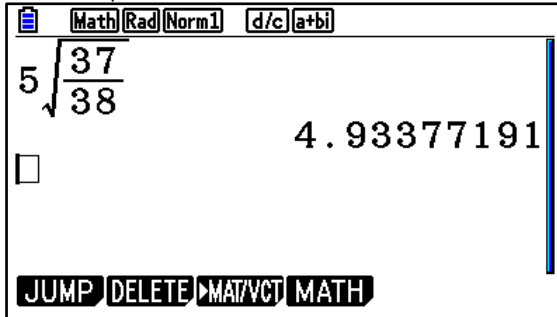
$$\overline{O_1O} = d(O_1, \Pi) = \frac{|-5|}{\sqrt{38}} = \frac{5}{\sqrt{38}}$$

Considerem el triangle rectangle format pels catets  $\overline{O_1O}$ ,  $O$  i un punt de la circumferència i d'hipotenusa  $R_1 = 5$

Siga  $R$  el radi de la circumferència.

Aplicant el teorema de Pitàgores:

$$5^2 = R^2 + \left(\frac{5}{\sqrt{38}}\right)^2$$
$$R = 5 \cdot \sqrt{\frac{37}{38}} \approx 4.93$$



**Problema 20**

Calculeu la distància més curta del punt  $A(1, -1, 3)$  a l'esfera

$$E \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 10z - 62 = 0$$

En quin punt de l'esfera s'assoleix la distància més curta.

Solució

Completant quadrats:

$$E \equiv (x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 5)^2 = 62 + 9 + 4 + 25 = 10^2$$

Les coordenades del centre de l'esfera és  $O(3, -2, 5)$  i el radi  $R = 10$

Estudiem la posició relativa del punt  $A(1, -1, 3)$  respecte de l'esfera.

$$(1 - 3)^2 + (-1 + 2)^2 + (3 - 5)^2 = 9 < 10^2$$

El punt  $A(1, -1, 3)$  és interior a l'esfera.

$$\overline{OA} = \sqrt{(1 - 3)^2 + (-1 + 2)^2 + (3 - 5)^2} = 3$$

La distància més curta és:

$$d_{\min} = R - \overline{OA} = 10 - 3 = 7$$

La distància més llarga és:

$$d_{\max} = R + \overline{OA} = 10 + 3 = 13$$

$$\overrightarrow{OA} = (-2, 1, -2)$$

L'equació de la recta que passa pels punts  $O$  i  $A$  és:

$$r_{OA} \equiv (x, y, z) = (3, -2, 5) + \alpha(-2, 1, -2)$$

Un punt qualsevol de la recta  $r_{OA} \equiv (x, y, z) = (3, -2, 5) + \alpha(-2, 1, -2)$  té coordenades:

$$P(3 - 2\alpha, -2 + \alpha, 5 - 2\alpha)$$

Determinem la intersecció de la recta i l'esfera. Substituïm les coordenades del punt

$P(3 - 2\alpha, -2 + \alpha, 5 - 2\alpha)$  en l'equació de l'esfera:

$$(-2\alpha)^2 + \alpha^2 + (-2\alpha)^2 = 100 \text{ Resolent l'equació:}$$

$$\alpha = \frac{10}{3}, -\frac{10}{3}$$

$$\text{Si } \alpha = \frac{10}{3}$$

$$P_1\left(\frac{-11}{3}, \frac{4}{3}, \frac{-5}{3}\right)$$

$$\overline{AP_1} = \sqrt{\left(\frac{-11}{3} - 1\right)^2 + \left(\frac{4}{3} + 1\right)^2 + \left(\frac{-5}{3} - 3\right)^2} = 7$$

$$P_1\left(\frac{-17}{3}, \frac{7}{3}, \frac{11}{3}\right) \text{ és el punt més proper de } A.$$

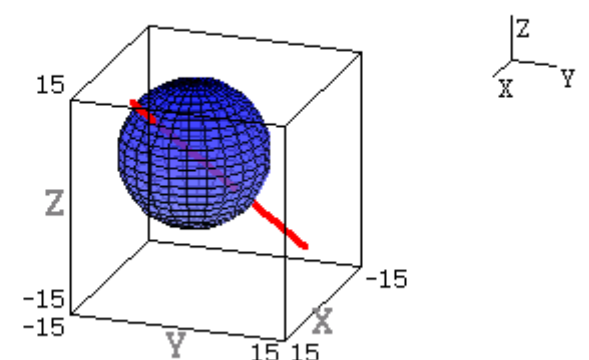
$$\alpha = -\frac{10}{3}$$

$$P_2\left(\frac{29}{3}, \frac{-16}{3}, \frac{35}{3}\right)$$

$$\overline{AP_2} = \sqrt{\left(\frac{29}{3} - 1\right)^2 + \left(\frac{-16}{3} + 1\right)^2 + \left(\frac{35}{3} - 3\right)^2} = 13$$

$$P_2\left(\frac{29}{3}, \frac{-16}{3}, \frac{35}{3}\right) \text{ és el punt més allunyat de } A.$$

Obrim el *Menú Gráfico 3D*  
Definim i representem l'esfera i la recta

<p>Math Rad Norm1 d/c a+bi</p> <p><math>(X-a)^2+(Y-b)^2+(Z-c)^2=r^2</math></p> <table border="1"><tr><td>a</td><td>b</td><td>c</td><td>r</td></tr><tr><td>3</td><td>-2</td><td>5</td><td>10</td></tr></table> <p>10</p> <p>FACTOR EXPAND EDIT SET</p>	a	b	c	r	3	-2	5	10	<p>Math Rad Norm1 d/c a+bi</p> <p>Punto de paso <math>(X_0, Y_0, Z_0)</math> Vector dirección <math>[a, b, c]</math></p> <table border="1"><tr><td><math>X_0</math></td><td><math>Y_0</math></td><td><math>Z_0</math></td></tr><tr><td>1</td><td>-1</td><td>3</td></tr></table> <table border="1"><tr><td>a</td><td>b</td><td>c</td></tr><tr><td>-2</td><td>1</td><td>-2</td></tr></table> <p>-2</p> <p>EXPRESS VECTOR P&amp;V POINTS EDIT SET</p>	$X_0$	$Y_0$	$Z_0$	1	-1	3	a	b	c	-2	1	-2
a	b	c	r																		
3	-2	5	10																		
$X_0$	$Y_0$	$Z_0$																			
1	-1	3																			
a	b	c																			
-2	1	-2																			
<p>Math Rad Norm1 d/c a+bi</p> 																					

**Problema 21**

Pels punts intersecció de la recta  $r \equiv \begin{cases} x = -5 + 3t \\ y = -11 + 5t \\ z = 9 - 4t \end{cases}$  i de l'esfera d'equació

$E \equiv (x + 2)^2 + (y - 1)^2 + (z + 5)^2 = 49$  s'han traçat plànol tangents determineu les seues equacions.

Solució:

El centre de l'esfera és  $O(-2, 1, -5)$  i e radi  $R = 7$

Determinem els punts intersecció de la recta i l'esfera.

Un punt qualsevol de la recta  $r \equiv \begin{cases} x = -5 + 3t \\ y = -11 + 5t \\ z = 9 - 4t \end{cases}$  és  $P(5 + 3t, -11 + 5t, 9 - 4t)$

Substituïm les seues coordenades en l'equació de l'esfera:

$$(-3 + 3t)^2 + (-12 + 5t)^2 + (14 - 4t)^2 = 49$$

Simplificant:

$$t^2 - 5t + 6 = 0$$

Resolent l'equació:

$$t = 2, 3$$

Les coordenades dels punts intersecció són:

$$P_1(1, -1, 1), P_2(4, 4, -3)$$

Els vector del plànol característic del plànol tangent a l'esfera en el punt  $P_1(1, -1, 1)$  és:

$$\overrightarrow{OP_1} = (3, -2, 6)$$

L'equació del plànol és:

$$\pi_1 \equiv 3(x - 1) - 2(y + 1) + 6(z - 1) = 0$$

Simplificant:

$$\pi_1 \equiv 3x - 2y + 6z - 11 = 0$$

Els vector del plànol característic del plànol tangent a l'esfera en el punt  $P_2(4, 4, -3)$  és:

$$\overrightarrow{OP_2} = (6, 3, 2)$$

L'equació del plànol és:

$$\pi_2 \equiv 6(x - 4) + 3(y - 4) + 2(z + 3) = 0$$

Simplificant:

$$\pi_2 \equiv 6x + 3y + 2z - 30 = 0$$

Obrim el *Menú Gráfico 3D*.

Definim les equacions de l'esfera, la recta i el plànol  $\pi_1 \equiv 3x - 2y + 6z - 11 = 0$

<div style="border: 1px solid black; padding: 2px;"> <span style="font-size: small;">Math Rad Norm1 d/c a+bi</span>  <math>(X-a)^2+(Y-b)^2+(Z-c)^2=r^2</math> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse; margin-top: 5px;"> <tr> <td style="text-align: center; width: 25%;">a</td> <td style="text-align: center; width: 25%;">b</td> <td style="text-align: center; width: 25%;">c</td> <td style="text-align: center; width: 25%;">r</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">[-2</td> <td style="text-align: center;">1</td> <td style="text-align: center;">-5</td> <td style="text-align: center;">7]</td> </tr> </table> <div style="text-align: right; margin-top: 5px;">7</div> <div style="display: flex; justify-content: space-between; font-size: x-small; margin-top: 5px;"> <span>FACTOR EXPAND EDIT</span> <span>SET</span> </div> </div>	a	b	c	r	[-2	1	-5	7]	<div style="border: 1px solid black; padding: 2px;"> <span style="font-size: small;">Math Rad Norm1 d/c a+bi</span>                  Punto de paso (Xo, Yo, Zo)                  Vector dirección [a, b, c]                 <table style="width: 100%; border-collapse: collapse; margin-top: 5px;"> <tr> <td style="text-align: center; width: 33%;">Xo</td> <td style="text-align: center; width: 33%;">Yo</td> <td style="text-align: center; width: 33%;">Zo</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">[-5</td> <td style="text-align: center;">-11</td> <td style="text-align: center;">9]</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center; width: 33%;">a</td> <td style="text-align: center; width: 33%;">b</td> <td style="text-align: center; width: 33%;">c</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">[3</td> <td style="text-align: center;">5</td> <td style="text-align: center;">-4]</td> </tr> </table> <div style="text-align: right; margin-top: 5px;">-4</div> <div style="display: flex; justify-content: space-between; font-size: x-small; margin-top: 5px;"> <span>EXPRESS VECTOR P&amp;V POINTS EDIT</span> <span>SET</span> </div> </div>	Xo	Yo	Zo	[-5	-11	9]	a	b	c	[3	5	-4]
a	b	c	r																		
[-2	1	-5	7]																		
Xo	Yo	Zo																			
[-5	-11	9]																			
a	b	c																			
[3	5	-4]																			

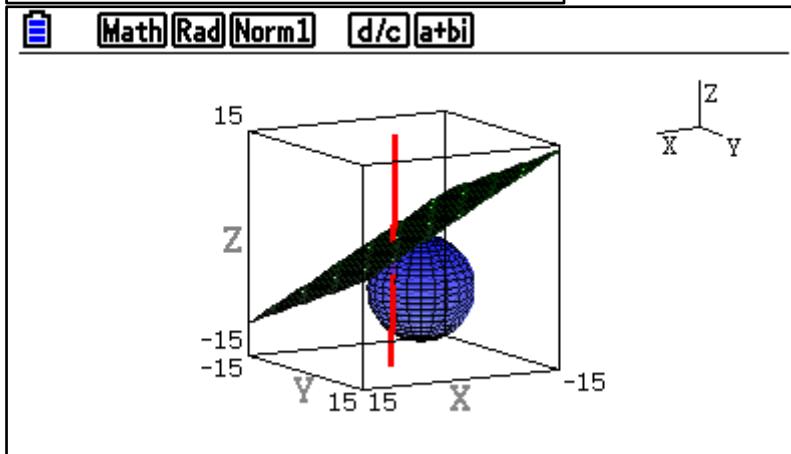
Math Rad Norm1 d/c a+bi

$aX+bY+cZ+d=0$

a	b	c	d
3	-2	6	-11

- 11

EXPRESS VECTOR POINTS EDIT SET



Definim les equacions de l'esfera, la recta i el plànel  $\pi_2 \equiv 6x + 3y + 2z - 30 = 0$

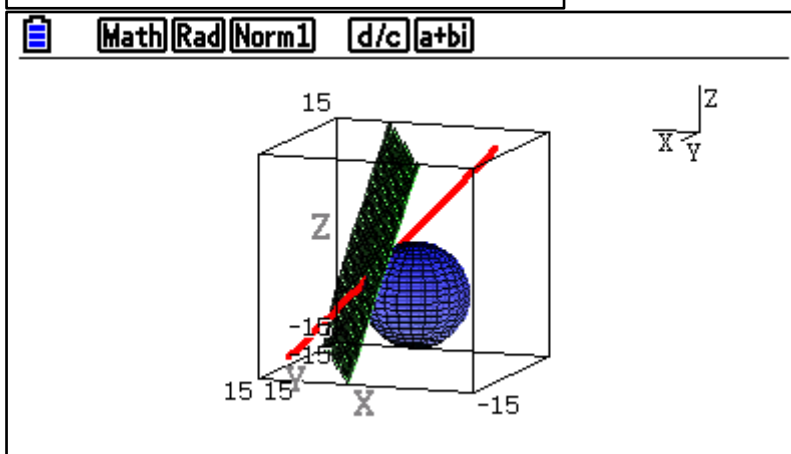
Math Rad Norm1 d/c a+bi

$aX+bY+cZ+d=0$

a	b	c	d
6	3	2	-30

6

EXPRESS VECTOR POINTS EDIT SET

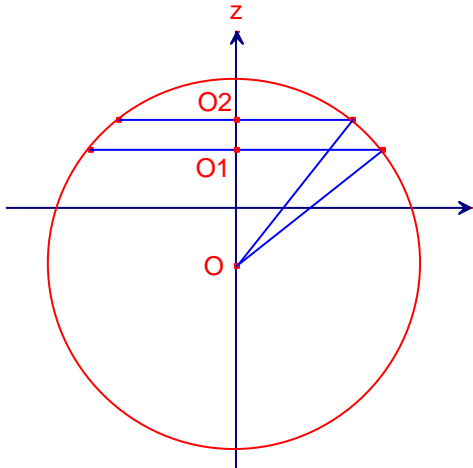


**Problema 22**

Determineu l'equació de l'esfera que passa per les circumferències  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ z = 2 \end{cases}$   
 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ z = 3 \end{cases}$

Solució:

Les circumferències són cadascuna d'elles, intersecció d'un cilindre i un pla perpendicular a l'eix de simetria del pla.



El centre de la primera circumferència és  $O_1(0, 0, 2)$  i radi  $R_1 = 5$

El centre de la segona circumferència és  $O_2(0, 0, 3)$  i radi  $R_2 = 4$

El centre de l'esfera pertany a la recta que uneix els dos centres

Siguen les seues coordenades  $O(0, 0, -x)$  siga  $R$  el radi de l'esfera.

Aplicant el teorema de Pitàgores:

$$R^2 = (x + 2)^2 + 5^2 = (x + 3)^2 + 4^2$$

Resolent el sistema:

$$\begin{cases} x = 2 \\ R = \sqrt{41} \end{cases}$$

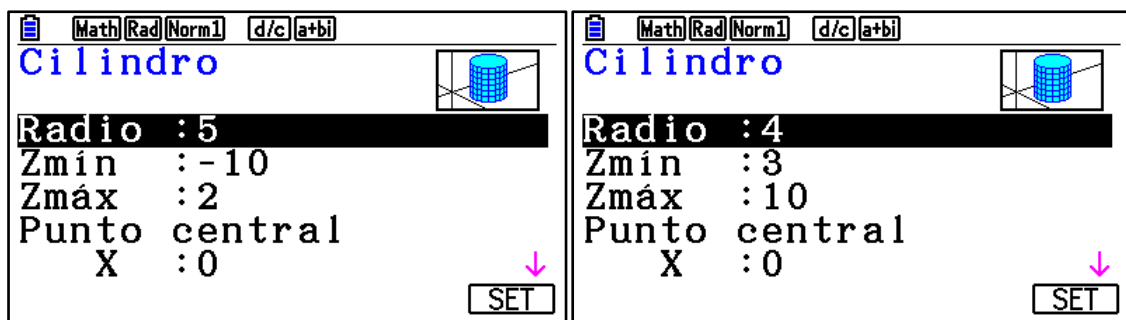
El centre de l'esfera és  $O(0, 0, -2)$

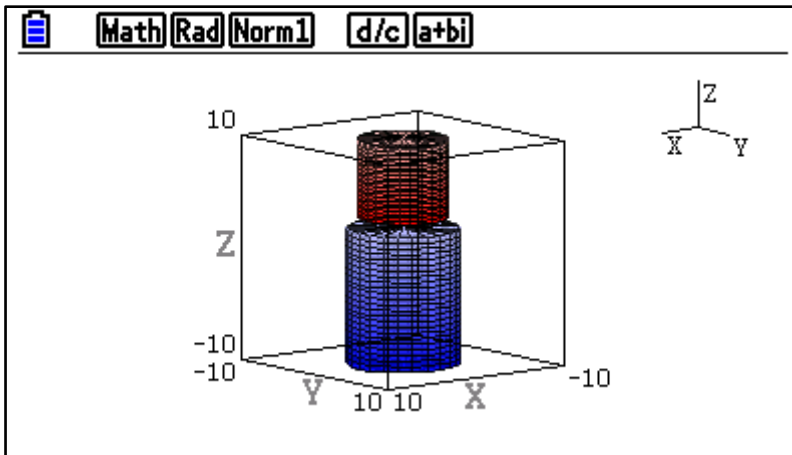
La seua equació és:

$$x^2 + y^2 + (z + 2)^2 = 41$$

Obri el *Menú Gràfic 3D*.

Definim i representem els dos cilindres,  $x^2 + y^2 = 5^2$ ,  $x^2 + y^2 = 4^2$  i l'esfera  $x^2 + y^2 + (z + 2)^2 = 41$





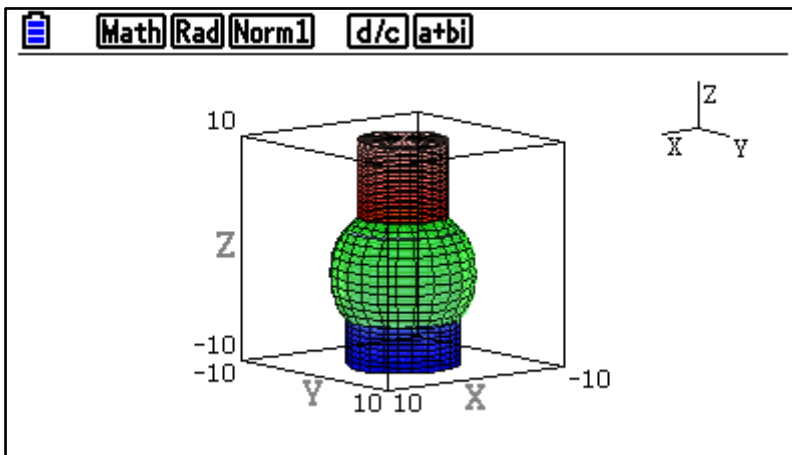
Math Rad Norm1 d/c a+bi

$$(X-a)^2+(Y-b)^2+(Z-c)^2=r^2$$

a	b	c	r
0	0	-2	6.4031

0

FACTOR EXPAND EDIT SET





**Problema 23**

Donades les esferes  $E_1 \equiv 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 3x - 2y + z - 5 = 0$ ,

$E_2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 - x + 3y - 2z + 1 = 0$

- d) Determineu la posició relativa de les dues esferes.
- e) Si són secants, determineu el plànol on es tallen.
- f) Determineu el centre i el radi de la circumferència intersecció de les dues esferes.

Solució:

Completant quadrats:

$$E_1 \equiv \left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{5}{2} + \frac{3}{16} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{54}{16}$$

El centre té coordenades,  $O_1 \left(-\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$  i el radi és  $R_1 = \frac{3}{4}\sqrt{6}$

$$E_2 \equiv \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 + (z - 1)^2 = -1 + \frac{1}{4} + \frac{9}{4} + 1 = \frac{10}{4}$$

El centre té coordenades,  $O_2 \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 1\right)$  i el radi és  $R_2 = \frac{1}{2}\sqrt{10}$

$$\overrightarrow{O_1O_2} = \left(\frac{5}{4}, 2, \frac{5}{4}\right)$$

La distància entre els centres és:

$$\overline{O_1O_2} = \frac{\sqrt{114}}{4}$$

$$\overline{O_1O_2} = \frac{\sqrt{114}}{4} < R_1 + R_2 = \frac{3\sqrt{6} + 2\sqrt{10}}{4}$$

$$\overline{O_1O_2} = \frac{\sqrt{114}}{4} > |R_1 - R_2| = \frac{3\sqrt{6} - 2\sqrt{10}}{4}$$

The image shows four screenshots of a scientific calculator in sequence, demonstrating the calculation of the distance between the centers of two spheres and its comparison with the sum and difference of their radii to determine if they are secant.

- Top-left:** Shows the calculation of the radius  $R_1 = \frac{3\sqrt{6}}{4}$ . The display shows  $\frac{3\sqrt{6}}{4} \rightarrow A$  and  $\frac{3\sqrt{6}}{4}$  on the right side.
- Top-right:** Shows the calculation of the distance between centers  $\overline{O_1O_2} = \frac{\sqrt{114}}{4}$ . The display shows  $\frac{\sqrt{114}}{4} \rightarrow C$  and  $\frac{\sqrt{114}}{4}$  on the right side.
- Bottom-left:** Shows the calculation of the sum of radii  $R_1 + R_2 = \frac{3\sqrt{6} + 2\sqrt{10}}{4}$ . The display shows  $\frac{3\sqrt{6} + 2\sqrt{10}}{4} \rightarrow C$  and  $\frac{\sqrt{114}}{4}$  on the right side. Below, it shows  $A+B-C$  resulting in  $0.7489865742$ .
- Bottom-right:** Shows the calculation of the difference of radii  $|R_1 - R_2| = \frac{3\sqrt{6} - 2\sqrt{10}}{4}$ . The display shows  $\frac{3\sqrt{6} - 2\sqrt{10}}{4} \rightarrow C$  and  $\frac{\sqrt{114}}{4}$  on the right side. Below, it shows  $|A-B|-C$  resulting in  $-2.413291086$ .

Aleshores, les dues esferes són secants.

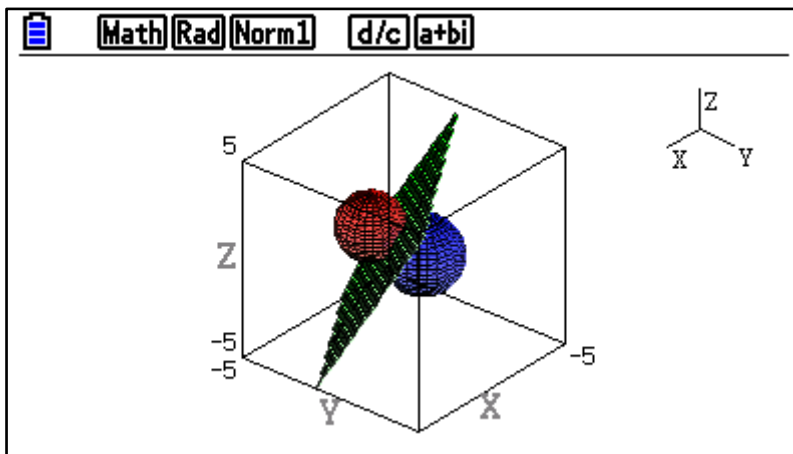
Calculem  $E_1 - 2 \cdot E_2$  que ens dona el plànol intersecció de les dues esferes.

$$E_1 - 2 \cdot E_2 \equiv 5x - 8y + 5z - 7 = 0$$

Obrim el *Menú Gráfico 3D*.

Definim i representem les dues esferes i el plànel intersecció.

<div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <p>Math Rad Norm1 d/c a+bi</p> <p><math>(X-a)^2+(Y-b)^2+(Z-c)^2=r^2</math> </p> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="text-align: center;">a</td> <td style="text-align: center;">b</td> <td style="text-align: center;">c</td> <td style="text-align: center;">r</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">[-0.75</td> <td style="text-align: center;">0.5</td> <td style="text-align: center;">-0.25</td> <td style="text-align: center;">1.8371]</td> </tr> </table> <p style="text-align: right; font-size: 1.2em;">1.837117307</p> <p>FACTOR EXPAND EDIT SET</p> </div>	a	b	c	r	[-0.75	0.5	-0.25	1.8371]	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <p>Math Rad Norm1 d/c a+bi</p> <p><math>(X-a)^2+(Y-b)^2+(Z-c)^2=r^2</math> </p> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="text-align: center;">a</td> <td style="text-align: center;">b</td> <td style="text-align: center;">c</td> <td style="text-align: center;">r</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">[0.5</td> <td style="text-align: center;">-1.5</td> <td style="text-align: center;">1</td> <td style="text-align: center;">1.5811]</td> </tr> </table> <p style="text-align: right; font-size: 1.2em;">1.58113883</p> <p>FACTOR EXPAND EDIT SET</p> </div>	a	b	c	r	[0.5	-1.5	1	1.5811]
a	b	c	r														
[-0.75	0.5	-0.25	1.8371]														
a	b	c	r														
[0.5	-1.5	1	1.5811]														
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <p>Math Rad Norm1 d/c a+bi</p> <p><math>aX+bY+cZ+d=0</math> </p> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="text-align: center;">a</td> <td style="text-align: center;">b</td> <td style="text-align: center;">c</td> <td style="text-align: center;">d</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">[5</td> <td style="text-align: center;">-8</td> <td style="text-align: center;">5</td> <td style="text-align: center;">-7]</td> </tr> </table> <p style="text-align: right; font-size: 1.2em;">-7</p> <p>EXPRESS VECTOR POINTS EDIT SET</p> </div>	a	b	c	d	[5	-8	5	-7]									
a	b	c	d														
[5	-8	5	-7]														

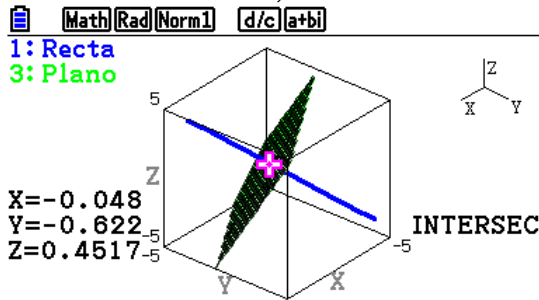


Definim i representem la recta que passa pels centres  $O_1\left(-\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ ,  $O_2\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 1\right)$

<div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <p>Math Rad Norm1 d/c a+bi</p> <p>Recta pasa por 2 puntos </p> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="text-align: center;">X</td> <td style="text-align: center;">Y</td> <td style="text-align: center;">Z</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">P1 [-0.75</td> <td style="text-align: center;">0.5</td> <td style="text-align: center;">-0.25]</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">P2 [0.5</td> <td style="text-align: center;">-1.5</td> <td style="text-align: center;">1]</td> </tr> </table> <p style="text-align: right; font-size: 1.2em;">1</p> <p>EXPRESS VECTOR P&amp;V POINTS EDIT SET</p> </div>	X	Y	Z	P1 [-0.75	0.5	-0.25]	P2 [0.5	-1.5	1]	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <p>Math Rad Norm1 d/c a+bi</p> </div>
X	Y	Z								
P1 [-0.75	0.5	-0.25]								
P2 [0.5	-1.5	1]								

El centre de la circumferència intersecció és calcula efectuant la intersecció de la recta i el plaol.

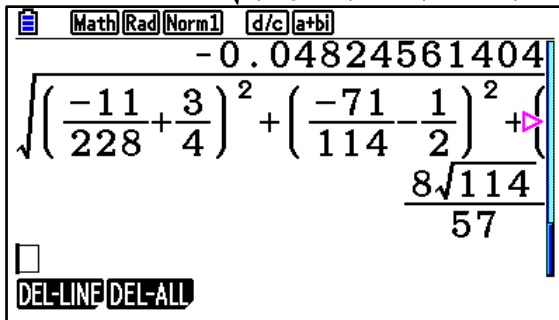
Amb la funció G-Solv, determinem la intersecció:



El centre de la circumferència és:

$$O \left( \frac{-11}{228}, \frac{-71}{114}, \frac{103}{228} \right)$$

$$\text{Calculem } \overline{O_1O} = \sqrt{\left(\frac{-11}{228} + \frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{-71}{114} + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{103}{228} + \frac{1}{4}\right)^2} = \frac{8\sqrt{114}}{57}$$



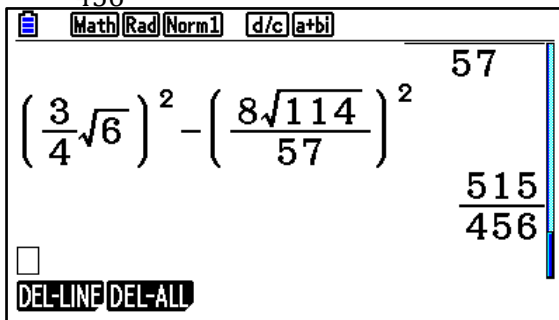
Siga  $R$  el radi de la circumferència intersecció de les dues esferes.

Per calcular el radi  $R$  aplicarem el teorema de Pitàgores al triangle rectangle de catets,

$$R, \overline{O_1O} = \frac{8\sqrt{114}}{57} \text{ i hipotenusa } R_1 = \frac{3}{4}\sqrt{6}$$

$$\left(\frac{3}{4}\sqrt{6}\right)^2 = R^2 + \left(\frac{8\sqrt{114}}{57}\right)^2$$

$$R^2 = \frac{515}{456}$$



$$\text{El radi de la circumferència és } R = \sqrt{\frac{515}{456}}$$

**Problema 24**

Proveu que el punt  $T(1, 0, 1)$  pertany al plànel  $\pi \equiv x - 2y + 2z = 3$ .

Determineu l'equació de l'esfera que passa pel punt  $P(1, 0, 5)$  i és tangent en  $T$  al plànel  $\pi$ .

Solució:

Substituïm el punt  $T(1, 0, 1)$  en l'equació del plànel  $\pi \equiv x - 2y + 2z = 3$  i vegem que es transforma en una igualtat:

$$1 - 2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 3$$

El centre pertany a la recta  $r$  perpendicular al plànel que passa pel punt  $T(1, 0, 1)$ .

El vector director de la recta  $r$  és el característic del plànel  $\pi$ ,  $a = (1, -2, 2)$

$$r \equiv (x, y, z) = (1, 0, 1) + \mu(1, -2, 2)$$

El centre de l'esfera té coordenades:

$$O(1 + \mu, -2\mu, 1 + 2\mu)$$

El centre compleix que  $d(O, T) = d(O, P) = R$ , radi de l'esfera.

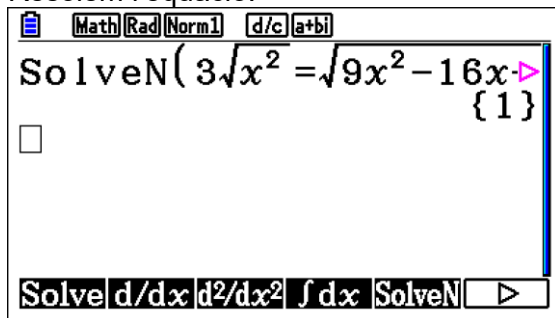
$$d(O, T) = \sqrt{(-\mu)^2 + (2\mu)^2 + (-2\mu)^2} = 3\sqrt{\mu^2}$$

$$d(O, P) = \sqrt{(-\mu)^2 + (2\mu)^2 + (4 - 2\mu)^2} = \sqrt{9\mu^2 - 16\mu + 16}$$

$$3\sqrt{\mu^2} = \sqrt{9\mu^2 - 16\mu + 16}$$

Obrim el *Menú Ejec-Mat*.

Resolem l'equació:



$$\mu = 1$$

El centre de l'esfera és  $O(2, -2, 3)$

El radi és  $R = 3 \cdot 1 = 3$

L'equació de l'esfera és:

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 3)^2 = 3^2$$

Obrim el *Menú Gráfico 3D*.

Definim i representem el plànel  $\pi \equiv x - 2y + 2z = 3$

la recta  $r \equiv (x, y, z) = (1, 0, 1) + \mu(1, -2, 2)$  i

l'esfera

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 3)^2 = 3^2$$

Math Rad Norm1 d/c a+bi

$aX+bY+cZ+d=0$

$\left[ \begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ 1 & -2 & 2 & -3 \end{array} \right]$

EXPRESS VECTOR POINTS EDIT SET

Math Rad Norm1 d/c a+bi

Punto de paso  $(X_0, Y_0, Z_0)$   
 Vector dirección  $[a, b, c]$

$\left[ \begin{array}{ccc} X_0 & Y_0 & Z_0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right]$

$\left[ \begin{array}{ccc} a & b & c \\ 1 & -2 & 2 \end{array} \right]$

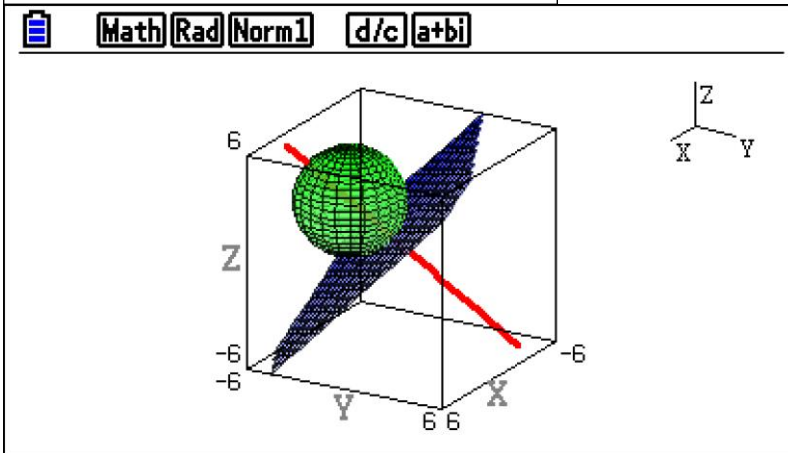
EXPRESS VECTOR P&V POINTS EDIT SET

Math Rad Norm1 d/c a+bi

$(X-a)^2+(Y-b)^2+(Z-c)^2=r^2$

$\left[ \begin{array}{cccc} a & b & c & r \\ 2 & -2 & 3 & 3 \end{array} \right]$

FACTOR EXPAND EDIT SET



**Problema 25**

Considerem els punts  $A(2, 3, 6)$ ,  $B(6, 2, -3)$ ,  $C(3, -6, 2)$  en l'espai tridimensional. Verifiqueu que els segments  $\overline{OA}$ ,  $\overline{OB}$ ,  $\overline{OC}$  són arestes d'un cub, on  $O(0, 0, 0)$ . Determineu el centre i el radi de l'esfera circumscrita al cub.

Solució:

Obrim el *Menú Ejec-Mat*.

Definim els vectors

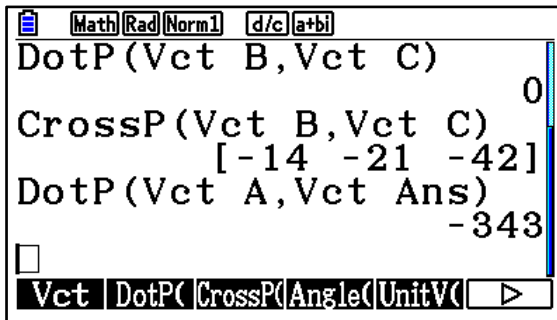
$$\overrightarrow{OA} = (2, 3, 6), \overrightarrow{OB} = (6, 2, -3), \overrightarrow{OC} = (3, -6, 2)$$

The image shows three calculator screens from the 'Ejec-Mat' menu. Each screen displays a 1x3 matrix with the components of a vector. The first screen shows vector A with components 2, 3, and 6. The second screen shows vector B with components 6, 2, and -3. The third screen shows vector C with components 3, -6, and 2. Each screen has a 'ROW' button highlighted and a 'COLUMN' button selected.

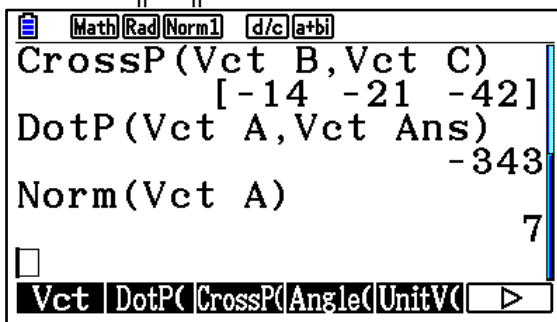
Vegem que els vectors dos a dos són ortogonals. Calculem els productes escalars i vegem que són zero.

The image shows a calculator screen with the 'Math' menu open. The following dot products are calculated and displayed as 0: DotP(Vet A, Vet B), DotP(Vet A, Vet C), and DotP(Vet B, Vet C). The 'Vet' button is highlighted in the bottom row.

Vegem que els tres vectors són linealment independents.  
Calculem el producte mixt dels tres vectors i vegem que és distint de zero.



Calculem la mesura de l'aresta del cub.  
Calculem  $\|\vec{OA}\|$



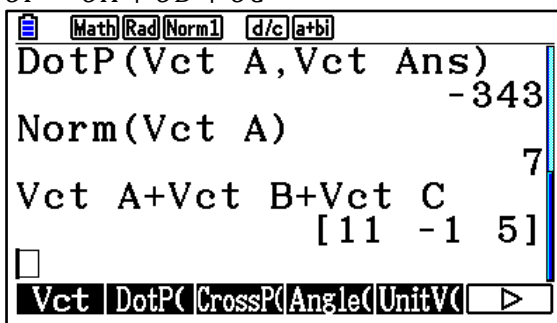
L'aresta del cub mesura  $\vec{OA} = 7$

El radi de l'esfera mesura  $R = \frac{\vec{OA} \sqrt{3}}{2}$

$$R = \frac{7}{2} \sqrt{3}$$

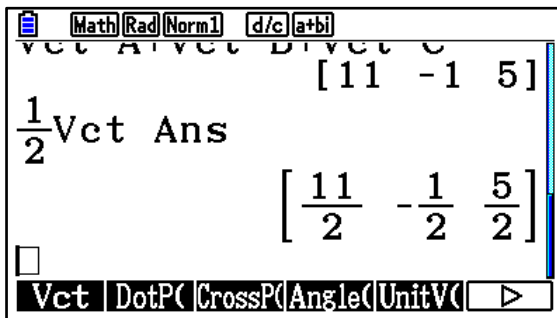
El vèrtex  $P$  del cub oposat al vèrtex  $O$ , les seues coordenades compleixen que:

$$\vec{OP} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$$



Les coordenades són  $P(11, -1, 5)$

El centre  $Q$  de l'esfera compleix que  $\vec{OQ} = \frac{1}{2} \vec{OP}$

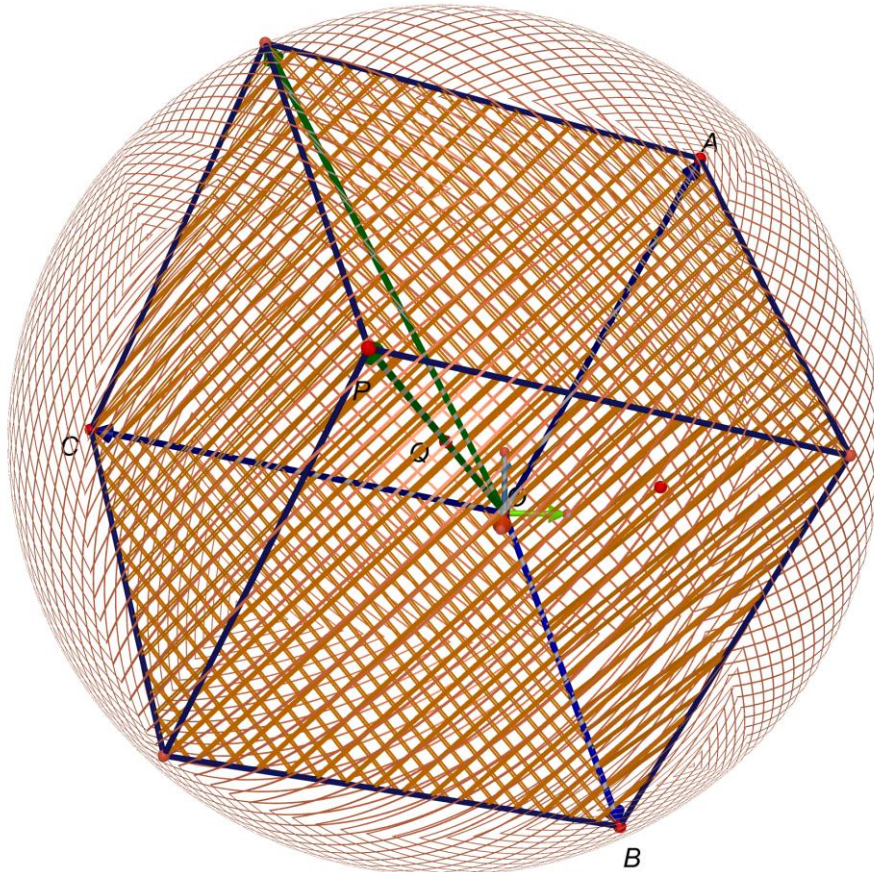


Les coordenades del centre són

$$Q\left(\frac{11}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

L'equació de l'esfera és:

$$\left(x - \frac{11}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{7\sqrt{3}}{2}\right)^2$$



$$(x-11/2)^2+(y+1/2)^2+(z-5/2)^2 = (7\sqrt{3}/2)^2$$



**Problema 26**

Siguen les esferes  $E_1 \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 12y + 6z + 45 = 0$ ,  $E_2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 = 81$

- c) Demostreu que les dues esferes són tangents.
- d) Determineu l'equació del plànel tangent a les dues esferes.

Solució:

a)

Completant quadrats:

$$E_1 \equiv (x - 2)^2 + (y - 6)^2 + (z + 3)^2 = -45 + 4 + 36 + 9 = 2^2$$

L'esfera té centre  $O_1(2, 6, -3)$  i radi  $R_1 = 2$

L'esfera  $E_2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 = 81$  té centre  $O_2(0, 0, 0)$  i radi  $R_2 = 9$

Calculem la distància entre els centres:

$$\overline{O_1O_2} = \sqrt{2^2 + 6^2 + 3^2} = 7$$

Calculem la suma i la diferència dels radis:

$$R_1 + R_2 = 2 + 9 = 11, R_2 - R_1 = 9 - 2 = 7$$

Aleshores,  $\overline{O_1O_2} = R_2 - R_1 = 7$

Les esferes són tangents interiors.

b)

Calculem  $E_1 - E_2$

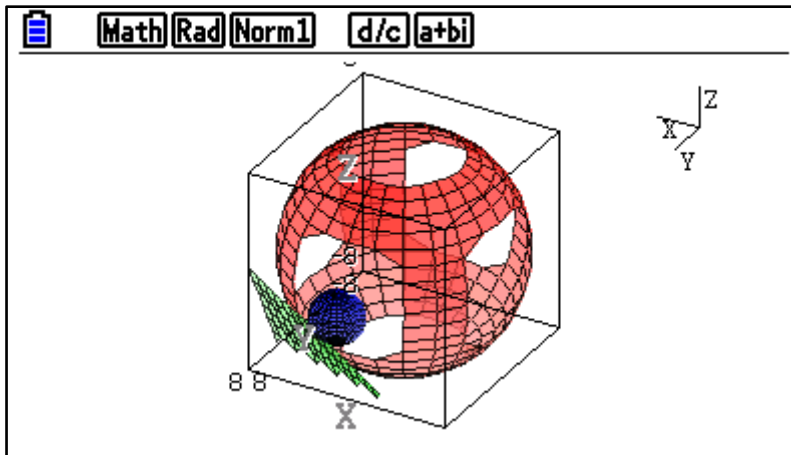
$\pi \equiv -4x - 12y + 6z + 36 = 0$ , plànel tangent a les dues esferes.

Obrim el *Menú Gráfico 3D*.

Definim i representem les dues esferes i el plànel.

Two screenshots of a 3D calculator interface. The left one shows the equation of sphere  $E_1$  with parameters  $a=2$ ,  $b=6$ ,  $c=-3$ ,  $r=2$ . The right one shows the equation of sphere  $E_2$  with parameters  $a=0$ ,  $b=0$ ,  $c=0$ ,  $r=9$ . Both screens have buttons for FACTOR, EXPAND, EDIT, and SET.

A screenshot of a 3D calculator interface showing the equation of the tangent plane  $\pi$ :  $aX+bY+cZ+d=0$  with parameters  $a=-4$ ,  $b=-12$ ,  $c=6$ ,  $d=126$ . The screen has buttons for EXPRESS, VECTOR, POINTS, EDIT, and SET.



**Problema 27**

Siguen les esferes  $E_1 \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 2y - 4z + 11 = 0$ ,

$$E_2 \equiv (x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 2)^2 = 3^2$$

- c) Demostreu que les dues esferes són tangents.
- d) Determineu l'equació del plànol tangent a les dues esferes.

Solució:

Completant quadrats:

$$E_1 \equiv (x + 3)^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 = -11 + 9 + 1 + 4 = 2^2$$

L'esfera té centre  $O_1(-3, 1, 2)$  i radi  $R_1 = 2$

L'esfera  $E_2 \equiv (x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 2)^2 = 3^2$  té centre  $O_2(1, -2, 2)$  i radi  $R_2 = 3$

Calculem la distància entre els centres:

$$O_1O_2 = \sqrt{4^2 + 3^2 + 0^2} = 5$$

Calculem la suma dels radis:

$$R_1 + R_2 = 2 + 3 = 5$$

Les esferes són tangents exteriors.

b)

$$E_2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 4z = 0$$

Calculem  $E_1 - E_2$

$$\pi \equiv 8x - 6y + 11 = 0, \text{ plànol tangent a les dues esferes.}$$

Obrim el *Menú Gráfico 3D*.

Definim i representem les dues esferes i el plànol.

The image shows three screenshots from a 3D calculator interface. The first screenshot shows the equation  $(X-a)^2+(Y-b)^2+(Z-c)^2=r^2$  with parameters  $a=-3$ ,  $b=1$ ,  $c=2$ , and  $r=2$ . The second screenshot shows the same equation with parameters  $a=1$ ,  $b=-2$ ,  $c=2$ , and  $r=3$ . The third screenshot shows the plane equation  $aX+bY+cZ+d=0$  with parameters  $a=8$ ,  $b=-6$ ,  $c=0$ , and  $d=11$ . The bottom screenshot shows a 3D plot of the two spheres and the plane.

**Problema 28**

Determineu l'equació de l'esfera  $E$ , amb centre sobre la recta  $r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases} t \in \mathbb{R}$

Tangent al plànol  $\pi \equiv 3x - y - 2z + 14 = 0$  en el punt  $T(-4, 0, 1)$

Solució:

Notem que el punt  $T(-4, 0, 1)$  pertany al plànol  $\pi \equiv 3x - y - 2z + 14 = 0$  ja que satisfà la seua equació,  $3(-4) - 0 - 2 \cdot 1 + 14 = 0$

Les coordenades del centre de l'esfera són  $O(t, t, t)$

El radi  $R$  de l'esfera compleix:

$$d(O, T) = d(O, \pi) = R$$

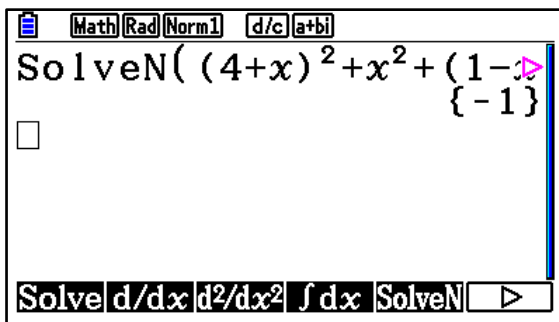
$$\sqrt{(-4-t)^2 + (0-t)^2 + (1-t)^2} = \left| \frac{3(-t) - (-t) - 2(-t) + 14}{\sqrt{3^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} \right|$$

$$\sqrt{(4+t)^2 + t^2 + (1-t)^2} = \sqrt{14}$$

Obrim el *Menú Ejec-Mat*

Resolem l'equació

$$(4+t)^2 + t^2 + (1-t)^2 = 14$$



El problema té una solució:

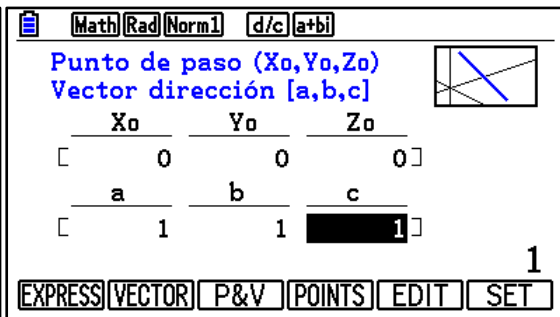
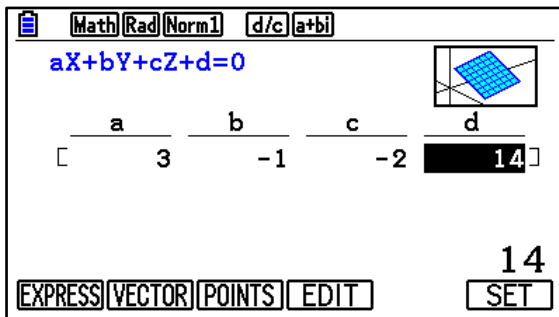
El centre de l'esfera és  $O(-1, -1, -1)$  i el radi  $R = \sqrt{14}$

L'equació de l'esfera és:

$$E \equiv (x + 1)^2 + (y + 1)^2 + (z + 1)^2 = 14$$

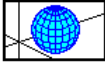
Obrim el *Menú Gráfico 3D*

Definim i representem el plànol la recta i l'esfera.



Math Rad Norm1 d/c a+bi

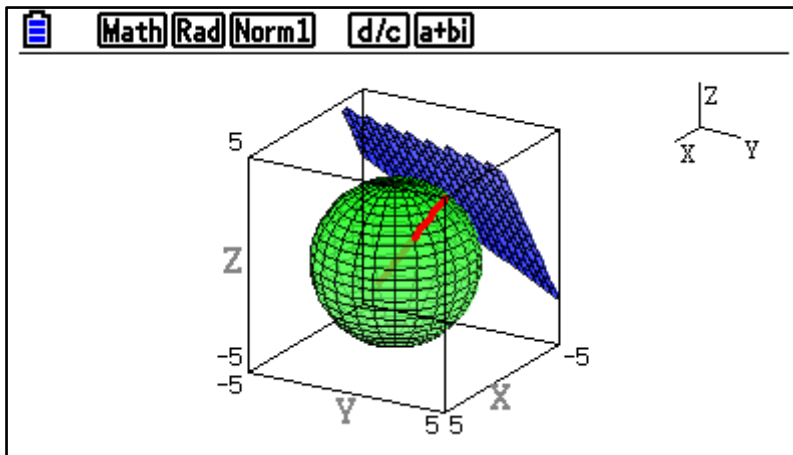
$(X-a)^2+(Y-b)^2+(Z-c)^2=r^2$



$\left[ \frac{a}{-1} \frac{b}{-1} \frac{c}{-1} \frac{r}{3.7416} \right]$

3.741657387

FACTOR EXPAND EDIT SET



**Problema 29**

Els punts  $A(3, -2, 5)$ ,  $B(-1, 6, -3)$  són els extrems d'un diàmetre d'una circumferència que passa pel punt  $C(1, -4, 1)$   
 Determineu l'equació de la circumferència.

Solució:

El centre de la circumferència és el punt mig  $O$  del segment  $\overline{AB}$  que té coordenades  $O(1, 2, 1)$

$$\overrightarrow{OA} = (2, -4, 4)$$

El radi és de la circumferència és:

$$r = \|\overrightarrow{OA}\| = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + 4^2} = 6$$

L'equació de la circumferència és la intersecció de l'esfera de centre  $O(1, 2, 1)$  i radi  $r = 6$  i el plànel que passa pels punts  $A(3, -2, 5)$ ,  $B(-1, 6, -3)$ ,  $C(1, -4, 1)$

Obrim el *Menú Gráfico 3D*

Definim i representem l'esfera i el plànel.

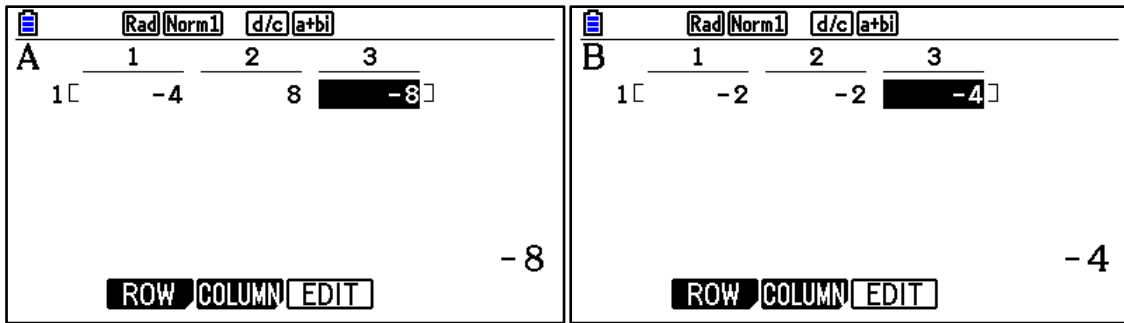
L'equació de l'esfera és

$$E \equiv (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 6^2$$

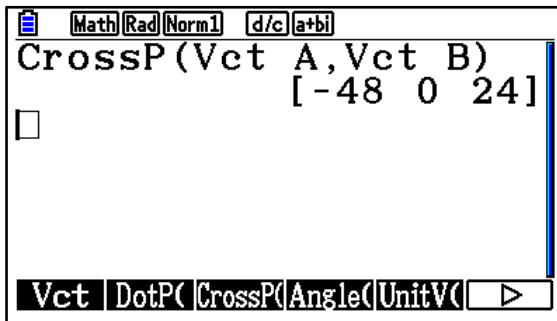
$$\overrightarrow{AB} = (4, -8, 8), \overrightarrow{AC} = (-2, -2, -4)$$

Obrim el *Menú Ejec-Mat*

Definim els vectors  $\overrightarrow{AB} = (4, -8, 8)$ ,  $\overrightarrow{AC} = (-2, -2, -4)$



Calculem  $\overline{AB} \times \overline{AC}$  vector característic del plànel que passa pels punts  $A, B, C$



El vector característic del plànel és  $a = (-2, 0, 1)$

L'equació del plànel que passa pels punts  $A, B, C$  és:

$$\pi_{ABC} \equiv -2(x - 3) + 0(y + 2) + 1(z - 5) = 0$$

L'equació de la circumferència és:

$$\begin{cases} (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 6^2 \\ -2x + z + 1 = 0 \end{cases}$$

**Problema 30**

El punt  $C(1, -1, -2)$  és el centre d'una circumferència que talla la recta

$$r \equiv \begin{cases} 2x - y + 2z - 12 \\ 4x - 7y - z + 6 = 0 \end{cases} \text{ una corda de longitud 8.}$$

Determineu l'equació de la circumferència.

Solució.

Obrim el *Menú Ecuación*.

Determinem l'equació paramètrica de la recta, resolent el sistema

$$r \equiv \begin{cases} x = 9 - 3\mu \\ y = 6 - 2\mu \\ z = 2\mu \end{cases}$$

Un punt de la recta és  $P(9, 6, 0)$  i el vector director  $v_r = (-3, -2, 2)$

$$\overrightarrow{CP} = (8, 7, 2)$$

Determinem el plànel que conté la recta  $r$  i el centre  $C(1, -1, -2)$  que conté la circumferència que cerquem.

Calculem  $\overrightarrow{CP} \times v_r$  vector característic del plànel.

Obrim el *Menú Ejec-Mat*.

Definim els vectors  $\overrightarrow{CP}$ ,  $v_r$

L'equació del plànel és:

$$\pi \equiv 18(x - 1) - 22(y + 1) + 5(z + 2) = 0$$

$$\pi \equiv 18x - 22y + 5z - 30 = 0$$



Determinem el punt projecció del centre  $C(1, -1, -2)$  sobre la recta  $r$ .

El plànol perpendicular a la recta  $r$  que passa pel centre té vector característic el seu vector director,  $v_r = (-3, -2, 2)$

La seua equació és:

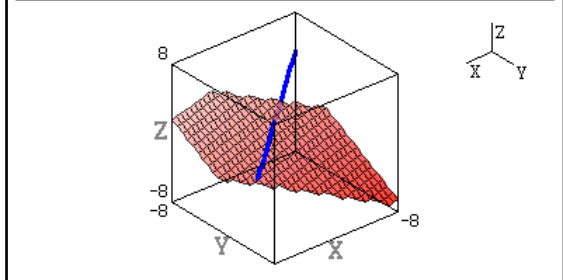
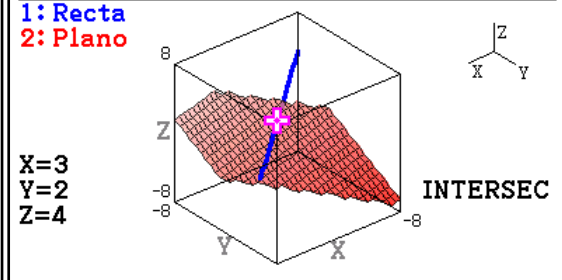
$$\omega \equiv -3(x - 1) - 2(y + 1) + 2(z + 2) = 0$$

$$\omega \equiv -3x - 2y + 2z + 5 = 0$$

Obrim el *Menú Gráfico 3D*.

Definim i representem la recta  $r$  i el plànol  $\omega$ .

Amb la funció *G-Solv*, determinem la intersecció de la recta i el plànol.

<p>Math Rad Norm1 d/c   a+bi</p> <p>Punto de paso (Xo, Yo, Zo) Vector dirección [a, b, c]</p> <table border="1"> <tr> <td>Xo</td> <td>Yo</td> <td>Zo</td> </tr> <tr> <td>9</td> <td>6</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>a</td> <td>b</td> <td>c</td> </tr> <tr> <td>-3</td> <td>-2</td> <td>2</td> </tr> </table> <p>2</p> <p>EXPRESS VECTOR P&amp;V POINTS EDIT SET</p>	Xo	Yo	Zo	9	6	0	a	b	c	-3	-2	2	<p>Math Rad Norm1 d/c   a+bi</p> <p>aX+bY+cZ+d=0</p> <table border="1"> <tr> <td>a</td> <td>b</td> <td>c</td> <td>d</td> </tr> <tr> <td>-3</td> <td>-2</td> <td>2</td> <td>5</td> </tr> </table> <p>5</p> <p>EXPRESS VECTOR POINTS EDIT SET</p>	a	b	c	d	-3	-2	2	5
Xo	Yo	Zo																			
9	6	0																			
a	b	c																			
-3	-2	2																			
a	b	c	d																		
-3	-2	2	5																		
<p>Math Rad Norm1 d/c   a+bi</p> 	<p>Math Rad Norm1 d/c   a+bi</p> <p>1: Recta 2: Plano</p>  <p>X=3 Y=2 Z=4</p> <p>INTERSECC</p>																				

El punt projecció és la intersecció de la recta  $r$  i el plànol  $\omega$ .

Les seues coordenades són  $P'(3, 2, 4)$ . És el centre de la corda.

$$\overline{CP'} = (2, 3, 6)$$

$$\|\overline{CP'}\| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} = 7$$

Aplicant el teorema de Pitàgores, el radi de la circumferència és:

$$r = \sqrt{4^2 + 7^2} = \sqrt{65}$$

L'esfera de centre  $C(1, -1, -2)$  i radi  $r = \sqrt{65}$  té equació:

$$E \equiv (x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (z + 2)^2 = 65$$

La circumferència és la intersecció de l'esfera  $E$  i el plànol  $\pi$

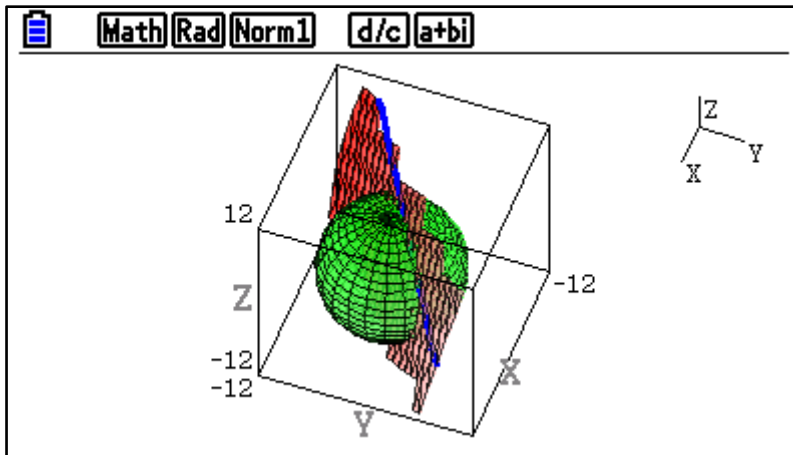
$$\begin{cases} (x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (z + 2)^2 = 65 \\ 18x - 22y + 5z - 30 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (z + 2)^2 = 65 \\ 18x - 22y + 5z - 30 = 0 \end{cases}$$

Obrim el *Menú Gráfico 3D*.

Definim i representem l'esfera i el plànol  $\pi$ .

<p>Math Rad Norm1 d/c   a+bi</p> <p><math>(X-a)^2+(Y-b)^2+(Z-c)^2=r^2</math></p> <table border="1"> <tr> <td>a</td> <td>b</td> <td>c</td> <td>r</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>-1</td> <td>-2</td> <td>8.0622</td> </tr> </table> <p>8.062257748</p> <p>FACTOR EXPAND EDIT SET</p>	a	b	c	r	1	-1	-2	8.0622	<p>Math Rad Norm1 d/c   a+bi</p> <p>aX+bY+cZ+d=0</p> <table border="1"> <tr> <td>a</td> <td>b</td> <td>c</td> <td>d</td> </tr> <tr> <td>18</td> <td>-22</td> <td>5</td> <td>-30</td> </tr> </table> <p>-30</p> <p>EXPRESS VECTOR POINTS EDIT SET</p>	a	b	c	d	18	-22	5	-30
a	b	c	r														
1	-1	-2	8.0622														
a	b	c	d														
18	-22	5	-30														



**Problema 31**

Demostreu que per la recta  $r \equiv \begin{cases} x = 4 + 4t \\ y = 1 + 3t \\ z = 1 + t \end{cases}$  només es pot traçar un plànel tangent a l'esfera  $E \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y + 2z + 8 = 0$ .  
Determineu la seua equació.

Solució:

Completant quadrats en l'equació de l'esfera:

$$E \equiv (x - 1)^2 + (y + 3)^2 + (z + 1)^2 = -8 + 1 + 9 + 1 = 3$$

El centre de l'esfera és el punt  $O(1, -3, -1)$  i el radi  $R = \sqrt{3}$

Només es pot traçar un plànel tangent a l'esfera que continga la recta i la recta és tangent a l'esfera.

Un punt de la recta és  $P(4, 1, 1)$  i el vector director  $v_r = (4, 3, 1)$

Vegem que la distància del centre de l'esfera a la recta  $r$  és igual al radi  $R = \sqrt{3}$ .

El plànel perpendicular a la recta  $r$  que passa pel centre  $O$  té vector característic el vector director de la recta  $v_r = (4, 3, 1)$

La seua equació és:

$$\pi \equiv 4(x - 1) + 3(y + 3) + (z + 1) = 0$$

$$\pi \equiv 4x + 3y + z + 6 = 0$$

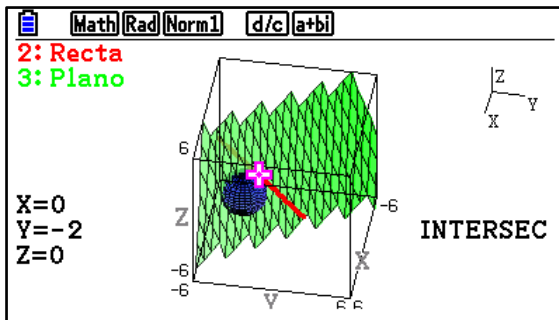
Obrim el *Menú Gráfico 3D*

Definim i representem l'esfera, la recta i el plànel.

The image shows four screenshots of a 3D calculator interface, likely TI-Nspire CX, used to solve the problem. The screenshots are arranged in a 2x2 grid.

- Top-left screenshot:** Shows the sphere equation  $(X-a)^2 + (Y-b)^2 + (Z-c)^2 = r^2$ . The parameters are set to  $a=1$ ,  $b=-3$ ,  $c=-1$ , and  $r=1.732$ . The radius value is displayed as  $1.732050808$ . Buttons for FACTOR, EXPAND, EDIT, and SET are visible.
- Top-right screenshot:** Shows the line definition with "Punto de paso  $(X_0, Y_0, Z_0)$ " and "Vector dirección  $[a, b, c]$ ". The point is  $(4, 1, 1)$  and the direction vector is  $(4, 3, 1)$ . Buttons for EXPRESS, VECTOR, P&V, POINTS, EDIT, and SET are visible.
- Bottom-left screenshot:** Shows the plane equation  $aX + bY + cZ + d = 0$ . The parameters are  $a=4$ ,  $b=3$ ,  $c=1$ , and  $d=6$ . Buttons for EXPRESS, VECTOR, POINTS, EDIT, and SET are visible.
- Bottom-right screenshot:** Shows a 3D coordinate system with the sphere (blue), the line (red), and the plane (green grid) plotted. The axes are labeled X, Y, and Z.

Amb la funció *G-Solv*, determinem la intersecció de la recta i el plànel, punt projecció del centre  $O(1, -3, -1)$  sobre la recta  $r$



El punt projecció és  $O'(0, -2, 0)$

Calculem la distància entre els punts  $O, O'$

$$\overrightarrow{OO'} = (-1, 1, 1)$$

$$|OO'| = \sqrt{3}$$

La recta  $r$  és tangent a l'esfera  $E$  aleshores, només es pot traçar un plànel tangent a l'esfera.

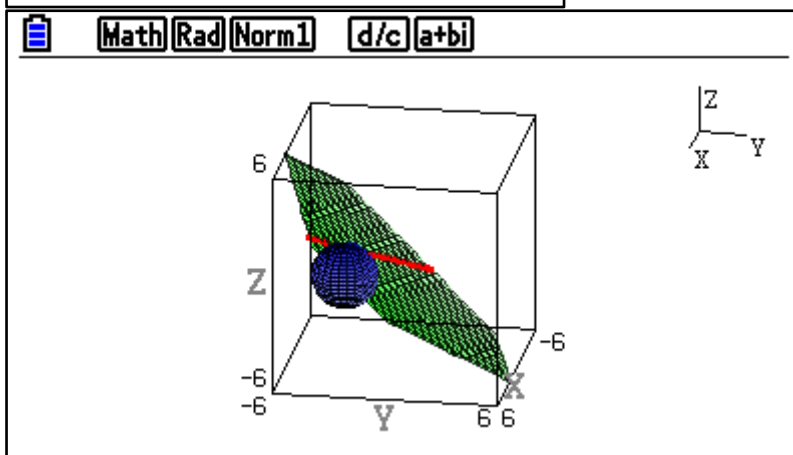
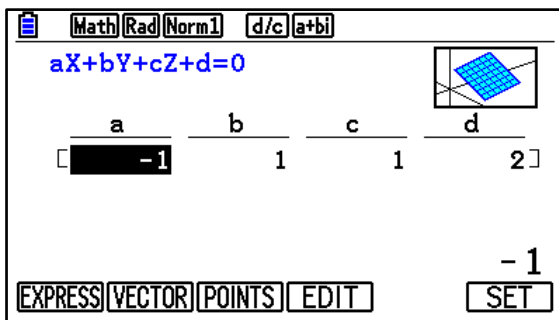
L'equació del plànel que cerquem té vector característic  $\overrightarrow{OO'} = (-1, 1, 1)$  i passa pel punt  $O'(0, -2, 2)$

La seua equació és  $\omega \equiv -(x - 0) + (y + 2) + (z - 0) = 0$

Simplificant:

$$\omega \equiv -x + y + z + 2 = 0$$

Representem el plànel  $\omega$



**Problema 32**

Determineu l'equació de l'esfera de radi  $\sqrt{6}$  tangent al plànel  $\pi \equiv x + 2y - z + 1 = 0$  en el punt de coordenades  $(1, 0, 2)$ .

Solució:

El punt  $P(1, 0, 2)$  pertany al plànel ja que  $1 + 2 \cdot 0 - 2 + 1 = 0$ .

El centre de l'esfera pertany a la recta perpendicular al plànel  $\pi$  que passa pel punt  $P(1, 0, 2)$ .

El vector director de la recta és el característic del plànel  $a = (1, 2, -1)$

L'equació de la recta és:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = 2\mu \\ z = 2 - \mu \end{cases}$$

Un punt qualsevol de la recta té coordenades:

$$A(1 + \mu, 2\mu + 2 - \mu)$$

$$d(A, r) = \sqrt{6}$$

$$\left| \frac{1 + \mu + 2(2\mu) - (2 - \mu) + 2}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}} \right| = \sqrt{6}$$

Simplificant:

$$|6\mu| = 6$$

Resolent l'equació:

$$\mu = 1, -1$$

El problema té dues solucions:

Si  $\mu = 1$  el centre de l'esfera és el punt  $O_1(2, 2, 1)$

L'equació de l'esfera és:

$$E_1 \equiv (x - 2)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 6$$

Si  $\mu = -1$  el centre de l'esfera és el punt  $O_2(0, -2, 3)$

L'equació de l'esfera és:

$$E_2 \equiv (x - 0)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 6$$

Obrim el *Menú Gráfico 3D*

Definim i representem el plànel i les dues esferes.

The image shows two side-by-side screenshots of a 3D calculator interface. The left screenshot displays the plane equation editor with the formula  $aX+bY+cZ+d=0$ . The input fields for  $a, b, c, d$  contain the values 1, 2, -1, and 1 respectively. A 3D grid icon is visible. The right screenshot displays the sphere equation editor with the formula  $(X-a)^2+(Y-b)^2+(Z-c)^2=r^2$ . The input fields for  $a, b, c, r$  contain the values 2, 2, 1, and 2.4494 respectively. A 3D sphere icon is visible. Both screenshots have a top menu bar with options like Math, Rad, Norm1, d/c, a+bi, and a bottom bar with buttons like EXPRESS, VECTOR, POINTS, EDIT, and SET.

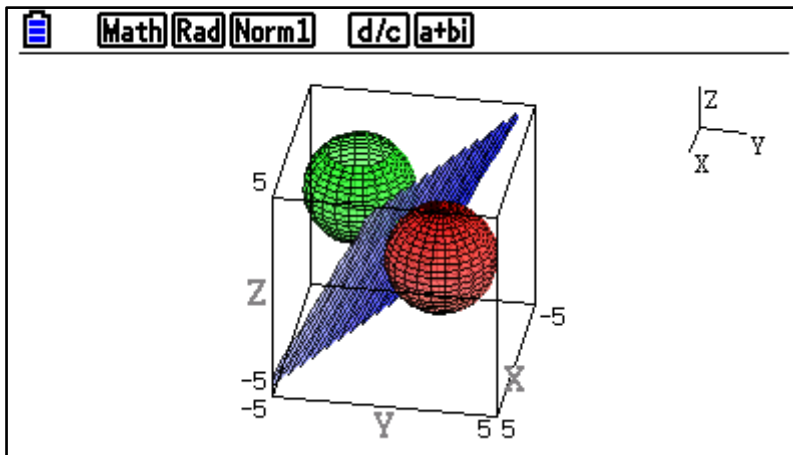
**Math** **Rad** **Norm1** **d/c** **a+bi**

$(X-a)^2+(Y-b)^2+(Z-c)^2=r^2$

a	b	c	r
0	-2	3	2.4494

2.449489743

**FACTOR** **EXPAND** **EDIT** **SET**



**Problema 33**

Determineu el punt  $O$  del plànel  $\pi \equiv x + y + z = 1$  que equidista dels punts  $A(1, -1, 2)$ ,  $B(3, 1, 2)$ ,  $C(1, 1, 0)$ . Determineu l'equació de l'esfera de centre el punt  $O$  anterior que passa pels tres punts  $A, B, C$ .

Solució:

El punt  $O$  és la intersecció dels dos mediadors als segments  $\overline{AB}$  i  $\overline{AC}$  i el plànel  $\pi \equiv x + y + z = 1$

El plànel mediador al segment  $\overline{AB}$  té vector característic el vector  $\overline{AB} = (2, 2, 0)$  i passa pel punt mig  $M$  del segment  $\overline{AB}$ ,  $M(2, 0, 2)$ .

La seua equació és:

$$\pi_M \equiv 2(x - 2) + 2(y - 0) + 0(z - 1) = 0$$

Simplificant:

$$\pi_M \equiv x + y = 2$$

El plànel mediador al segment  $\overline{AC}$  té vector característic el vector  $\overline{AC} = (0, 2, -2)$  i passa pel punt mig  $N$  del segment  $\overline{AC}$ ,  $N(1, 0, 1)$ .

La seua equació és:

$$\pi_N \equiv 0(x - 1) + 2(y - 0) - 2(z - 1) = 0$$

Simplificant:

$$\pi_N \equiv y - z = -1$$

Per determinar les coordenades del centre  $O$ , resollem el sistema format pels tres plànols.

Obrim el *Menú Ecuación*

El centre té coordenades  $O(4, -2, -1)$

El radi és  $r = \overline{OA}$

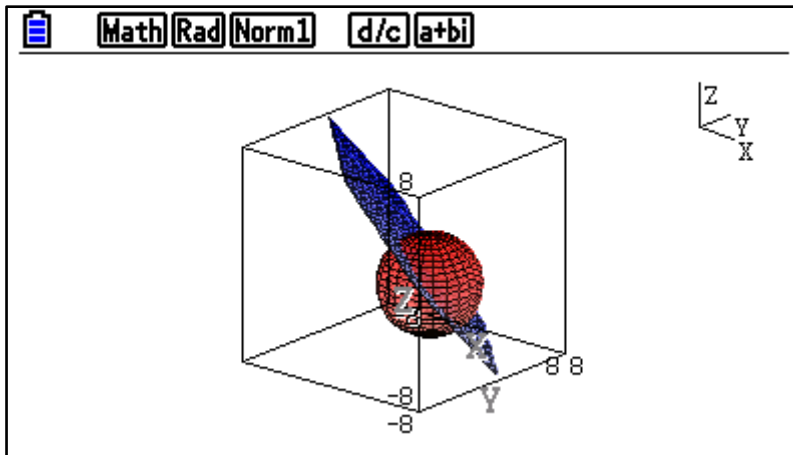
$$r = \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{14}$$

L'equació de l'esfera és:

$$E \equiv (x - 4)^2 + (x + 2)^2 + (z + 1)^2 = 14$$

Obrim el *Menú Gráfico 3D*

Definim i dibuixem el plànel que conté el centre i l'esfera.





**Problema 34**

Donades les esferes d'equacions:

$$E_1 \equiv (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 4, E_2 \equiv (x - 2)^2 + (y - 4)^2 + (z - 3)^2 = 4.$$

- Proveu que són secants.
- Determineu el plànol intersecció de les dues esferes.
- Calculeu el centre i el radi de la circumferència intersecció.
- Calculeu el volum de la intersecció de les dues esferes.

Solució:

a)

L'esfera  $E_1 \equiv (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 4$  té centre  $O_1(1, 2, 1)$  i radi  $R_1 = 2$ .

L'esfera  $E_2 \equiv (x - 2)^2 + (y - 4)^2 + (z - 3)^2 = 4$  té centre  $O_2(2, 4, 3)$  i radi  $R_2 = 2$ .

$$\overline{O_1O_2} = \|\overrightarrow{O_1O_2}\| = \|(1, 2, 2)\| = 3.$$

$$|R_1 - R_2| < \overline{O_1O_2} < R_1 + R_2$$

$$0 < 3 < 4$$

Les esferes són secants.

b)

$$E_1 \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 2z = 4 - 1 - 4 - 1 = -2$$

$$E_2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 8y - 6z = 4 - 4 - 16 - 9 = -25$$

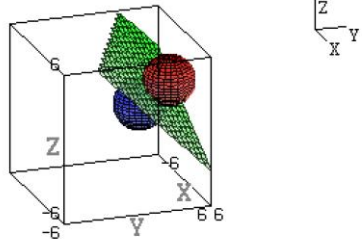
Per determinar el plànol intersecció restem les dues equacions:

L'equació del plànol intersecció és:

$$\pi \equiv 2x + 4y + 4z - 23 = 0$$

Obrim el *Menú Gráfico 3D*.

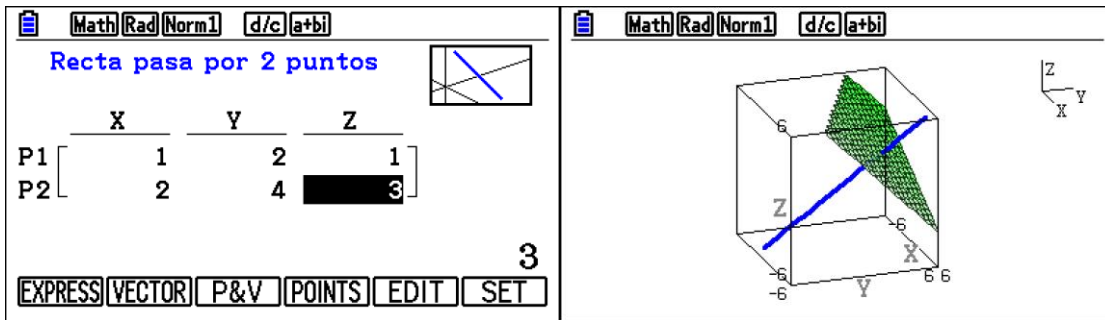
Definim i representem les dues esferes i el plànol intersecció:

<p>Math Rad Norm1 d/c a+bi</p> <p><math>(X-a)^2+(Y-b)^2+(Z-c)^2=r^2</math></p> <p>a b c r</p> <p>[ 1 2 1 2 ]</p> <p>2</p> <p>FACTOR EXPAND EDIT SET</p>	<p>Math Rad Norm1 d/c a+bi</p> <p><math>(X-a)^2+(Y-b)^2+(Z-c)^2=r^2</math></p> <p>a b c r</p> <p>[ 2 4 3 2 ]</p> <p>2</p> <p>FACTOR EXPAND EDIT SET</p>
<p>Math Rad Norm1 d/c a+bi</p> <p><math>aX+bY+cZ+d=0</math></p> <p>a b c d</p> <p>[ 2 4 4 -23 ]</p> <p>-23</p> <p>EXPRESS VECTOR POINTS EDIT SET</p>	<p>Math Rad Norm1 d/c a+bi</p> 

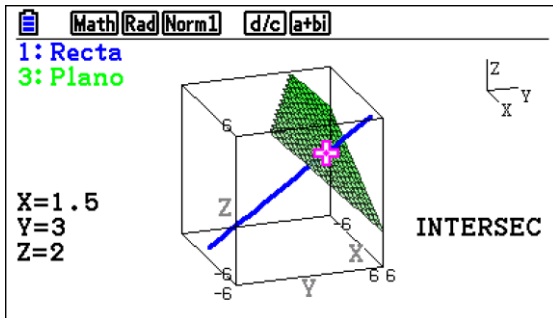
c)

Per determinar el centre de la circumferència intersecció de les dues esferes calcularem la intersecció de la recta que passa pels dos centres i el plànol.

Definim i representem la recta que passa pels centres de les esferes



Amb la funció  $G\text{-Sol}$ , determinem la intersecció de la recta i el plànel.



El centre de la circumferència intersecció té centre el punt:

$O\left(\frac{3}{2}, 3, 2\right)$ . Notem que és el punt mig dels dos centres ja que les dues circumferències tenen el mateix radi.

Per calcular el radi de la circumferència apliquem el teorema de Pitàgores al triangle equilàter d'hipotenusa  $R_1 = 2$  i catet  $a = d(O_1, \pi) = \left| \frac{2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 4 \cdot 1 - 23}{\sqrt{4 + 16 + 16}} \right| = \frac{3}{2}$ , la meitat de la distància entre els centres, ja que les dues esferes tenen el mateix radi.

El radi de la circumferència és:

$$r = \sqrt{2^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

d)

La intersecció de les dues esferes està formada per dos casquets iguals de radi  $R_1 = 2$  i altura,  $h = R_1 - a = \frac{1}{2}$

El volum d'un casquet esfèric és  $V_{\text{casquet}} = \pi \cdot h^2 \left(R - \frac{h}{3}\right)$

El volum intersecció és:

$$V = 2\pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(2 - \frac{1}{6}\right) = \frac{11}{12}\pi$$

**Problema 35**

Donades les esferes d'equacions:

$$E_1 \equiv (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 4, E_2 \equiv (x - 2)^2 + (y - 4)^2 + (z - 3)^2 = 9.$$

- Proveu que són secants.
- Determineu el plànol intersecció de les dues esferes.
- Calculeu el centre i el radi de la circumferència intersecció.
- Calculeu el volum de la intersecció de les dues esferes.

Solució:

a)

L'esfera  $E_1 \equiv (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 4$  té centre  $O_1(1, 2, 1)$  i radi  $R_1 = 2$ .

L'esfera  $E_2 \equiv (x - 2)^2 + (y - 4)^2 + (z - 3)^2 = 9$  té centre  $O_2(2, 4, 3)$  i radi  $R_2 = 3$ .

$$\overline{O_1O_2} = \|\overrightarrow{O_1O_2}\| = \|(1, 2, 2)\| = 3.$$

$$|R_1 - R_2| < \overline{O_1O_2} < R_1 + R_2$$

$$1 < 3 < 5$$

Les esferes són secants.

b)

$$E_1 \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 2z = 4 - 1 - 4 - 1 = -2$$

$$E_2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 8y - 6z = 9 - 4 - 16 - 9 = -20$$

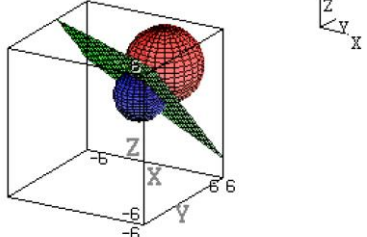
Per determinar el plànol intersecció restem les dues equacions:

L'equació del plànol intersecció és:

$$\pi \equiv x + 2y + 2z - 9 = 0$$

Obrim el *Menú Gráfico 3D*.

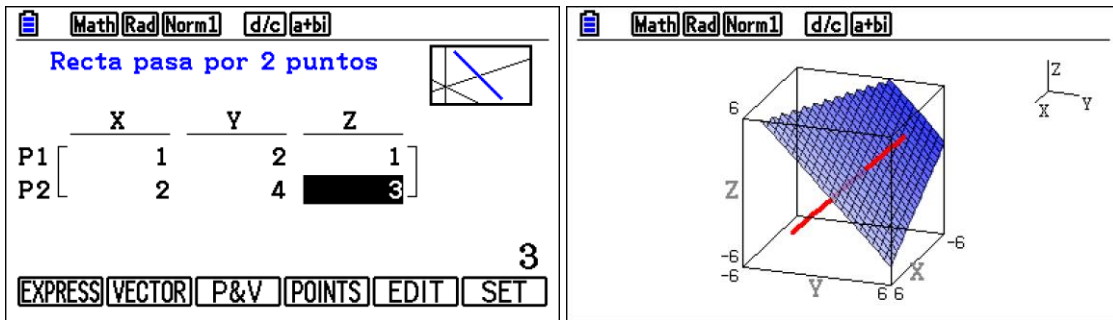
Definim i representem les dues esferes i el plànol intersecció:

<p>Math Rad Norm1 d/c a+bi</p> <p><math>(X-a)^2+(Y-b)^2+(Z-c)^2=r^2</math></p> <p>a b c r</p> <p>[ 1 2 1 2 ]</p> <p>2</p> <p>FACTOR EXPAND EDIT SET</p>	<p>Math Rad Norm1 d/c a+bi</p> <p><math>(X-a)^2+(Y-b)^2+(Z-c)^2=r^2</math></p> <p>a b c r</p> <p>[ 2 4 3 3 ]</p> <p>3</p> <p>FACTOR EXPAND EDIT SET</p>
<p>Math Rad Norm1 d/c a+bi</p> <p><math>aX+bY+cZ+d=0</math></p> <p>a b c d</p> <p>[ 1 2 2 -9 ]</p> <p>-9</p> <p>EXPRESS VECTOR POINTS EDIT SET</p>	<p>Math Rad Norm1 d/c a+bi</p> 

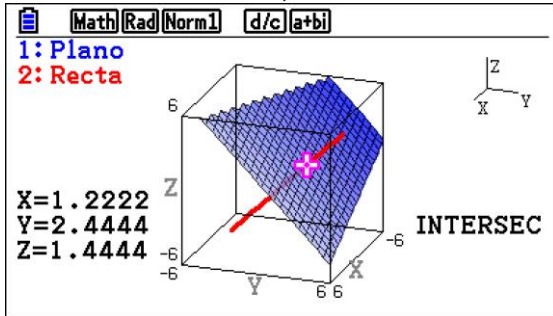
c)

Per determinar el centre de la circumferència intersecció de les dues esferes calcularem la intersecció de la recta que passa pels dos centres i el plànol.

Definim i representem la recta que passa pels centres de les esferes



Amb la funció *G-Solv*, determinem la intersecció de la recta i el plànol.



El centre de la circumferència intersecció té centre el punt:

$$O\left(\frac{11}{9}, \frac{22}{9}, \frac{13}{9}\right)$$

Per calcular el radi de la circumferència apliquem el teorema de Pitàgores al triangle equilàter d'hipotenusa  $R_1 = 2$  i catet  $a = d(O_1, \pi) = \left| \frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 - 9}{\sqrt{1+4+4}} \right| = \frac{2}{3}$ , la meitat de la distància entre els centres, ja que les dues esferes tenen el mateix radi.

El radi de la circumferència és:

$$r = \sqrt{2^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

d)

La intersecció de les dues esferes està format per dos casquets:

- 1.- Un casquet de radi  $R_1 = 2$  i altura,  $h_1 = R_1 - a = \frac{4}{3}$
- 2.- Un casquet de radi  $R_2 = 3$  i altura,  $h_2 = R_2 - (\overline{O_1O_2} - a) = \frac{2}{3}$

El volum d'un casquet esfèric és  $V_{casquet} = \pi \cdot h^2 \left(R - \frac{h}{3}\right)$

El volum intersecció és la suma dels volums dels dos casquets:

$$V = \pi \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2 \left(2 - \frac{4}{9}\right) + \pi \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(3 - \frac{2}{9}\right) = 36\pi$$

**Problema 36**

Determineu l'equació de l'esfera que passe per l'origen de coordenades i per la

$$\text{circumferència d'equació } \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25 \\ 2x - 3y + 5z - 5 = 0 \end{cases}$$

Solució.

El centre de l'esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 25$  és l'origen de coordenades  $O(0, 0, 0)$  el centre de l'esfera de l'esfera que cerquem pertany a la recta perpendicular al plànel  $\pi \equiv 2x - 3y + 5z - 5 = 0$  que passa pel centre de l'esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ .

El vector director és el característic del plànel  $v = (2, -3, 5)$

L'equació de la recta és:

$$r \equiv \begin{cases} x = 2\alpha \\ y = -3\alpha \\ z = 5\alpha \end{cases}$$

El centre de la circumferència és la intersecció de la recta  $r$  i el plànel  $\pi$

$$\begin{cases} 2x - 3y + 5z - 5 = 0 \\ \begin{cases} x = 2\alpha \\ y = -3\alpha \\ z = 5\alpha \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2\alpha \\ y = -3\alpha \\ z = 5\alpha \end{cases}$$

$$4\alpha + 9\alpha + 25\alpha - 5 = 0$$

$$\alpha = \frac{5}{38}$$

El centre de la circumferència  $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25 \\ 2x - 3y + 5z - 5 = 0 \end{cases}$  té coordenades:

$$P \left( \frac{5}{19}, -\frac{15}{38}, \frac{25}{38} \right)$$

$$\overline{OP} = d(O, r) = \left| \frac{-5}{\sqrt{38}} \right| = \frac{5}{\sqrt{38}}$$

Siga  $Q$  un punt qualsevol de la circumferència.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $\triangle OPQ$

$$\overline{PQ} = \sqrt{5^2 - \left( \frac{5}{\sqrt{38}} \right)^2} = 5 \sqrt{\frac{37}{38}}$$

Siga  $C(2\alpha, -3\alpha, 5\alpha)$  el centre de l'esfera que cerquem.

$$\overline{OC} = \overline{OQ} = \sqrt{38\alpha^2}$$

$$\overline{PC}^2 = \left( 2\alpha - \frac{5}{19} \right)^2 + \left( -3\alpha + \frac{15}{38} \right)^2 + \left( 5\alpha - \frac{25}{38} \right)^2$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $\triangle CPQ$

$$38\alpha^2 = \left( 2\alpha - \frac{5}{19} \right)^2 + \left( -3\alpha + \frac{15}{38} \right)^2 + \left( 5\alpha - \frac{25}{38} \right)^2 + \left( 5 \sqrt{\frac{37}{38}} \right)^2$$

Simplificant:

$$\alpha = \frac{5}{2}$$

El centre de l'esfera és:

$$C \left( 5, -\frac{15}{2}, \frac{25}{2} \right)$$

El radi és :

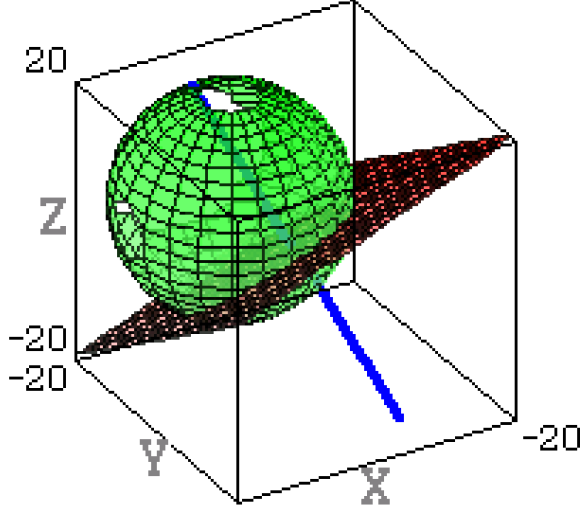
$$\overline{OC} = \sqrt{38 \frac{25}{4}} = \frac{5\sqrt{38}}{2}$$

L'equació de l'esfera es:

$$E \equiv (x - 5)^2 + \left(y + \frac{15}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{25}{2}\right)^2 = \left(\frac{5\sqrt{38}}{2}\right)^2$$

Obrim el *Menú Gráfico 3D*

Definim i representem la recta  $r$ , el plànel  $\pi$  i l'esfera  $E$ .

<div style="border: 1px solid black; padding: 2px;"> <span style="float: right;">Math Deg Norm1 d/c   a+bi</span> <p>Punto de paso (Xo, Yo, Zo) Vector dirección [a, b, c]</p> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="text-align: center;">Xo</td> <td style="text-align: center;">Yo</td> <td style="text-align: center;">Zo</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">[ 0</td> <td style="text-align: center;">0</td> <td style="text-align: center;">0 ]</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">a</td> <td style="text-align: center;">b</td> <td style="text-align: center;">c</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">[ 2</td> <td style="text-align: center;">-3</td> <td style="text-align: center;">5 ]</td> </tr> </table> <p style="text-align: right; margin-right: 20px;">5</p> <p>EXPRESS VECTOR P&amp;V POINTS EDIT SET</p> </div>	Xo	Yo	Zo	[ 0	0	0 ]	a	b	c	[ 2	-3	5 ]	<div style="border: 1px solid black; padding: 2px;"> <span style="float: right;">Math Deg Norm1 d/c   a+bi</span> <p>aX+bY+cZ+d=0</p> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="text-align: center;">a</td> <td style="text-align: center;">b</td> <td style="text-align: center;">c</td> <td style="text-align: center;">d</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">[ 2</td> <td style="text-align: center;">-3</td> <td style="text-align: center;">5</td> <td style="text-align: center;">-5 ]</td> </tr> </table> <p style="text-align: right; margin-right: 20px;">-5</p> <p>EXPRESS VECTOR POINTS EDIT SET</p> </div>	a	b	c	d	[ 2	-3	5	-5 ]
Xo	Yo	Zo																			
[ 0	0	0 ]																			
a	b	c																			
[ 2	-3	5 ]																			
a	b	c	d																		
[ 2	-3	5	-5 ]																		
<div style="border: 1px solid black; padding: 2px;"> <span style="float: right;">Math Deg Norm1 d/c   a+bi</span> <p>(X-a)²+(Y-b)²+(Z-c)²=r²</p> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="text-align: center;">a</td> <td style="text-align: center;">b</td> <td style="text-align: center;">c</td> <td style="text-align: center;">r</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">[ 5</td> <td style="text-align: center;">-7.5</td> <td style="text-align: center;">5</td> <td style="text-align: center;">15.411 ]</td> </tr> </table> <p style="text-align: right; margin-right: 20px;">15.41103501</p> <p>FACTOR EXPAND EDIT SET</p> </div>		a	b	c	r	[ 5	-7.5	5	15.411 ]												
a	b	c	r																		
[ 5	-7.5	5	15.411 ]																		
<div style="border: 1px solid black; padding: 2px;"> <span style="float: right;">Math Deg Norm1 d/c   a+bi</span>  </div>																					

**Problema 37**

Determineu l'equació de l'esfera que passa pel punt  $P(4, -1, -1)$  i és tangents als tres plans coordenats.

Solució:

El punt  $P$  pertany a l'octant de l'espai  $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \leq 0 \\ z \leq 0 \end{cases}$

El centre  $O$  de l'esfera equidista dels tres plans coordenats aleshores les seues coordenades són:

$$O(a, -a, -a), \quad a > 0$$

El radi de l'esfera és  $r = a$

$$d(O, P) = a$$

Aleshores:

$$(4 - a)^2 + (1 + a)^2 + (1 - a)^2 = a^2$$

Simplificant:

$$a^2 - 6a + 9 = 0.$$

Resolent l'equació:

$$a = 3$$

El centre és:

$$O(3, -3, 3)$$

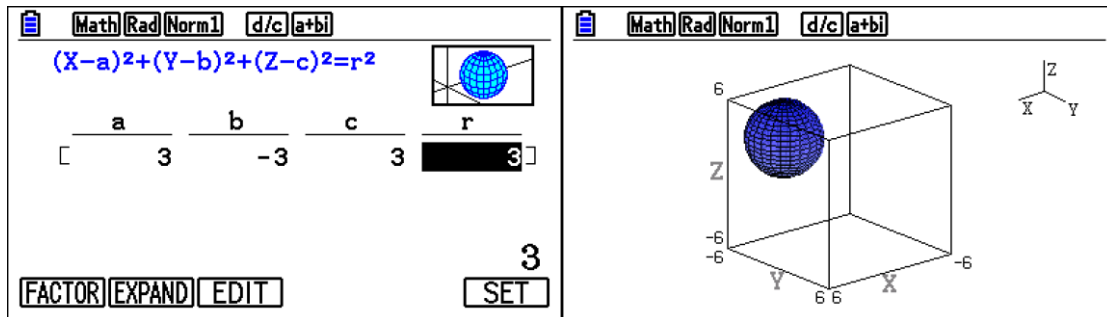
El radi és:  $r = 3$

L'equació de l'esfera és:

$$(x - 3)^2 + (y + 3)^2 + (z + 3)^2 = 3^2$$

Obrim el *Menú Gràfico 3D*.

Definim i representem l'esfera:



**Problema 38**

Donats el punt  $P(1, 2, -1)$  i el plànel  $\pi \equiv x + 2y - 2z + 2 = 0$ , siga  $S$  l'esfera que és tangent al plànel  $\pi$  en un punt  $P'$  de forma que el segment  $\overline{PP'}$  és un dels seus diàmetres.

Es demana.

Determinar les coordenades del punt de tangència  $P'$

Determinar l'equació de l'esfera  $S$

Solució:

Per ser  $\overline{PP'}$  diàmetre el centre  $O$  és el punt mig.

Per ser  $P'$  punt de tangència  $\overline{OP'}$  és perpendicular al plànel  $\pi$ .

Aleshores, la recta  $PP'$  és perpendicular al plànel  $\pi$

$P'$  és el punt projecció de  $P$  sobre el plànel  $\pi$ .

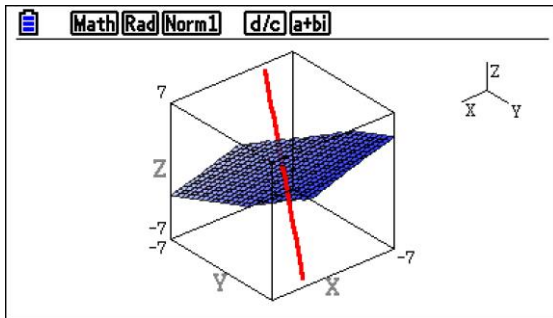
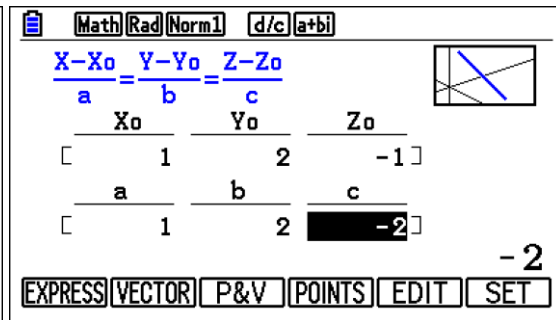
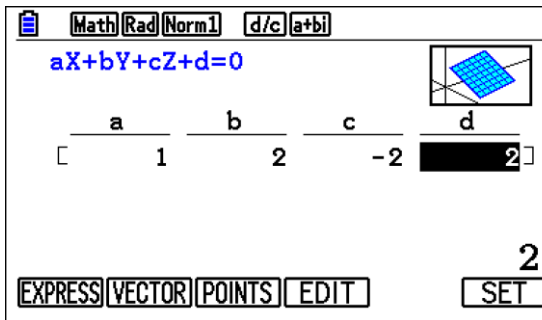
El vector director de la recta és el característic del plànel  $a = (1, 2, -2)$

La seua equació és:

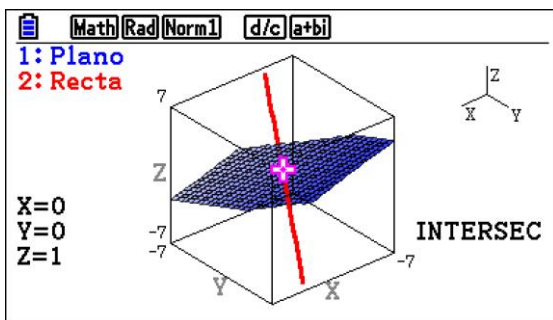
$$PP' \equiv (x, y, z) = (1, 2, -1) + \beta(1, 2, -2)$$

Obrim el *Menú Gráfico 3D*.

Definim i representem el plànel  $\pi$  i la recta  $PP'$



El punt projecció és la intersecció de la recta i el plànel.  
Amb la funció *G-Solv*, determinem el punt intersecció.





Les coordenades del punt projecció són  $P'(0, 0, 1)$

El centre  $O$  de l'esfera és el punt mig del segment  $\overline{PP'}$

Les seues coordenades són:

$$O\left(\frac{1}{2}, 1, 0\right)$$

El diàmetre de l'esfera és:

$$\overline{PP'} = \sqrt{(0 - 1)^2 + (0 - 2)^2 + (1 + 1)^2} = 3$$

El radi és:

$$r = \frac{3}{2}$$

L'equació de l'esfera és:

$$S \equiv \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

Definim i representem l'esfera:

**Problema 39**

Determineu l'equació de l'esfera que passa pels punts  $A(4, 2, -3)$ ,  $B(-1, 3, 1)$  i té el centre en la recta que passa pels punts  $C(2, 3, 7)$ ,  $D(1, 5, 9)$ .

Solució:

El plànel medidor del segment  $\overline{AB}$  passa pel punt mig  $M$  del segment i té vector característic el vector  $\overline{AB}$ .

Les coordenades del punt mig  $M$  són:

$$M\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, -1\right)$$

El vector característic té components:

$$\overline{AB} = (-5, 1, 4)$$

L'equació del plànel medidor és:

$$\pi \equiv -5\left(x - \frac{3}{2}\right) + \left(y - \frac{5}{2}\right) + 4(z + 1) = 0$$

Simplificant:

$$\pi \equiv -5x + y + 4z + 9 = 0$$

La recta que passa pels punts  $C, D$  té vector director:

$$\overline{CD} = (-1, 2, 2)$$

La seua equació és:

$$r_{CD} \equiv (x, y, z) = (2, 3, 7) + \alpha(-1, 2, 2)$$

El centre de l'esfera és la intersecció del plànel medidor i la recta.

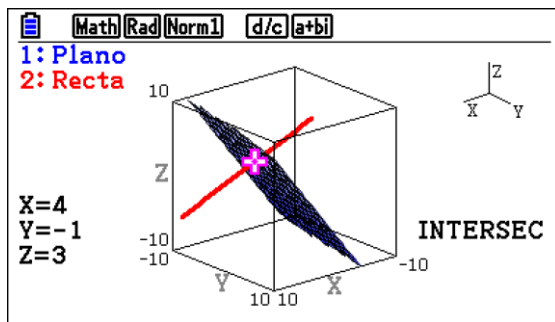
Obrim el *Menú Gráfico 3D*.

Definim i representem el plànel i la recta.

The image displays three screenshots from a 3D calculator interface:

- Top-left:** The "Plane" editor window. It shows the equation  $aX+bY+cZ+d=0$  with input fields for  $a$  (-5),  $b$  (1),  $c$  (4), and  $d$  (9). The "SET" button is highlighted.
- Top-right:** The "Line" editor window titled "Recta pasa por 2 puntos". It shows two points: P1 (2, 3, 7) and P2 (1, 5, 9). The "SET" button is highlighted.
- Bottom-left:** A 3D plot showing the plane and the line in a coordinate system. The axes are labeled X, Y, and Z, with tick marks at -10 and 10. The plane is a shaded blue surface, and the line is a red line passing through the plane.

Amb la funció G-SolV, determinem la intersecció del plànol i la recta.



El centre de l'esfera té coordenades:

$$O(4, -1, 3)$$

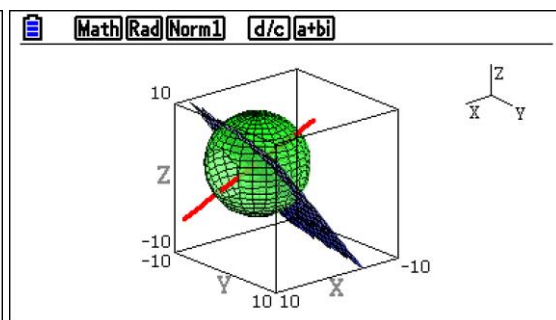
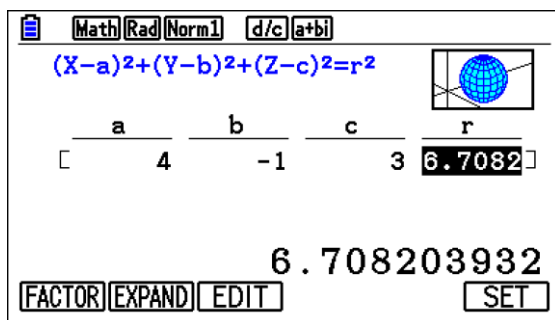
El radi de l'esfera és:

$$r = d(O, A) = \sqrt{0^2 + 3^2 + 6^2} = 3\sqrt{5}$$

L'equació de l'esfera té equació:

$$E \equiv (x - 4)^2 + (y + 1)^2 + (z - 3)^2 = (3\sqrt{5})^2$$

Definim i representem l'esfera:



**Problema 40**

Siguen l'esfera  $E \equiv x^2 + y^2 + z^2 = 9$  i els punts  $A(3, 0, 6), B(3, 5, 1)$ .

Determineu els plànols tangents a l'esfera  $E$  que contenen els punts  $A, B$ .

Solució:

L'esfera  $E \equiv x^2 + y^2 + z^2 = 9$  té centre l'origen de coordenades  $O(0, 0, 0)$  i radi  $r = 3$ .

$$\overline{AB} = (0, 5, -5)$$

L'equació de la recta que passa pels punts  $A, B$  té equació:

$$r_{AB} \equiv (x, y, z) = (3, 0, 6) + \alpha(0, 1, -1)$$

L'equació implícita és:

$$r_{AB} \equiv \begin{cases} x - 3 = 0 \\ y + z - 6 = 0 \end{cases}$$

El feix de plànols que conté la recta  $r_{AB}$  és:

$$\pi_\mu \equiv (x - 3) + \mu(y + z - 6) = 0$$

$$\pi_\mu \equiv x + \mu y + \mu z - 3 - 6\mu = 0$$

El plànel  $\pi_\mu$  ha de ser tangent a l'esfera aleshores:

$$d(O, \pi_\mu) = r = 3$$

$$\left| \frac{-3 - 3\mu}{\sqrt{1 + \mu^2 + \mu^2}} \right| = 3$$

Simplificant:

$$|1 + \mu| = \sqrt{1 + 2\mu^2}$$

Elevant al quadrat i simplificant:

$$2\mu^2 + 4\mu = 0$$

Resolent l'equació:

$$\mu = 0, -2$$

Els plànols que cerquem són:

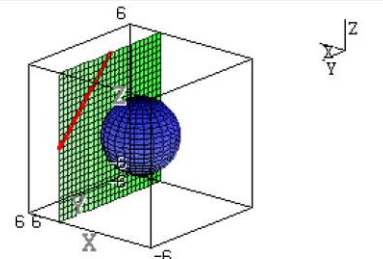
$$\pi_0 \equiv x - 3 = 0$$

$$\pi_{-2} \equiv x - 2y - 2z + 9 = 0$$

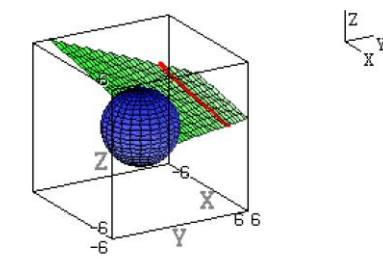
Obrim el *Menú Gráfico 3D*.

Definim i representem l'esfera  $E$ , la recta  $r_{AB}$  i el plànel  $\pi_0$

The image shows two screenshots of a 3D graphics menu interface. The left screenshot displays the sphere equation  $(X-a)^2 + (Y-b)^2 + (Z-c)^2 = r^2$  with parameters  $a=0$ ,  $b=0$ ,  $c=0$ , and  $r=3$ . The right screenshot displays the line passing through two points  $P1(3, 0, 6)$  and  $P2(3, 5, 1)$ . Both screenshots include a toolbar with options like Math, Rad, Norm1, d/c, a+bi, and buttons for FACTOR, EXPAND, EDIT, SET, EXPRESS, VECTOR, P&V, POINTS, and EDIT.

<div style="border-bottom: 1px solid black; display: flex; justify-content: space-between; font-size: 0.8em;"> <span>Math Rad Norm1 d/c a+bi</span> </div> <p style="margin-top: 5px;"><math>aX+bY+cZ+d=0</math></p> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse; margin-top: 5px;"> <tr> <td style="text-align: center; border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;"><math>a</math></td> <td style="text-align: center; border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;"><math>b</math></td> <td style="text-align: center; border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;"><math>c</math></td> <td style="text-align: center; padding: 2px 10px;"><math>d</math></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center; border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">1</td> <td style="text-align: center; border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">0</td> <td style="text-align: center; border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">0</td> <td style="text-align: center; padding: 2px 10px;">-3</td> </tr> </table> <div style="text-align: right; margin-top: 10px; font-size: 1.2em;">-3</div> <div style="display: flex; justify-content: space-between; margin-top: 5px;"> <span>EXPRESS VECTOR POINTS EDIT</span> <span>SET</span> </div>	$a$	$b$	$c$	$d$	1	0	0	-3	<div style="border-bottom: 1px solid black; display: flex; justify-content: space-between; font-size: 0.8em;"> <span>Math Rad Norm1 d/c a+bi</span> </div> 
$a$	$b$	$c$	$d$						
1	0	0	-3						

Definim i representem l'esfera  $E$ , la recta  $r_{AB}$  i el plànoi  $\pi_{-2}$

<div style="border-bottom: 1px solid black; display: flex; justify-content: space-between; font-size: 0.8em;"> <span>Math Rad Norm1 d/c a+bi</span> </div> <p style="margin-top: 5px;"><math>aX+bY+cZ+d=0</math></p> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse; margin-top: 5px;"> <tr> <td style="text-align: center; border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;"><math>a</math></td> <td style="text-align: center; border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;"><math>b</math></td> <td style="text-align: center; border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;"><math>c</math></td> <td style="text-align: center; padding: 2px 10px;"><math>d</math></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center; border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">1</td> <td style="text-align: center; border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">-2</td> <td style="text-align: center; border-right: 1px solid black; padding: 2px 10px;">-2</td> <td style="text-align: center; padding: 2px 10px;">9</td> </tr> </table> <div style="text-align: right; margin-top: 10px; font-size: 1.2em;">9</div> <div style="display: flex; justify-content: space-between; margin-top: 5px;"> <span>EXPRESS VECTOR POINTS EDIT</span> <span>SET</span> </div>	$a$	$b$	$c$	$d$	1	-2	-2	9	<div style="border-bottom: 1px solid black; display: flex; justify-content: space-between; font-size: 0.8em;"> <span>Math Rad Norm1 d/c a+bi</span> </div> 
$a$	$b$	$c$	$d$						
1	-2	-2	9						

**Problema 41**

Determineu l'esfera de centre  $A(6, 3, -4)$  i tangent a l'eix  $O_x$

Solució:

La projecció del punt  $A(6, 3, 4)$  sobre l'eix  $O_x \equiv \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$  és:

$A'(6, 0, 0)$

El radi de l'esfera és:

$$r = \overline{AA'} = \sqrt{0^2 + 3^2 + (-4)^2} = 5$$

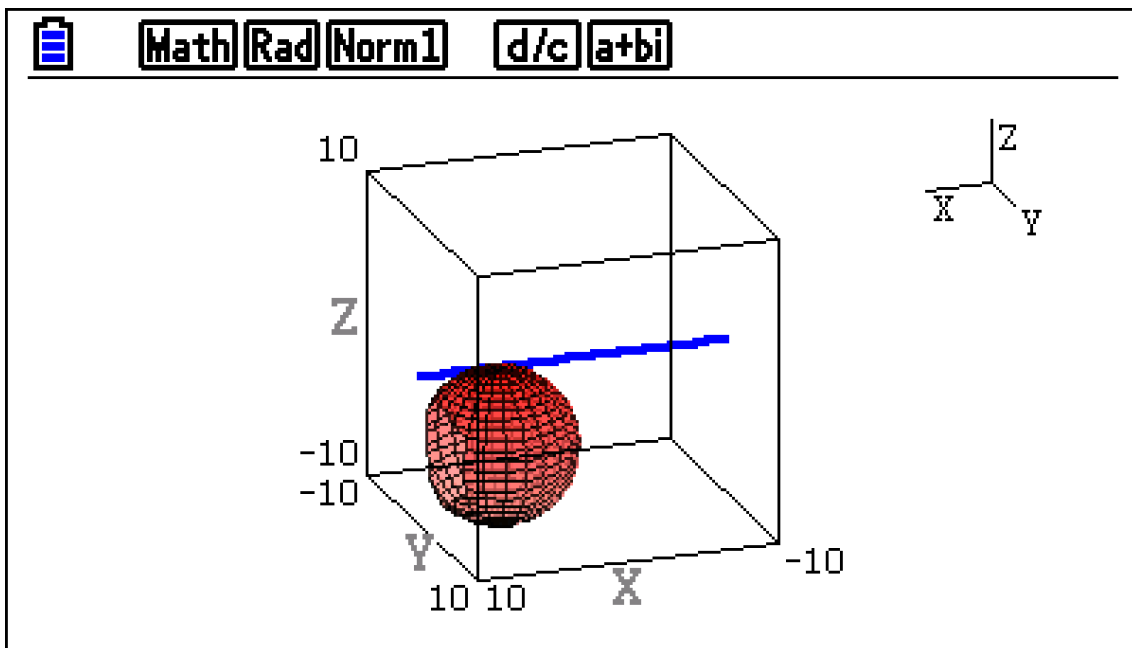
L'equació de l'esfera és:

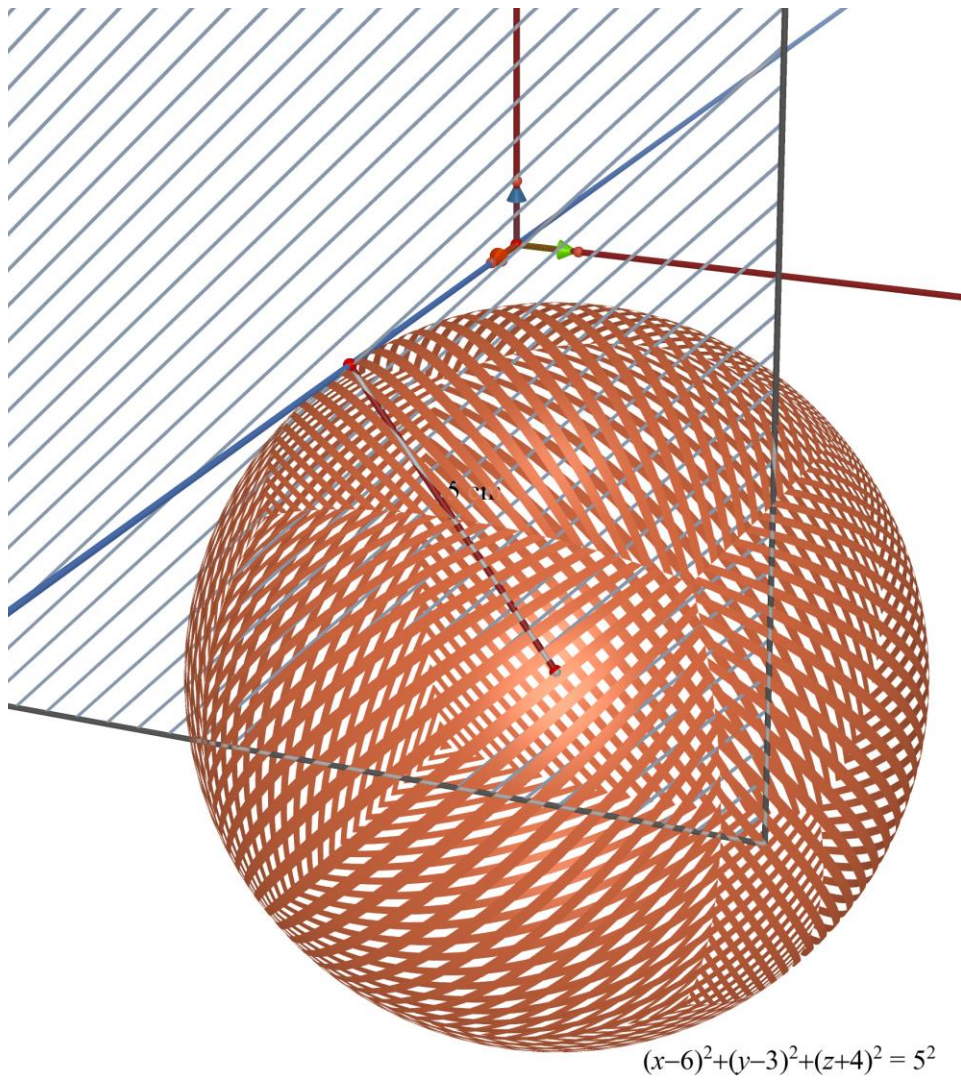
$$E \equiv (x - 6)^2 + (y - 3)^2 + (z + 4)^2 = 5^2$$

Obrim el *Menú Gráfico 3D*.

Definim i Representem l'esfera i l'eix  $O_x$

<div style="border-bottom: 1px solid black; margin-bottom: 5px;"> <span style="font-size: small;">Math Rad Norm1 d/c a+bi</span> </div> <p style="font-size: small; margin: 0;">Punto de paso (Xo, Yo, Zo) Vector dirección [a, b, c]</p> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse; margin: 5px 0;"> <tr> <td style="width: 33%; text-align: center; border-bottom: 1px solid black;">Xo</td> <td style="width: 33%; text-align: center; border-bottom: 1px solid black;">Yo</td> <td style="width: 33%; text-align: center; border-bottom: 1px solid black;">Zo</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">[ 0</td> <td style="text-align: center;">0</td> <td style="text-align: center;">0 ]</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center; border-bottom: 1px solid black;">a</td> <td style="text-align: center; border-bottom: 1px solid black;">b</td> <td style="text-align: center; border-bottom: 1px solid black;">c</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">[ 1</td> <td style="text-align: center;">0</td> <td style="text-align: center;">0 ]</td> </tr> </table> <p style="text-align: right; margin: 5px 0;">0</p> <div style="border-top: 1px solid black; margin-top: 5px;"> <span style="font-size: x-small; border: 1px solid black; padding: 1px;">EXPRESS</span> <span style="font-size: x-small; border: 1px solid black; padding: 1px;">VECTOR</span> <span style="font-size: x-small; border: 1px solid black; padding: 1px;">P&amp;V</span> <span style="font-size: x-small; border: 1px solid black; padding: 1px;">POINTS</span> <span style="font-size: x-small; border: 1px solid black; padding: 1px;">EDIT</span> <span style="font-size: x-small; border: 1px solid black; padding: 1px;">SET</span> </div>	Xo	Yo	Zo	[ 0	0	0 ]	a	b	c	[ 1	0	0 ]	<div style="border-bottom: 1px solid black; margin-bottom: 5px;"> <span style="font-size: small;">Math Rad Norm1 d/c a+bi</span> </div> <p style="font-size: small; margin: 0;"><math>(X-a)^2+(Y-b)^2+(Z-c)^2=r^2</math></p> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse; margin: 5px 0;"> <tr> <td style="width: 25%; text-align: center; border-bottom: 1px solid black;">a</td> <td style="width: 25%; text-align: center; border-bottom: 1px solid black;">b</td> <td style="width: 25%; text-align: center; border-bottom: 1px solid black;">c</td> <td style="width: 25%; text-align: center; border-bottom: 1px solid black;">r</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">[ 6</td> <td style="text-align: center;">3</td> <td style="text-align: center;">-4</td> <td style="text-align: center;">5 ]</td> </tr> </table> <p style="text-align: right; margin: 5px 0;">5</p> <div style="border-top: 1px solid black; margin-top: 5px;"> <span style="font-size: x-small; border: 1px solid black; padding: 1px;">FACTOR</span> <span style="font-size: x-small; border: 1px solid black; padding: 1px;">EXPAND</span> <span style="font-size: x-small; border: 1px solid black; padding: 1px;">EDIT</span> <span style="font-size: x-small; border: 1px solid black; padding: 1px;">SET</span> </div>	a	b	c	r	[ 6	3	-4	5 ]
Xo	Yo	Zo																			
[ 0	0	0 ]																			
a	b	c																			
[ 1	0	0 ]																			
a	b	c	r																		
[ 6	3	-4	5 ]																		





**Problema 42**

Donats els punts  $A(2, 0, -1), B(-2, 2, 1)$ , proveu que el lloc geomètric dels punts  $P$  de l'espai que compleixen  $\overline{PA} = \sqrt{2} \cdot \overline{PB}$  és una esfera  $E$ .

- d) Escriviu l'equació reduïda de l'esfera  $E$ .
- e) Proveu que el punt  $T(-10, 8, 7)$  pertany a l'esfera  $E$ .
- f) Determineu l'equació del pla tangent a l'esfera  $E$  en el punt  $T$ .

Solució:

Siga  $P(x, y, z)$  de l'espai que compleix  $\overline{PA} = \sqrt{2} \cdot \overline{PB}$ .

$$\sqrt{(x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2} = \sqrt{2} \sqrt{(x+2)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2}$$

Elevant al quadrat i simplificant:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 12x - 8y - 6z + 13 = 0$$

L'equació és una esfera.

a)

Completant quadrats:

$$E \equiv (x+6)^2 + (y-4)^2 + (z-3)^2 = -13 + 36 + 16 + 9$$

$$E \equiv (x+6)^2 + (y-4)^2 + (z-3)^2 = 48$$

El centre de l'esfera és  $O(-6, 4, 3)$  i el radi  $r = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$

b)

Provem que el punt  $T(-10, 8, 7)$  satisfà l'equació de l'esfera.

$$(-10+6)^2 + (8-4)^2 + (7-3)^2 = 16 + 16 + 16 = 48$$

c)

$$\overrightarrow{OT} = (-4, 4, 4)$$

El vector característic del pla tangent a l'esfera és  $a = (-1, 1, 1)$

L'equació del pla tangent a l'esfera  $E$  en el punt  $T(-10, 8, 7)$  és:

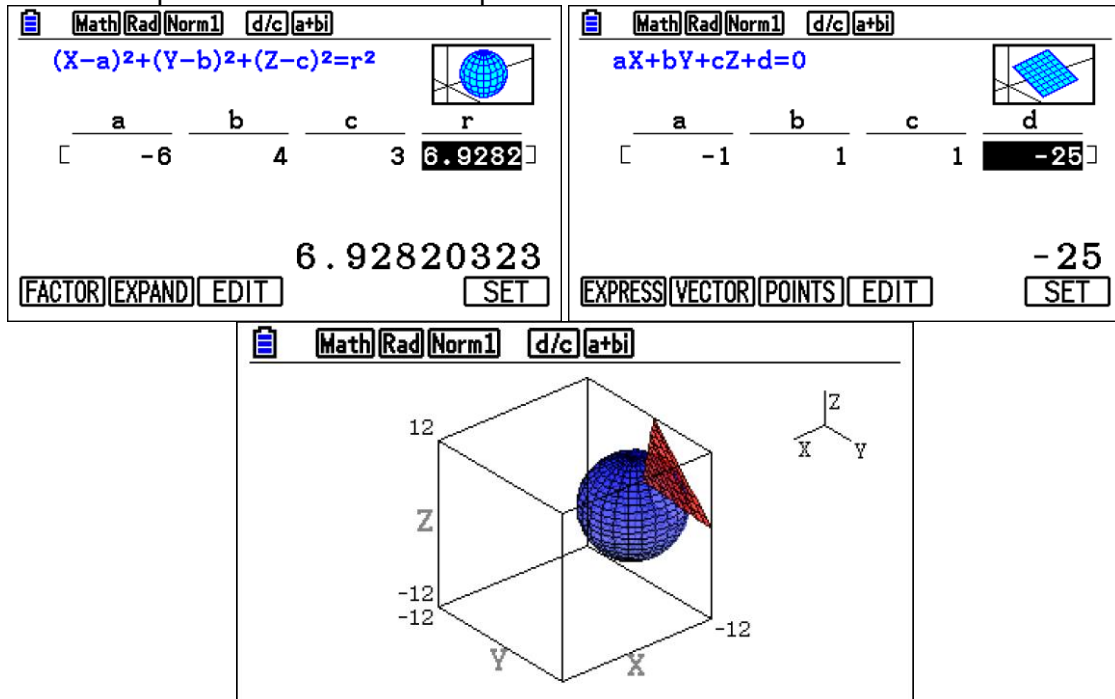
$$-(x+10) + 1(y-8) + 1(z-7) = 0$$

Simplificant:

$$\pi \equiv -x + y + z - 25 = 0$$

Obrim el *Menú Gráfico 3D*

Definim i representem l'esfera  $E$  i el pla  $\pi$





**Problema 43**

Determineu l'equació de l'esfera de centre en el plànel  $z = 4$  tangent al plànel  $O_{xy}$  en el punt  $T(2, 3, 0)$

Solució:

El plànel  $O_{xy}$  té equació:

$$z = 0$$

Els plànols  $O_{xy}$   $z = 4$  són paral·lels.

El radi de l'esfera és igual a la distància entre els dos plànols que és  $r = 4$

El centre de l'esfera és igual a la projecció del punt  $T(2, 3, 0)$  sobre el plànel  $z = 4$ .

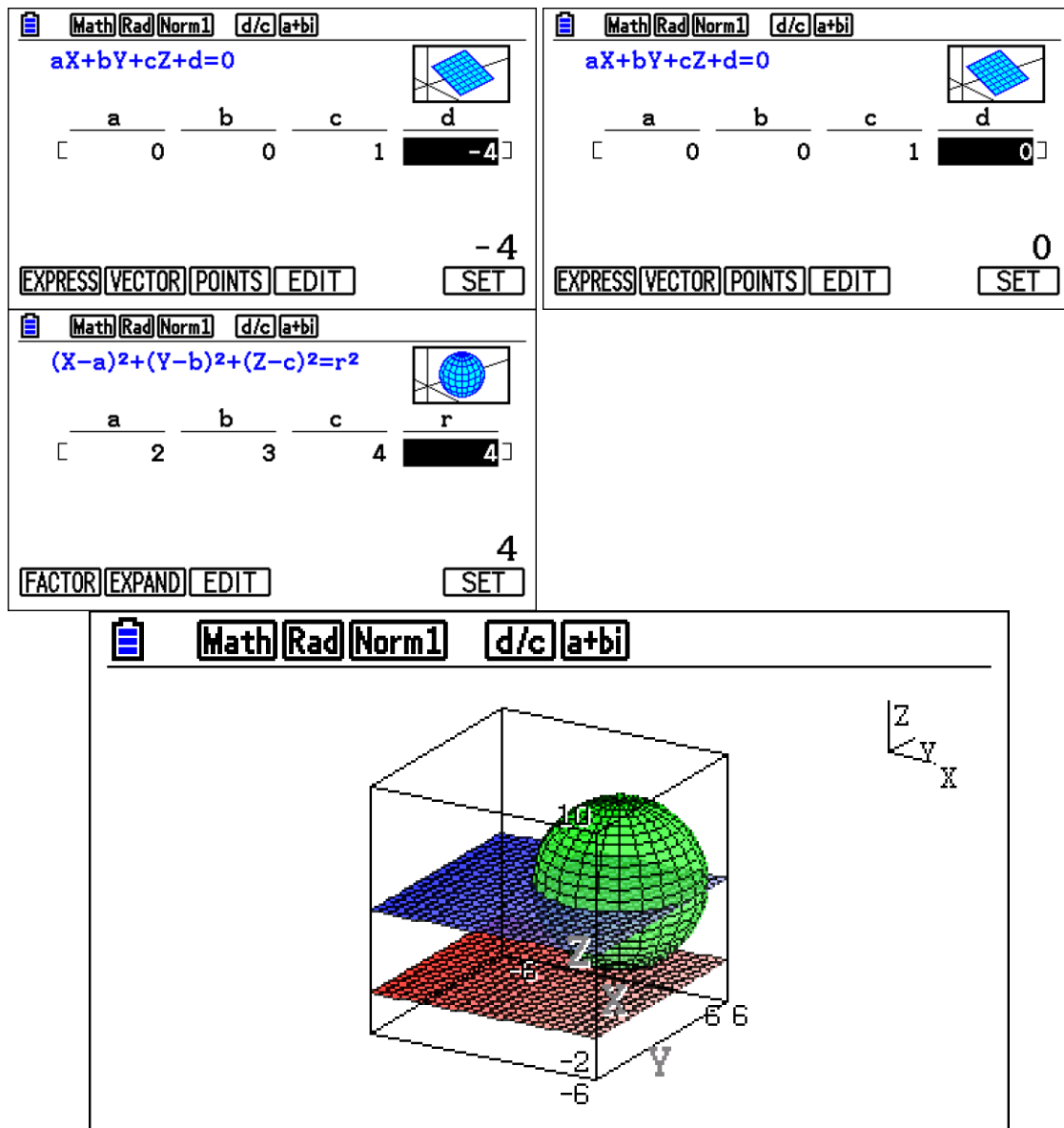
El punt projecció té coordenades  $O(2, 3, 4)$

L'equació de l'esfera és:

$$E \equiv (x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z - 4)^2 = 4^2$$

Obrim el Menú *Gráfico 3D*.

Definim i representem els dos plànel i l'esfera.



**Problema 44**

Determineu l'equació de l'esfera que té el centre en el plànel  $\pi_1 \equiv 2x + 2y - z + 2 = 0$  i és tangent al plànel  $\pi_2 \equiv 2x + 2y - z - 4 = 0$  en el punt  $T(3, 0, 2)$

Solució:

Els dos plànols són paral·lels.

El radi de l'esfera és igual a la distància del punt  $T(3, 0, 2)$  al plànel

$$\pi_1 \equiv 2x + 2y - z + 2 = 0$$

$$r = \left| \frac{2 \cdot 3 + 2 \cdot 0 - 2 + 2}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} \right| = 2$$

El centre és igual a la intersecció de la recta perpendicular al plànel

$$\pi_2 \equiv 2x + 2y - z - 4 = 0 \text{ que passa pel punt de tangència } T(3, 0, 2)$$

El vector característic del plànel  $\pi_2 \equiv 2x + 2y - z - 4 = 0$  és  $v = (2, 2, -1)$

La recta perpendicular té equació:

$$r \equiv (x, y, z) = (3, 0, 2) + \alpha(2, 2, -1)$$

Obrim el *Menú Gráfico 3D*.

Definim i representem el plànel  $\pi_1$  i la recta  $r$

Amb la funció G-Solv, determinem la intersecció.

El centre de l'esfera és  $O\left(\frac{5}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right)$

L'equació de l'esfera és:

$$E \equiv \left(x - \frac{5}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{4}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{8}{3}\right)^2 = 2^2$$

Definim i representem l'esfera.

The image shows a TI-84 Plus calculator interface. The top screen displays the equation of a sphere:  $(X-a)^2 + (Y-b)^2 + (Z-c)^2 = r^2$ . Below the equation, the parameters are set:  $a = 1.6666$ ,  $b = -1.333$ ,  $c = 2.6666$ , and  $r = 2$ . The bottom screen shows a 3D plot of the sphere in a coordinate system with X, Y, and Z axes. The sphere is green and centered at approximately (1.67, -1.33, 2.67) with a radius of 2. The axes are labeled with values from -5 to 5. A small 3D coordinate system icon is visible in the top right corner of the plot area.

**Problema 45**

Determineu l'equació de l'esfera que té el centre en el plànel  $\pi_1 \equiv x + y + z = 0$  i és tangent al plànel  $\pi_2 \equiv 2x - y + 2z - 3 = 0$  en el punt  $T(3, 1, -1)$

Solució:

El centre s'obté a la intersecció de la recta perpendicular al plànel  $\pi_2 \equiv 2x - y + 2z + 3 = 0$  que passa pel punt de tangència  $T(3, 0, 2)$  i el plànel  $\pi_1 \equiv x + y + z = 0$

El vector característic del plànel  $\pi_2 \equiv 2x - y + 2z - 3 = 0$  és  $v = (2, -1, 2)$

La recta perpendicular té equació:

$$r \equiv (x, y, z) = (3, 1, -1) + \alpha(2, -1, 2)$$

Obrim el *Menú Gráfico 3D*.

Definim i representem el plànel  $\pi_1$  i la recta  $r$

Amb la funció *G-Solv*, determinem la intersecció.

El centre de l'esfera té coordenades:

$$O(1, 2, -3)$$

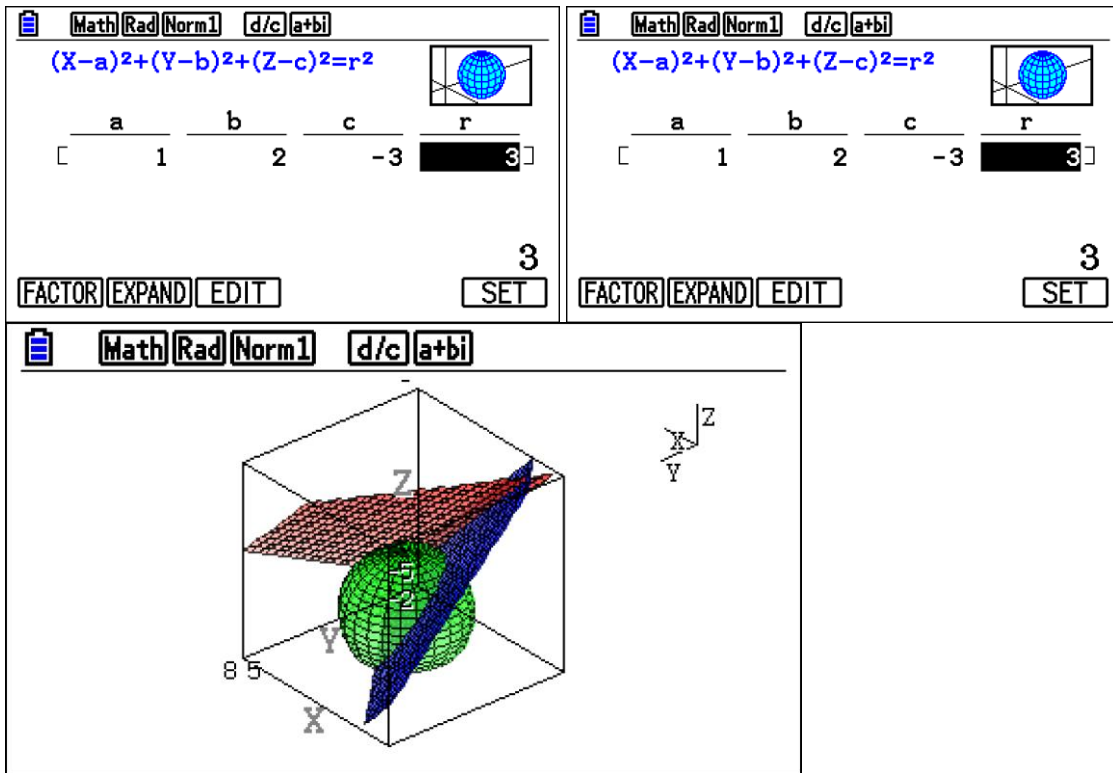
El radi de l'esfera és igual a la distància del centre  $O$  al punt de tangència  $T$ .

$$R = \sqrt{(3-1)^2 + (1-2)^2 + (-1+3)^2} = 3$$

L'equació de l'esfera és:

$$E \equiv (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 3)^2 = 3^2$$

Definim i representem l'esfera i el plànel  $\pi_2 \equiv 2x - y + 2z - 3 = 0$



**Problema 46**

Determineu l'equació de l'esfera de radi 2 que té el centre en l'eix  $O_y$  que és tangent a l'esfera  $E \equiv (x - 4)^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2 = 9$ .  
Determineu el punt de tangència.

Solució:

El centre de l'esfera que cerquem té centre:  
 $C(0, a, 0)$

L'esfera  $E \equiv (x - 4)^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2 = 9$  té centre  $O(4, 1, 3)$  i radi  $R = 3$   
Con les dues esferes són tangents la distància entre és centres és igual a la suma dels dos radis:

$$\overline{OC} = 3 + 2 = 5$$

$$\sqrt{4^2 + (a - 1)^2 + 3^2} = 5$$

Elevant al quadrat:

$$a = 1$$

L'esfera que cerquem té centre  $(0, 1, 0)$  i radi 2.

El punt  $T$  de tangència es troba en el segment  $\overline{CO}$  i el divideix en dos parts que estan en proporció 2:3, des de  $C$ .

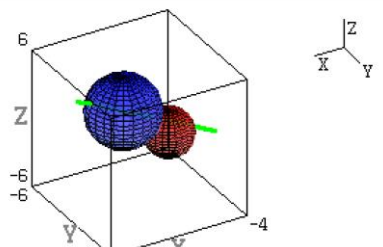
Siga  $T(x, y, z)$

$$\frac{3}{2}(x - 0, y - 1, z - 0) = (4 - 0, 1 - 1, 3 - 0)$$

Aleshores,  $T\left(\frac{8}{3}, 0, 2\right)$

Obrim el *Menú Gráfico 3D*

Definim i representem les dues esferes i la recta que passa pels centres.

<p>Math Rad Norm1 d/c  a+bi</p> <p><math>(X-a)^2+(Y-b)^2+(Z-c)^2=r^2</math></p> <p>a      b      c      r</p> <p>[      4      1      3      3 ]</p> <p>3</p> <p>FACTOR EXPAND EDIT SET</p>	<p>Math Rad Norm1 d/c  a+bi</p> <p><math>(X-a)^2+(Y-b)^2+(Z-c)^2=r^2</math></p> <p>a      b      c      r</p> <p>[      0      1      0      2 ]</p> <p>2</p> <p>FACTOR EXPAND EDIT SET</p>
<p>Math Rad Norm1 d/c  a+bi</p> <p>Recta pasa por 2 puntos</p> <p>X      Y      Z</p> <p>P1 [      4      1      3 ]</p> <p>P2 [      0      1      1 ]</p> <p>1</p> <p>EXPRESS VECTOR P&amp;V POINTS EDIT SET</p>	

**Problema 47**

Determineu l'equació de l'esfera de centre  $C(6, 3, -4)$  tangent a l'eix  $O_x$

Solució:

L'eix  $O_x$  té equació vectorial:

$$O_x \equiv (x, y, z) = (0, 0, 0) + \alpha(1, 0, 0)$$

Siga  $O(0, 0, 0)$ ,  $v = (1, 0, 0)$

El radi de l'esfera és igual a la distància del centre  $C(6, 3, -4)$  a l'eix  $O_x$

$$r = d(C, O_x) = \frac{\|v \times \overrightarrow{OC}\|}{\|v\|}$$

Obrim el *Menú Ejec-Mat*.

Definim els vectors  $v$ ,  $\overrightarrow{OC} = (6, 3, -4)$ .

Calculator screen A: Vector v = (1, 0, 0). The screen shows a 1x3 matrix with values 1, 0, 0. The result is 0.

Calculator screen B: Vector OC = (6, 3, -4). The screen shows a 1x3 matrix with values 6, 3, -4. The result is -4.

Calculem  $v \times \overrightarrow{OC}$ ,  $\|v \times \overrightarrow{OC}\|$

Calculator screen: CrossP(Vct A, Vct B) = [0 4 3]. Norm(Vct Ans) = 5.

El radi de l'esfera és:

$$r = \frac{\|v \times \overrightarrow{OC}\|}{\|v\|} = \frac{5}{1} = 5$$

L'equació de l'esfera és:

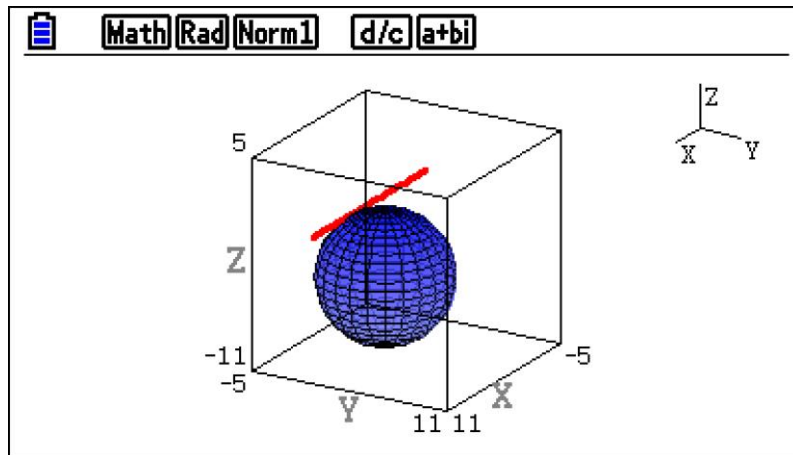
$$E \equiv (x - 6)^2 + (y - 3)^2 + (z + 4)^2 = 5^2$$

Obrim el *Menú Gráfico 3D*.

Definim i representem l'esfera i l'eix  $O_x$

Calculator screen: Sphere equation  $(X-a)^2 + (Y-b)^2 + (Z-c)^2 = r^2$ . Parameters: a=6, b=3, c=-4, r=5. Result: 5.

Calculator screen: 3D plot settings. Punto de paso (Xo, Yo, Zo) = (0, 0, 0). Vector dirección [a, b, c] = (1, 0, 0). Result: 0.





**Problema 48**

Determineu el lloc geomètric dels punts de l'espai que la suma dels quadrats de les distàncies als punts  $A(-2, 2, 4)$ ,  $B(0, 0, -4)$  és 80.  
Determineu els seus elements.

Solució:

Siga  $P(x, y, z)$

$$AP^2 + BP^2 = 80$$

$$(x + 2)^2 + (y - 2)^2 + (z - 4)^2 + x^2 + y^2 + (z + 4)^2 = 80$$

$$2x^2 + 4x + 4 + 2y^2 - 4y + 4 + 2z^2 + 32 = 80$$

Simplificant:

$$x^2 + 2x + y^2 - 2y + z^2 = 20$$

Completant quadrats.

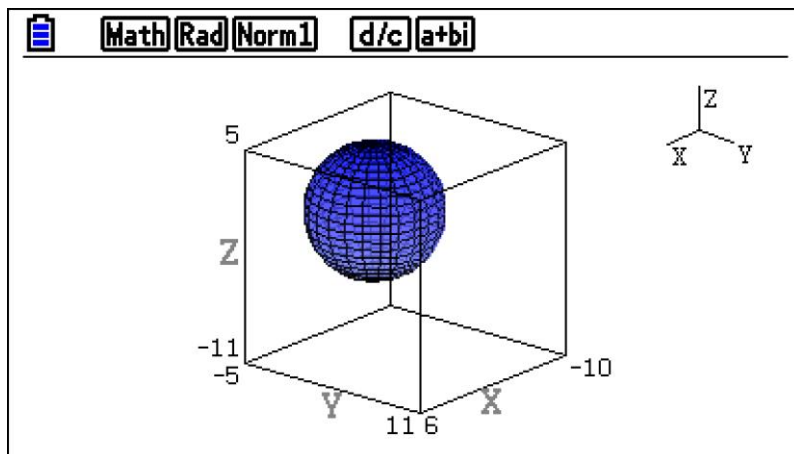
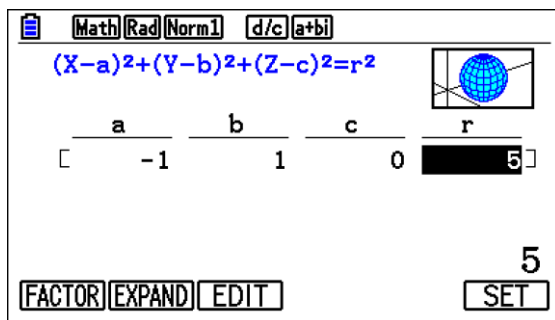
$$(x + 1)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 5^2$$

El lloc geomètric és una esfera de centre:

$O(-1, 1, 0)$  i radi  $r = 5$

Obrim el *Menú Gráfico 3D*.

Definim i representem l'esfera.



**Problema 49**

Determineu la recta perpendicular al plànel  $\pi \equiv x - y - 2 = 0$  i siga un diàmetre de l'esfera  $E \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y = 0$   
Calculeu els extrems del diàmetre.

Solució:

Completant quadrats determinem el centre i el radi de l'esfera

$$E \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y = 0$$

$$E \equiv (x + 1)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 2$$

El centre és el punt  $O(-1, 1, 0)$  i el radi és  $R = \sqrt{2}$

La recta perpendicular al plànel  $\pi \equiv x - y - 2 = 0$  que és diàmetre de l'esfera, té vector director el característic del plànel  $v = (1, -1, 0)$  i passa pel centre de l'esfera  $O(-1, 1, 0)$

La seua equació és:

$$r \equiv (x, y, z) = (-1, 1, 0) + \alpha(1, -1, 0)$$

Els extrems del diàmetre es calculen efectuant la intersecció de la recta  $r$  i l'esfera  $E$ :

$$\begin{cases} (x, y, z) = (-1 + \alpha, -1\alpha, 0) \\ (x + 1)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 2 \\ \alpha^2 + \alpha^2 = 2 \end{cases}$$

Resolent l'equació:

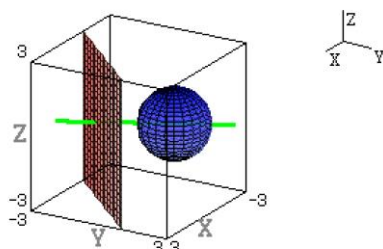
$$\alpha = 1, -1$$

Els punts extrems del diàmetre són:

$$A(0, 0, 0), B(-2, 2, 0)$$

Definim i representem l'esfera, la recta i el plànel.

<p>Math Deg Norm1 d/c  a+bi</p> <p><math>(X-a)^2+(Y-b)^2+(Z-c)^2=r^2</math></p> <p><math>\frac{a}{-1} \quad \frac{b}{1} \quad \frac{c}{0} \quad \frac{r}{1.4142}</math></p> <p>1.414213562</p> <p>FACTOR EXPAND EDIT SET</p>	<p>Math Deg Norm1 d/c  a+bi</p> <p><math>aX+bY+cZ+d=0</math></p> <p><math>\frac{a}{1} \quad \frac{b}{-1} \quad \frac{c}{0} \quad \frac{d}{-2}</math></p> <p>-2</p> <p>EXPRESS VECTOR POINTS EDIT SET</p>
--	--

<p>Math Deg Norm1 d/c  a+bi</p> <p>Punto de paso <math>(X_0, Y_0, Z_0)</math> Vector dirección <math>[a, b, c]</math></p> <p><math>\frac{X_0}{-1} \quad \frac{Y_0}{1} \quad \frac{Z_0}{0}</math></p> <p><math>\frac{a}{1} \quad \frac{b}{-2} \quad \frac{c}{0}</math></p> <p>0</p> <p>EXPRESS VECTOR P&amp;V POINTS EDIT SET</p>	<p>Math Deg Norm1 d/c  a+bi</p> 
--	--

**Problema 50**

Determineu el lloc geomètric dels punts  $X$  tal que  $\overrightarrow{MX}$  i  $\overrightarrow{NX}$  són ortogonals essent  $M(1, 1, 0), N(0, 1, 0)$

Solució:

Siga  $X(x, y, z)$

$$\overrightarrow{MX} = (x - 1, y - 1, z), \overrightarrow{NX} = (x, y - 1, z)$$

$$\overrightarrow{MX} \cdot \overrightarrow{NX} = 0$$

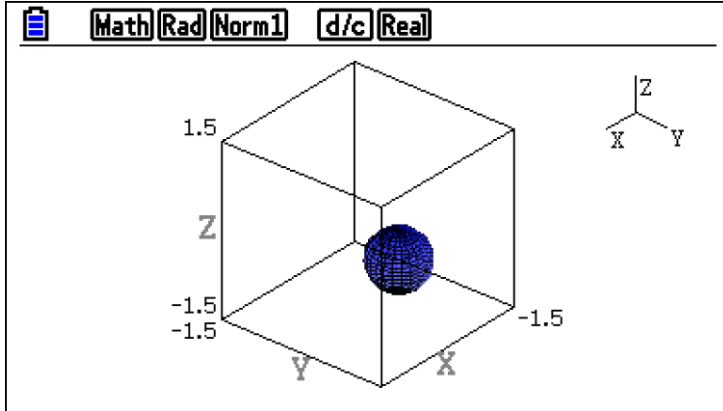
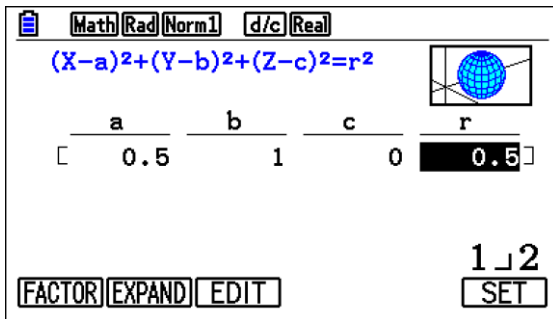
$$(x - 1, y - 1, z) \cdot (x, y - 1, z) = 0$$

$$x^2 - x + y^2 - 2y + 1 + z^2 = 0$$

Completant quadrants:

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

El lloc geomètric és una esfera de centre  $O\left(\frac{1}{2}, 1, 0\right)$  i radi  $R = \frac{1}{2}$



**Problema 51**

Determineu l'equació de l'esfera concèntrica a l'esfera

$$E \equiv x^2 + y^2 + z^2 + x + 2y - 2z - 1 = 0, \text{ que passa pel punt } P\left(-\frac{1}{2}, -1, 1\right)$$

Solució:

Completant quadrats determinem el centre i el radi de l'esfera:

$$E \equiv x^2 + y^2 + z^2 + x + 2y - 2z - 1 = 0$$

$$E \equiv \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y + 1)^2 + (z - 1)^2 = 1 + \frac{1}{4} + 1 + 1 = \left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2$$

El centre és  $O\left(-\frac{1}{2}, -1, 1\right)$  i el radi  $r = \frac{\sqrt{13}}{2}$

El radi de l'esfera concèntrica que passa per  $P\left(-\frac{1}{2}, -1, 1\right)$  és:

$$R = d(P, C) = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3$$

Notem que  $R > r$

Math Rad Norm1 d/c Real

$(X-a)^2+(Y-b)^2+(Z-c)^2=r^2$

a      b      c      r

[ -0.5      1      -1      1.8027 ]

1.802775638

FACTOR EXPAND EDIT SET

Math Rad Norm1 d/c Real

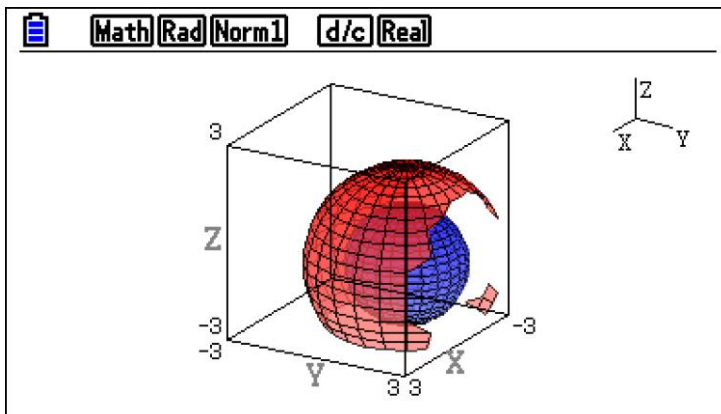
$(X-a)^2+(Y-b)^2+(Z-c)^2=r^2$

a      b      c      r

[ -0.5      1      -1      3 ]

3

FACTOR EXPAND EDIT SET



**Problema 52**

Determineu l'equació de l'esfera que passa pels punts  $A(6, -1, 3)$ ,  $B(0, 7, 5)$  i té el centre en la recta  $r \equiv \begin{cases} x - 2z + 3 = 0 \\ y - z + 1 = 0 \end{cases}$

Solució:

Determinem l'equació paramètrica de la recta  $r$

$$r \equiv \begin{cases} x = -3 + 2\mu \\ y = -1 + \mu \\ z = \mu \end{cases}$$

Les coordenades del centre són:

$$O(-3 + 2\mu, -1 + \mu, \mu)$$

$$d(O, A) = d(O, B)$$

$$\sqrt{(-9 + 2\mu)^2 + \mu^2 + (-3 + \mu)^2} = \sqrt{(-3 + 2\mu)^2 + (\mu - 8)^2 + (-5 + \mu)^2}$$

Simplificant:

$$-4\mu = 8$$

$$\mu = -2$$

Les coordenades del centre són:

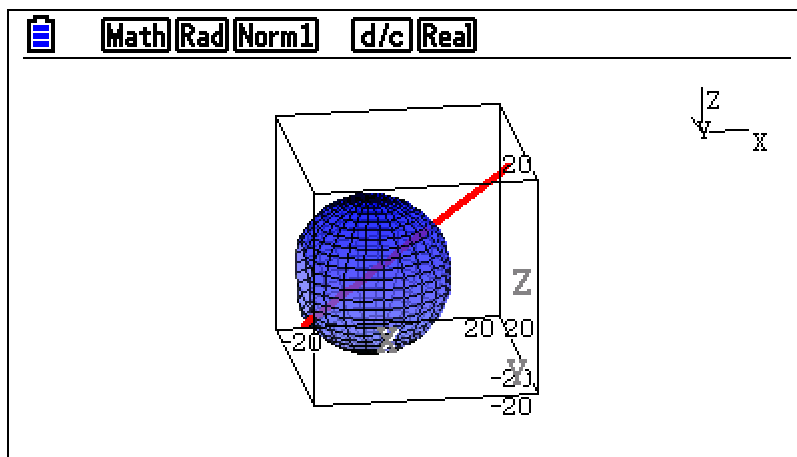
$$O(-7, -3, -2)$$

$$\text{El radi és } \sqrt{(-13)^2 + (-2)^2 + (-5)^2} = \sqrt{198}$$

L'equació de l'esfera és:

$$E \equiv (x + 7)^2 + (y + 3)^2 + (z + 2)^2 = 198$$

<p>Math Rad Norm1 d/c Real</p> <p><math>(X-a)^2+(Y-b)^2+(Z-c)^2=r^2</math></p> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="text-align: center;">a</td> <td style="text-align: center;">b</td> <td style="text-align: center;">c</td> <td style="text-align: center;">r</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">[-7]</td> <td style="text-align: center;">[-3]</td> <td style="text-align: center;">[-2]</td> <td style="text-align: center;">[14.071]</td> </tr> </table> <p style="text-align: center; font-size: 1.2em;">14.07124728</p> <p>FACTOR EXPAND EDIT SET</p>	a	b	c	r	[-7]	[-3]	[-2]	[14.071]	<p>Math Rad Norm1 d/c Real</p> <p>Punto de paso <math>(X_0, Y_0, Z_0)</math> Vector dirección <math>[a, b, c]</math></p> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="text-align: center;">X<sub>0</sub></td> <td style="text-align: center;">Y<sub>0</sub></td> <td style="text-align: center;">Z<sub>0</sub></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">[-3]</td> <td style="text-align: center;">[-1]</td> <td style="text-align: center;">[0]</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">a</td> <td style="text-align: center;">b</td> <td style="text-align: center;">c</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">[2]</td> <td style="text-align: center;">[1]</td> <td style="text-align: center;">[1]</td> </tr> </table> <p style="text-align: right; font-size: 1.2em;">1</p> <p>EXPRESS VECTOR P&amp;V POINTS EDIT SET</p>	X <sub>0</sub>	Y <sub>0</sub>	Z <sub>0</sub>	[-3]	[-1]	[0]	a	b	c	[2]	[1]	[1]
a	b	c	r																		
[-7]	[-3]	[-2]	[14.071]																		
X <sub>0</sub>	Y <sub>0</sub>	Z <sub>0</sub>																			
[-3]	[-1]	[0]																			
a	b	c																			
[2]	[1]	[1]																			



**Problema 53**

Determineu els plànols tangents a l'esfera d'equació

$$E \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 8z + 10 = 0$$

En els punts d'intersecció de la recta  $r \equiv \begin{cases} x - 2z = -1 \\ y + z = 1 \end{cases}$  i l'esfera.

Solució:

Per determinar el centre i el radi de l'esfera, completem quadrats en la seua equació:

$$E \equiv (x - 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 4)^2 = 11$$

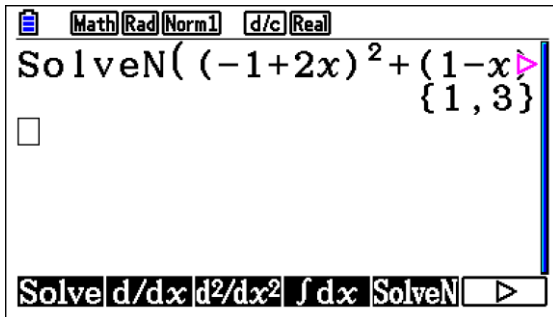
El centre és el punt  $O(2, -1, 4)$  i el radi  $r = \sqrt{11}$ .

L'equació paramètrica de la recta  $r$  és:

$$r \equiv \begin{cases} x = -1 + 2\alpha \\ y = 1 - \alpha \\ z = \alpha \end{cases}$$

Determinem la intersecció de la recta i la circumferència

$$(-1 + 2\alpha)^2 + (1 - \alpha)^2 + \alpha^2 - 4(-1 + 2\alpha) + 2(1 - \alpha) - 8\alpha + 10 = 0$$



Resolent l'equació:

$$\alpha = 1, 3$$

Els punts de tangència són:

$$A(1, 0, 1), B(5, -2, 3)$$

Un dels plànols tangent a l'esfera té vector característic :

$$\overrightarrow{OA} = (-1, 1, -3)$$

Les equació dels dos plànols són:

$$\pi_1 \equiv -(x - 1) + (y - 0) - 3(z - 1) = 0$$

$$\pi_1 \equiv -x + y - 3z + 4 = 0$$

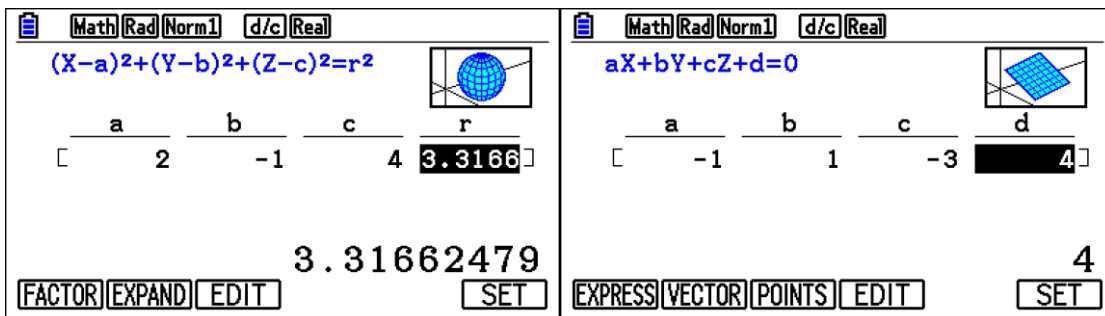
L'altre plànol tangent

$$\overrightarrow{OB} = (3, -1, -1)$$

Les equació dels dos plànols són:

$$\pi_2 \equiv 3(x - 5) - (y + 2) - (z - 3) = 0$$

$$\pi_2 \equiv 3x - y - z - 14 = 0$$



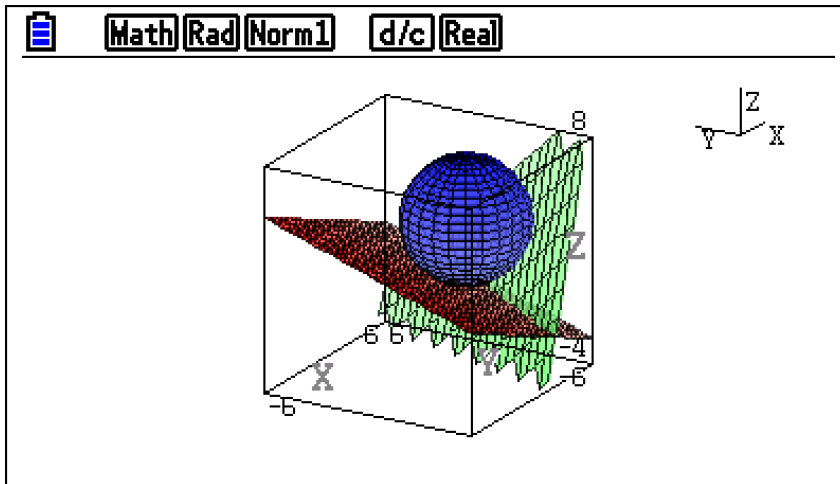
**Math** **Rad** **Norm1** **d/c** **Real**

$aX+bY+cZ+d=0$

a	b	c	d
3	-1	-1	-14

**EXPRESS** **VECTOR** **POINTS** **EDIT** **SET**

-14



**Problema 54**

Determineu el lloc geomètric dels punts tals que la proporció entre les distàncies a dos punts fixos  $A(1, 1, -2)$ ,  $B(-2, 3, 2)$  és 1:3.

Solució:

Si  $P(x, y, z)$  pertany al lloc geomètric, aleshores:

$$\frac{d(A, P)}{d(B, P)} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2}}{\sqrt{(x+2)^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2}} = \frac{1}{3}$$

Elevant al quadrat:

$$\frac{x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 + z^2 + 4z + 4}{x^2 + 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 + z^2 - 4z + 4} = \frac{1}{9}$$

Simplificant:

$$8x^2 - 22x + 8y^2 - 12y + 8z^2 + 40z + 37 = 0$$

Dividint l'expressió per 8:

$$x^2 - \frac{11}{4}x + y^2 - \frac{3}{2}y + z^2 + 5z + \frac{37}{8} = 0$$

Completant quadrats:

$$\left(x - \frac{11}{8}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{4}\right)^2 + \left(z + \frac{5}{2}\right)^2 = -\frac{37}{8} + \left(\frac{11}{8}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{261}{84} = \left(\frac{\sqrt{261}}{8}\right)^2$$

El lloc geomètric és una esfera de centre  $O\left(\frac{11}{8}, \frac{3}{4}, -\frac{5}{2}\right)$  i radi  $R = \frac{\sqrt{261}}{8}$

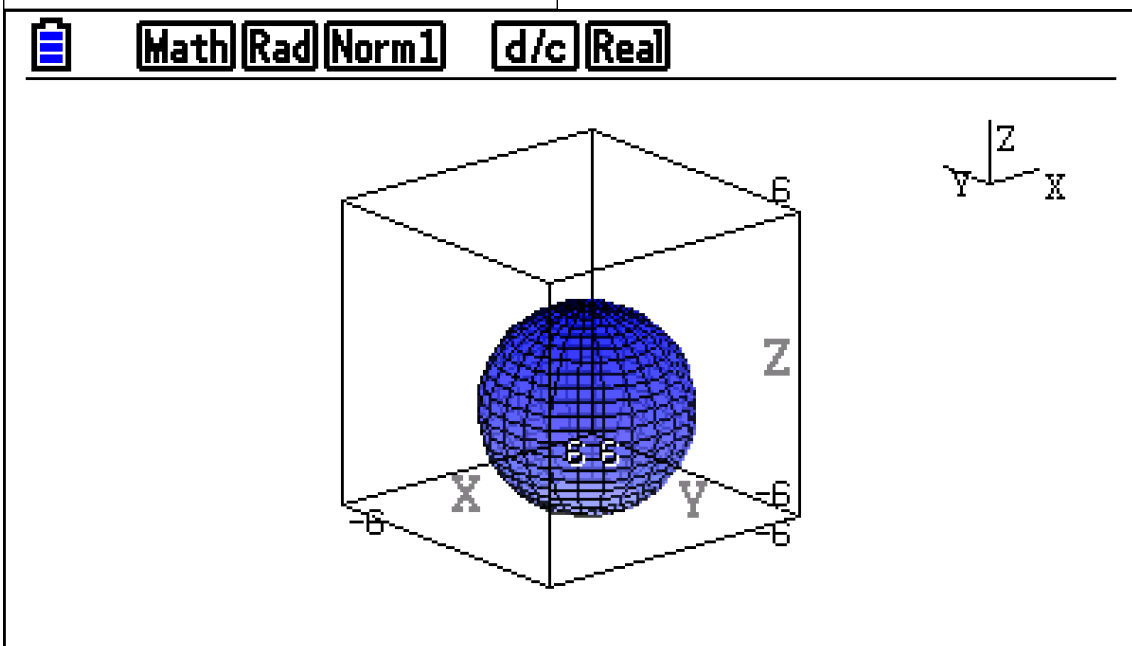
Math Rad Norm1 d/c Real

$(X-a)^2+(Y-b)^2+(Z-c)^2=r^2$

a	b	c	r
1.375	0.75	-2.5	4.0388

4.038873605

FACTOR EXPAND EDIT SET





**Problema 55**

Determineu l'equació de l'esfera tangent a la recta intersecció dels plànols

$$\pi_1 \equiv x - y + z = 0, \pi_2 \equiv 2x - y - z = 3 \text{ i concèntrica a l'esfera d'equació}$$

$$E \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 6y - 8z + 16 = 0$$

Solució:

Determinem el centre i el radi de l'esfera  $E$  completant quadrats:

$$x^2 + (y - 3)^2 + (z - 4)^2 = -16 + 9 + 16 = 3^2$$

El centre de l'esfera és  $O(0, 3, 4)$  i el radi  $r = 3$

El punt de tangència de l'esfera que cerquem és la projecció del centre  $O(0, 3, 4)$  sobre

la recta  $r \equiv \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x - y - z = 3 \end{cases}$  intersecció dels dos plànol.

Resolent el sistema determinem l'equació paramètrica de la recta  $r$ :

<div style="border: 1px solid black; padding: 2px;"> <span style="font-size: small;">Math Rad Norm1 d/c Real</span>  <math>a_n X + b_n Y + C_n Z = d_n</math>  <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="width: 5%;"></th> <th style="width: 25%; text-align: center;">a</th> <th style="width: 25%; text-align: center;">b</th> <th style="width: 25%; text-align: center;">c</th> <th style="width: 20%; text-align: center;">d</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td style="text-align: center;">1</td> <td style="text-align: center;">-1</td> <td style="text-align: center;">1</td> <td style="text-align: center;">0</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td style="text-align: center;">2</td> <td style="text-align: center;">-1</td> <td style="text-align: center;">-1</td> <td style="text-align: center;">3</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td style="text-align: center;">0</td> <td style="text-align: center;">0</td> <td style="text-align: center;">0</td> <td style="text-align: center;">0</td> </tr> </tbody> </table> <div style="text-align: right; margin-top: 5px;">0</div> <div style="font-size: x-small; margin-top: 5px;"> <span>SOLVE</span> <span>DELETE</span> <span>CLEAR</span> <span>EDIT</span> </div> </div>		a	b	c	d	1	1	-1	1	0	2	2	-1	-1	3	3	0	0	0	0	<div style="border: 1px solid black; padding: 2px;"> <span style="font-size: small;">Math Rad Norm1 d/c Real</span>  <math>a_n X + b_n Y + C_n Z = d_n</math>                  Soluciones                  Infinitas  <div style="background-color: black; color: white; padding: 2px; margin: 2px 0;"><math>X = 3 + 2Z</math></div> <div style="margin: 2px 0;"><math>Y = 3 + 3Z</math></div> <div style="margin: 2px 0;"><math>Z = Z</math></div> <div style="text-align: right; margin-top: 5px;">REPEAT</div> </div>
	a	b	c	d																	
1	1	-1	1	0																	
2	2	-1	-1	3																	
3	0	0	0	0																	

L'equació paramètrica és:

$$r \equiv \begin{cases} x = 3 + 2\alpha \\ y = 3 + 3\alpha \\ z = \alpha \end{cases}$$

El plànol perpendicular a la recta  $r$  que passa pel centre  $O$  té vector característic el vector director de la recta  $r$ . La seua equació és:

$$\pi \equiv 2x + 3(y - 3) + z - 4 = 0$$

Simplificant,

$$\pi \equiv 2x + 3y + z = 13$$

El punt de tangència és igual a la intersecció dels tres plànols

Resolem el sistema format pels tres plànols:

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x - y - z = 3 \\ 2x + 3y + z = 13 \end{cases}$$

<div style="border: 1px solid black; padding: 2px;"> <span style="font-size: small;">Math Rad Norm1 d/c Real</span>  <math>a_n X + b_n Y + C_n Z = d_n</math>  <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="width: 5%;"></th> <th style="width: 25%; text-align: center;">a</th> <th style="width: 25%; text-align: center;">b</th> <th style="width: 25%; text-align: center;">c</th> <th style="width: 20%; text-align: center;">d</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td style="text-align: center;">1</td> <td style="text-align: center;">-1</td> <td style="text-align: center;">1</td> <td style="text-align: center;">0</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td style="text-align: center;">2</td> <td style="text-align: center;">-1</td> <td style="text-align: center;">-1</td> <td style="text-align: center;">3</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td style="text-align: center;">2</td> <td style="text-align: center;">3</td> <td style="text-align: center;">1</td> <td style="text-align: center;">13</td> </tr> </tbody> </table> <div style="text-align: right; margin-top: 5px;">1</div> <div style="font-size: x-small; margin-top: 5px;"> <span>SOLVE</span> <span>DELETE</span> <span>CLEAR</span> <span>EDIT</span> </div> </div>		a	b	c	d	1	1	-1	1	0	2	2	-1	-1	3	3	2	3	1	13	<div style="border: 1px solid black; padding: 2px;"> <span style="font-size: small;">Math Rad Norm1 d/c Real</span>  <math>a_n X + b_n Y + C_n Z = d_n</math>  <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tbody> <tr> <td style="width: 5%; text-align: right;">X</td> <td style="text-align: center;">2.7142</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">Y</td> <td style="text-align: center;">2.5714</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">Z</td> <td style="text-align: center;">-0.142</td> </tr> </tbody> </table> <div style="text-align: right; margin-top: 20px; font-size: 2em;"> <math>\frac{19}{7}</math> </div> <div style="text-align: right; margin-top: 5px;">REPEAT</div> </div>	X	2.7142	Y	2.5714	Z	-0.142
	a	b	c	d																							
1	1	-1	1	0																							
2	2	-1	-1	3																							
3	2	3	1	13																							
X	2.7142																										
Y	2.5714																										
Z	-0.142																										

Les coordenades són:

$$T\left(\frac{19}{7}, \frac{18}{7}, -\frac{1}{7}\right)$$

El radi de l'esfera concèntrica és:

$$R = d(O, T) = \sqrt{\left(\frac{19}{7} - 0\right)^2 + \left(\frac{18}{7} - 3\right)^2 + \left(-\frac{1}{7} - 4\right)^2} = \frac{\sqrt{1211}}{7}$$

L'equació de l'esfera és:

$$E_1 \equiv x^2 + (y - 3)^2 + (z - 4)^2 = -16 + 9 + 16 = \left(\frac{\sqrt{1211}}{7}\right)^2$$

Representem la recta i les dues esferes.

<div style="border: 1px solid black; padding: 2px;"> <span>Math Rad Norm1 d/c Real</span> </div> <p><math>(X-a)^2+(Y-b)^2+(Z-c)^2=r^2</math></p> <table style="width: 100%; text-align: center;"> <tr> <td>a</td><td>b</td><td>c</td><td>r</td> </tr> <tr> <td>[ 0 ]</td><td>[ 3 ]</td><td>[ 4 ]</td><td>[ 3 ]</td> </tr> </table> <p style="text-align: right; margin-right: 20px;"><b>3</b></p> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: flex; justify-content: space-between;"> <span>FACTOR EXPAND EDIT</span> <span>SET</span> </div>	a	b	c	r	[ 0 ]	[ 3 ]	[ 4 ]	[ 3 ]	<div style="border: 1px solid black; padding: 2px;"> <span>Math Rad Norm1 d/c Real</span> </div> <p>Punto de paso (Xo, Yo, Zo) Vector dirección [a,b,c]</p> <table style="width: 100%; text-align: center;"> <tr> <td>Xo</td><td>Yo</td><td>Zo</td> </tr> <tr> <td>[ 3 ]</td><td>[ 3 ]</td><td>[ 0 ]</td> </tr> <tr> <td>a</td><td>b</td><td>c</td> </tr> <tr> <td>[ 2 ]</td><td>[ 3 ]</td><td>[ 1 ]</td> </tr> </table> <p style="text-align: right; margin-right: 20px;"><b>1</b></p> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: flex; justify-content: space-between;"> <span>EXPRESS VECTOR P&amp;V POINTS EDIT SET</span> </div>	Xo	Yo	Zo	[ 3 ]	[ 3 ]	[ 0 ]	a	b	c	[ 2 ]	[ 3 ]	[ 1 ]
a	b	c	r																		
[ 0 ]	[ 3 ]	[ 4 ]	[ 3 ]																		
Xo	Yo	Zo																			
[ 3 ]	[ 3 ]	[ 0 ]																			
a	b	c																			
[ 2 ]	[ 3 ]	[ 1 ]																			
<div style="border: 1px solid black; padding: 2px;"> <span>Math Rad Norm1 d/c Real</span> </div> <p><math>(X-a)^2+(Y-b)^2+(Z-c)^2=r^2</math></p> <table style="width: 100%; text-align: center;"> <tr> <td>a</td><td>b</td><td>c</td><td>r</td> </tr> <tr> <td>[ 0 ]</td><td>[ 3 ]</td><td>[ 4 ]</td><td>[ 4.9713 ]</td> </tr> </table> <p style="text-align: center; margin-top: 10px;">4.971346469</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: flex; justify-content: space-between;"> <span>FACTOR EXPAND EDIT</span> <span>SET</span> </div>	a	b	c	r	[ 0 ]	[ 3 ]	[ 4 ]	[ 4.9713 ]													
a	b	c	r																		
[ 0 ]	[ 3 ]	[ 4 ]	[ 4.9713 ]																		
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: flex; justify-content: space-between;"> <span>Math Rad Norm1 d/c Real</span> </div> <div style="text-align: center; padding: 20px;"> </div> </div>																					

**Problema 56**

Determineu les equacions de les esferes els centres de les quals pertanyen al plànol  $\pi \equiv 3x + 2y - z - 8 = 0$  i són tangents als plànols coordenats.

Solució:

Els plànols coordenats són:

$$\pi_{yz} \equiv x = 0, \pi_{xz} \equiv y = 0, \pi_{xy} \equiv z = 0$$

Determinem l'equació paramètrica del plànol  $\pi \equiv 3x + 2y - z - 8 = 0$

$$z = 3x + 2y - 8$$

$$\pi \equiv \begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = -8 + 3\alpha + 2\beta \end{cases}$$

Les coordenades del centre de l'esfera són:

$$O(\alpha, \beta, -8 + 3\alpha + 2\beta)$$

Les dels distàncies del centre als plànols coordenats són iguals:

$$d(O, \pi_{yz}) = d(O, \pi_{xz}) = d(O, \pi_{xy})$$

$$|\alpha| = |\beta| = |-8 + 3\alpha + 2\beta|$$

$$\begin{cases} \alpha = \beta \\ \alpha = -8 + 3\alpha + 2\beta \end{cases}, \begin{cases} \alpha = \beta \\ \alpha = 8 - 3\alpha - 2\beta \end{cases}, \begin{cases} \alpha = -\beta \\ \alpha = -8 + 3\alpha + 2\beta \end{cases}, \begin{cases} \alpha = -\beta \\ \alpha = 8 - 3\alpha - 2\beta \end{cases}$$

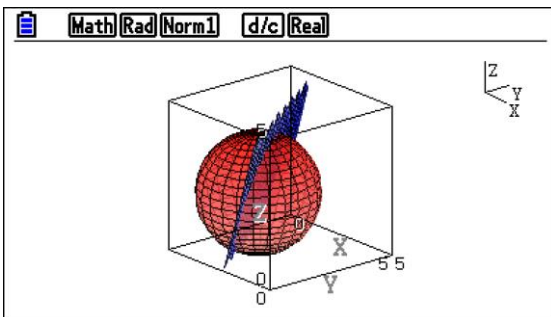
Les solucions són (el tercer sistema no té solució):

$$\begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 2 \end{cases}, \begin{cases} \alpha = \frac{4}{3} \\ \beta = \frac{4}{3} \end{cases}, \begin{cases} \alpha = 4 \\ \beta = -4 \end{cases}$$

Primera solució:

Centre  $O_1(2, 2, 2)$  i radi  $r_1 = 2$

<p>Math Rad Norm1 d/c Real</p> <p><math>aX+bY+cZ+d=0</math></p> <p><math>\frac{a}{3} \quad \frac{b}{2} \quad \frac{c}{-1} \quad \frac{d}{-8}</math></p> <p>EXPRESS VECTOR POINTS EDIT SET</p>	<p>Math Rad Norm1 d/c Real</p> <p><math>(X-a)^2+(Y-b)^2+(Z-c)^2=r^2</math></p> <p><math>\frac{a}{2} \quad \frac{b}{2} \quad \frac{c}{2} \quad \frac{r}{2}</math></p> <p>FACTOR EXPAND EDIT SET</p>
---	--



Segona solució:

Centre  $O_2 \left( \frac{4}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{4}{3} \right)$  i radi  $r_2 = \frac{4}{3}$

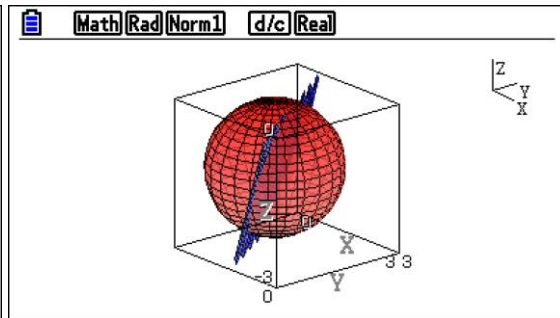
Math Rad Norm1 d/c Real

$(X-a)^2+(Y-b)^2+(Z-c)^2=r^2$

$\frac{a}{1.3333} \frac{b}{1.3333} \frac{c}{-1.3333} \frac{r}{1.3333}$

4 3  
 SET

FACTOR EXPAND EDIT



Tercera solució:

Centre  $O_3(4, -4, -4)$  i radi  $r_3 = 4$

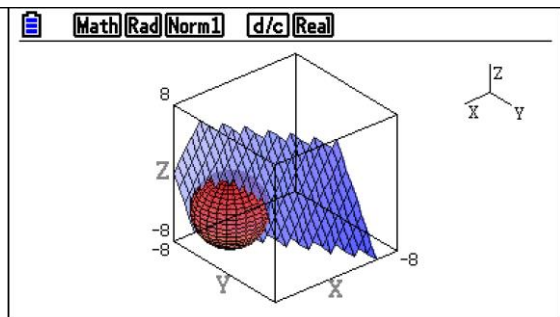
Math Rad Norm1 d/c Real

$(X-a)^2+(Y-b)^2+(Z-c)^2=r^2$

$\frac{a}{4} \frac{b}{-4} \frac{c}{-4} \frac{r}{4}$

4  
 SET

FACTOR EXPAND EDIT



**Problema 57**

Determineu la màxima esfera de centre  $O(5, 4, 9)$  continguda en el primer octant.

Solució:

Notem que el centre  $O(5, 4, 9)$  pertany al primer octant.

El radi és  $R = \min\{5, 4, 9\} = 4$

L'equació és:

$$E \equiv (x - 5)^2 + (y - 4)^2 + (z - 9)^2 = 4^2$$

