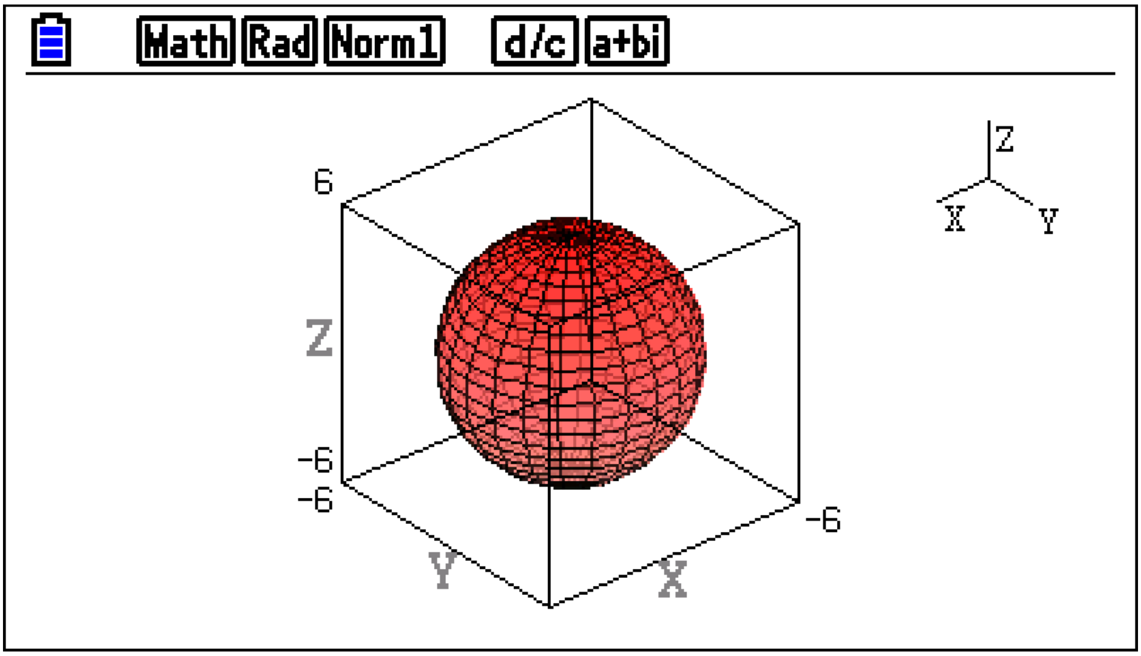


L’esfera

Ricard Peiró i Estruch

L’esfera

L’**esfera** és la figura de l’espai generada per la rotació d’un cercle al voltant d’un dels seus diàmetres.
L’esfera és el lloc geomètric dels punts de l’espai la distancia dels quals a un punt fix (anomenat centre) és igual a r (anomenat radi.

Siga $O(a,b,c)$ centre de l’esfera. Siga r el radi.
La seua equació és:
$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$

Corda d’una esfera
Segment rectilini que uneix dos punts de l’esfera.
Diàmetre d’una esfera.
Corda màxima d’una esfera, és a dir, corda que passa pels centre de l’esfera.

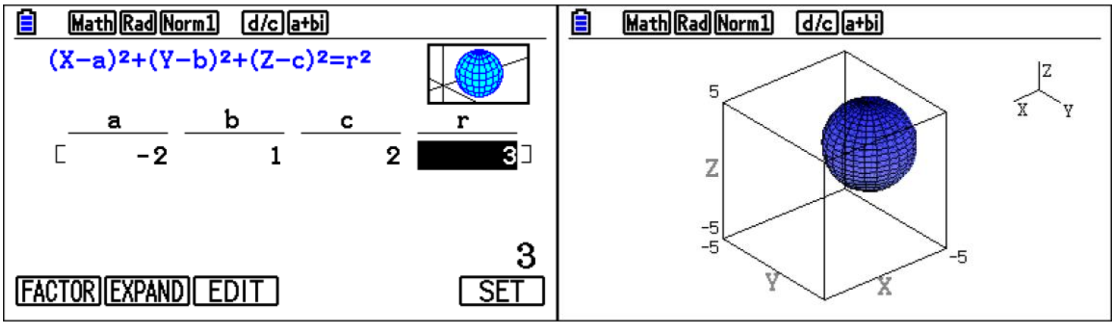
Àrea d’una esfera.
$S=4\pi r^2$

Volum d’una esfera:
$V=\frac{4}{3}\pi r^3$

Exemple:
Determineu l’equació de l’esfera de centre $O(-2,1,2)$ i radi $r=3$

Solució:
L’equació és:
$(x+2)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=3^2$

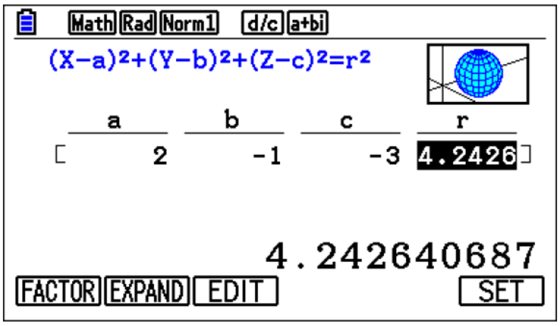
Obrim el *Menú Gráfico 3D*.
Definim i representem l’esfera.

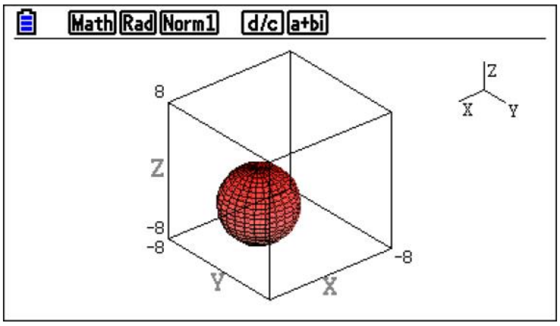


Exemple:
Determineu l’equació de l’esfera de centre $O(3,-2,1)$ i passa pel punt $A(2,-1,-3)$

Solució:
El radi de la circumferència és:
$r=d(C,A)=+\sqrt{(2-3)^2+(-1+2)^2+(-3-1)^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$
L’equació és:
$(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=\left(3\sqrt{2}\right)^2$

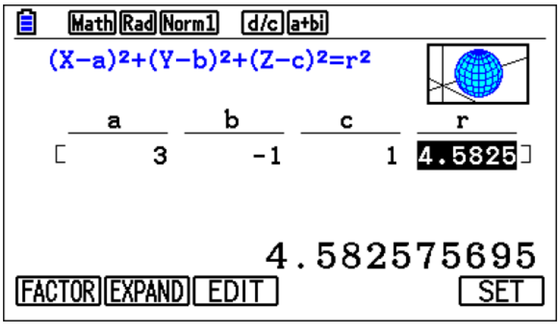
Obrim el *Menú Gráfico 3D*.
Definim i representem l'esfera.

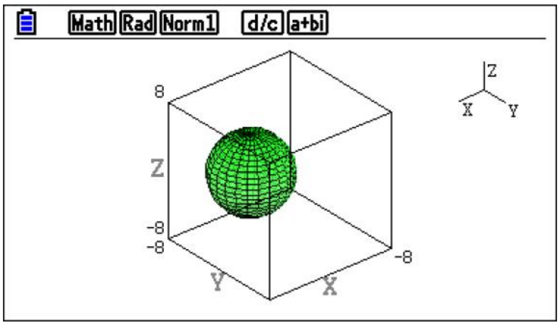




Exemple:
Determineu l'equació de l'esfera tals que els punts $A(2,-3,5), B(4,1,-3)$ són els extrems d'un dels seus diàmetres.

Solució:
El centre de l'esfera és el punt mig del segment $\overline{AB}$. Les seues coordenades són:
$O(3,-1,1)$
El radi és:
$r = d(O,A) = +\sqrt{(2-3)^2 + (-3+1)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{21}$
L'equació és:
$(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = \left(\sqrt{21}\right)^2$
Obrim el *Menú Gráfico 3D*.
Definim i representem l'esfera.



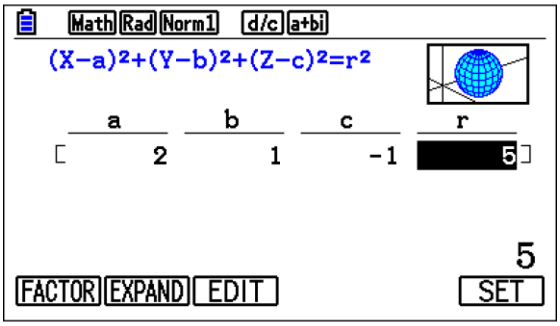


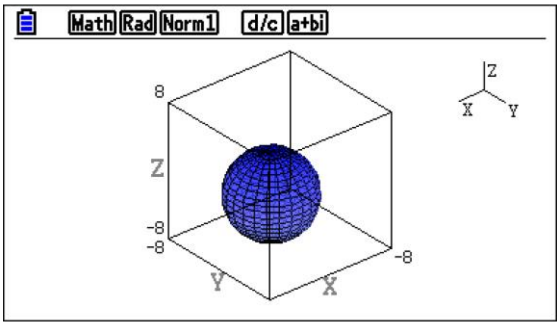
Exemple
Determineu el centre i el radi de l'esfera d'equació:
$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 2z - 19 = 0$

Solució:
Completant quadrats:
$(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 19 + 2^2 + 1^2 + 1^2$

$(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 5^2$
El centre és el punt $O(2,1,-1)$ el radi és $r = 5$

Obrim el *Menú Gráfico 3D*.
Definim i representem l'esfera.





Posicions relatives

Posició relativa d'un punt P i una esfera de centre O i radi r.
Si $d(O,P) > r$, el punt és exterior a l'esfera.
Si $d(O,P) = r$, el punt pertany a l'esfera.
Si $d(O,P) < r$, el punt és interior a l'esfera.

Posició relativa d'una recta s i una esfera de centre O i radi r.
Si $d(O,s) > r$, la recta és exterior a l'esfera.
Si $d(O,s) = r$, la recta és tangent a l'esfera.
A més a més, Si T és el punt de tangència, la recta s és perpendicular a la recta $\overline{OT}$
Si $d(O,s) < r$, la recta és secant a l'esfera, talla l'esfera en dos punts.

Posició relativa d'un plànol π i una esfera de centre O i radi r.
Si $d(O,\pi) > r$, el plànol és exterior a l'esfera.
Si $d(O,\pi) = r$, El plànol és tangent a l'esfera.
A més a més, Si T és el punt de tangència, el plànol és perpendicular a la recta $\overline{OT}$
Si $d(O,\pi) < r$, El plànol és secant a l'esfera, talla l'esfera en una circumferència.

Problemes

Problema 1
Siga l'esfera d'equació $E \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6z = 0$.
Determineu les coordenades del centre i la mesura del radi.
Verifiqueu si el plànol $\Pi \equiv 3x - 2y + 6z + 1 = 0$ i l'esfera són secants.
Determineu el radi de la circumferència intersecció de E, Π.
Determineu el centre de la circumferència intersecció de E, Π.

Problema 2
Determineu l'equació de l'esfera de centre $C(3, -5, -2)$ i tangent al plànol $2x - y - 3z + 11 = 0$

Problema 3
Determineu l'equació de l'esfera de radi $r = 3$, que és tangent al plànol $x + 2y + 2z + 3 = 0$ en el punt $A(1, 1, -3)$

Problema 4
Determineu l'equació del plànol tangent a l'esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 49$ en el punt $M(6, -3, -2)$

Problema 5
Determineu les equacions dels plànols tangents a l'esfera $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 25$ paral·lels al plànol $4x + 3z - 17 = 0$

Problema 6
Determineu l'equació de la circumferència que passa pels punts $A(3, -1, -2), B(1, 1, -2), C(-1, 3, 0)$

Problema 7
Demostreu que el plànol $2x - 6y + 3z - 49 = 0$ és tangent a l'esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 49$
Calculeu les coordenades del punt de tangència.

Problema 8
Determineu l'equació del plànol tangent a l'esfera $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 + (z + 2)^2 = 24$ que passe pel punt $M(-1, 3, 0)$

Problema 9
Determineu l'equació de l'esfera que és tangent als plànols $\Pi \equiv 6x - 3y - 2z - 35 = 0$, $\Omega \equiv 6x - 3y - 2z + 63 = 0$, sabent que el punt $M(5, -1, -1)$ és un punt de tangència en un dels plànols.

Problema 10
Una esfera té el centre en la recta $r \equiv \begin{cases} 2x + 4y - z - 7 = 0 \\ 4x + 5y + z - 14 = 0 \end{cases}$ i és tangent als plànols $\Pi \equiv x + 2y - 2z - 2 = 0$, $\Omega \equiv x + 2y - 2z + 4 = 0$. Determineu la seua equació.

Problema 11
Determineu la posició relativa de la recta $r \equiv \begin{cases} x = 2 - 2\alpha \\ y = -\frac{7}{2} + 3\alpha \\ z = -2 + \alpha \end{cases}$ i l'esfera $E \equiv x^2 + y^2 + z^2 + x - 4y - 3z + \dfrac{1}{2} = 0$

Problema 12
En l'esfera d'equació $E \equiv (x-1)^2 + (y+2)^2 + (x-3)^2 = 25$ determineu el punt M més pròxim al plànol $\Pi \equiv 3x - 4y + 19 = 0$ i calculeu la distància del punt M a aquest plànol.

Problema 13
Determineu l'equació de l'esfera de centre $O(2,3,-1)$ que talla la recta $s \equiv \begin{cases} 5x-4y+3z+20=0 \\ 3x-4y+z-8=0 \end{cases}$ amb una corda de longitud igual a 16.

Problema 14
Determineu el centre C i el radi r de la circumferència
$$\begin{cases} (x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 100 \\ 2x-2y-z+9=0 \end{cases}$$

Problema 15
Determineu l'equació de l'esfera que passa pels punts
$A(1,-2,-1), B(-5,10,-1), C(4,1,11), D(-8,-2,2)$

Problema 16
Determineu l'equació de l'esfera que passa pels punts
$A(3,1,-3), B(-2,4,1), C(-5,0,0)$ i té el centre en el plànol $\Pi \equiv 2x + y - z + 3 = 0$

Problema 17
Siga l'esfera $x^2 + y^2 + z^2 + 6y - 4z + 9 = 0$
Determineu l'equació de l'esfera concèntrica amb ella que és tangent al plànol
$2x - 3y + 2z + 4 = 0$

Problema 18
Siga l'esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 4y + 8z + 20 = 0$
Calculeu l'esfera d'igual radi, tangent exterior en el punt $A(1,4,-3)$ de l'esfera.
Calculeu l'esfera d'igual radi, tangent exterior en el punt diametralment oposat al punt $A(1,4,-3)$ de l'esfera.

Problema 19
Siguen les esferes d'equacions
$E_1 \equiv x^2 + y^2 + z^2 = 25$, $E_2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 15y - 25z = 0$

a) Proveu que les dues esferes són secants.
b) Determineu el plànol que conté la intersecció de les dues esferes.
c) Determineu el centre i el radi de la circumferència intersecció.

Problema 20
Calculeu la distància més curta del punt $A(1,-1,3)$ a l'esfera
$E \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 10z - 62 = 0$
En quin punt de l'esfera s'assoleix la distància més curta.

Problema 21
Pels punts intersecció de la recta $r \equiv \begin{cases} x = -5 + 3t \\ y = -11 + 5t \\ z = 9 - 4t \end{cases}$ i de l'esfera d'equació $E \equiv (x+2)^2 + (y-1)^2 + (z+5)^2 = 49$ s'han traçat plànol tangents determineu les seues equacions.

Problema 22

Determineu l'equació de l'esfera que passa per les circumferències $\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ z=2 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2+y^2=16 \\ z=3 \end{cases}$

Problema 23

Donades les esferes $E_1 \equiv 2x^2+2y^2+2z^2+3x-2y+z-5=0$,
$E_2 \equiv x^2+y^2+z^2-x+3y-2z+1=0$

a) Determineu la posició relativa de les dues esferes.
b) Si són secants, determineu el plànol on es tallen.
c) Determineu el centre i el radi de la circumferència intersecció de les dues esferes.

Problema 24

Proveu que el punt $T(1,0,1)$ pertany al plànol $\pi \equiv x-2y+2z=3$.
Determineu l'equació de l'esfera que passa pel punt $P(1,0,5)$ i és tangent en T al plànol π.

Problema 25

Considerem els punts $A(2,3,6), B(6,2,-3), C(3,-6,2)$ en l'espai tridimensional.
Verifiqueu que els segments $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}$ són arestes d'un cub, on $O(0,0,0)$.
Determineu el centre i el radi de l'esfera circumscrita al cub.

Problema 26

Siguen les esferes $E_1 \equiv x^2+y^2+z^2-4x-12y+6z+45=0, E_2 \equiv x^2+y^2+z^2=81$

a) Demostreu que les dues esferes són tangents.
b) Determineu l'equació del plànol tangent a les dues esferes.

Problema 27

Siguen les esferes $E_1 \equiv x^2+y^2+z^2+6x-2y-4z+11=0$,
$E_2 \equiv (x-1)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=3^2$

a) Demostreu que les dues esferes són tangents.
b) Determineu l'equació del plànol tangent a les dues esferes.

Problema 28

Determineu l'equació de l'esfera E, amb centre sobre la recta $r \equiv \begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$
Tangent al plànol $\pi \equiv 3x-y-2z+14=0$ en el punt $T(-4,0,1)$

Problema 29

Els punts $A(3,-2,5), B(-1,6,-3)$ són els extrems d'un diàmetre d'una circumferència que passa pel punt $C(1,-4,1)$
Determineu l'equació de la circumferència.

Problema 30

El punt $C(1,-1,-2)$ és el centre d'una circumferència que talla la recta
$r \equiv \begin{cases} 2x-y+2z-12 \\ 4x-7y-z+6=0 \end{cases}$ una corda de longitud 8.
Determineu l'equació de la circumferència.

Problema 31

Demostreu que per la recta $r \equiv \begin{cases} x = 4 + 4t \\ y = 1 + 3t \\ z = 1 + t \end{cases}$ només es pot traçar un plànol tangent a l'esfera $E \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y + 2z + 8 = 0$
Determineu la seua equació.

Problema 32

Determineu l'equació de l'esfera de radi $\sqrt{6}$ tangent al plànol $\pi \equiv x + 2y - z + 1 = 0$ en el punt de coordenades $(1, 0, 2)$.

Problema 33

Determineu el punt O del plànol $\pi \equiv x + y + z = 1$ que equidista dels punts $A(1, -1, 2)$, $B(3, 1, 2), C(1, 1, 0)$. Determineu l'equació de l'esfera de centre el punt O anterior que passa pels tres punts A, B, C.

Problema 34

Donades les esferes d'equacions:
$E_1 \equiv (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 4$, $E_2 \equiv (x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-3)^2 = 4$.

a) Proveu que són secants.
b) Determineu el plànol intersecció de les dues esferes.
c) Calculeu el centre i el radi de la circumferència intersecció.
d) Calculeu el volum de la intersecció de les dues esferes.

Problema 35

Donades les esferes d'equacions:
$E_1 \equiv (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 4$, $E_2 \equiv (x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-3)^2 = 9$.

a) Proveu que són secants.
b) Determineu el plànol intersecció de les dues esferes.
c) Calculeu el centre i el radi de la circumferència intersecció.
d) Calculeu el volum de la intersecció de les dues esferes.

Problema 36

Determineu l'equació de l'esfera que passe per l'origen de coordenades i per la circumferència d'equació $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25 \\ 2x - 3y + 5z - 5 = 0 \end{cases}$

Problema 37

Determineu l'equació de l'esfera que passa pel punt $P(4, -1, -1)$ i és tangents als tres plànols coordenats.

Problema 38

Donats el punt $P(1, 2, -1)$ i el plànol $\pi \equiv x + 2y - 2z + 2 = 0$, siga S l'esfera que és tangent al plànol π en un punt P' de forma que el segment $\overline{PP'}$ és un dels seus diàmetres.
Es demana:
Determinar les coordenades del punt de tangència P'
Determinar l'equació de l'esfera S.

Problema 39

Determineu l'equació de l'esfera que passa pels punts $A(4, 2, -3), B(-1, 3, 1)$ i té el centre en la recta que passa pels punts $C(2, 3, 7), D(1, 5, 9)$.

Problema 40
Siguen l'esfera $E \equiv x^2 + y^2 + z^2 = 9$ i els punts $A(3,0,6), B(3,5,1)$.
Determineu els plànols tangents a l'esfera E que contenen els punts A, B.

Problema 41
Determineu l'esfera de centre $A(6,3,-4)$ i tangent a l'eix O_x

Problema 42
Donats els punts $A(2,0,-1), B(-2,2,1)$, proveu que el lloc geomètric dels punts P de l'espai que compleixen $\overline{PA} = \sqrt{2} \cdot \overline{PB}$ és una esfera E.

a) Escriviu l'equació reduïda de l'esfera E.
b) Proveu que el punt $T(-10,8,7)$ pertany a l'esfera E.
c) Determineu l'equació del plànol tangent a l'esfera E en el punt T.

Problema 43
Determineu l'equació de l'esfera de centre en el plànol $z = 4$ tangent al plànol O_{xy} en el punt $T(2,3,0)$

Problema 44
Determineu l'equació de l'esfera que té el centre en el plànol $\pi_1 \equiv 2x + 2y - z + 2 = 0$ i és tangent al plànol $\pi_2 \equiv 2x + 2y - z - 4 = 0$ en el punt $T(3,0,2)$

Problema 45
Determineu l'equació de l'esfera que té el centre en el plànol $\pi_1 \equiv x + y + z = 0$ i és tangent al plànol $\pi_2 \equiv 2x - y + 2z - 3 = 0$ en el punt $T(3,1,-1)$

Problema 46
Determineu l'equació de l'esfera de radi 2 que té el centre en l'eix O_y que és tangent exterior a l'esfera $E \equiv (x-4)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 9$.
Determineu el punt de tangència.

Problema 47
Determineu l'equació de l'esfera de centre $C(6,3,-4)$ tangent a l'eix O_x

Problema 48
Determineu el lloc geomètric dels punts de l'espai que la suma dels quadrats de les distàncies als punts $A(-2,2,4), B(0,0,-4)$ és 80.
Determineu els seues elements.

Problema 49
Determineu la recta perpendicular al plànol $\pi \equiv x - y - 2 = 0$ i siga un diàmetre de l'esfera $E \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y = 0$
Calculeu els extrems del diàmetre.

Problema 50
Determineu el lloc geomètric dels punts X tal que $\overrightarrow{MX}$ i $\overrightarrow{NX}$ són ortogonals essent $M(1,1,0), N(0,1,0)$

Problema 51
Determineu l'equació de l'esfera concèntrica a l'esfera
$E \equiv x^2 + y^2 + z^2 + x + 2y - 2z - 1 = 0$, que passa pel punt $P\left(-\frac{1}{2}, -1, 1\right)$

Problema 52
Determineu l'equació de l'esfera que passa pels punts $A(6,-1,3), B(0,7,5)$ i té el centre en la recta $r \equiv \begin{cases} x-2z+3=0 \\ y-z+1=0 \end{cases}$

Problema 53
Determineu els plànols tangents a l'esfera d'equació
$E \equiv x^2+y^2+z^2-4x+2y-8z+10=0$
En els punts d'intersecció de la recta $r \equiv \begin{cases} x-2z=-1 \\ y+z=1 \end{cases}$ i l'esfera.

Problema 54
Determineu el lloc geomètric dels punts tals que la proporció entre les distàncies a dos punts fixos $A(1,1,-2), B(-2,3,2)$ és $1:3$.

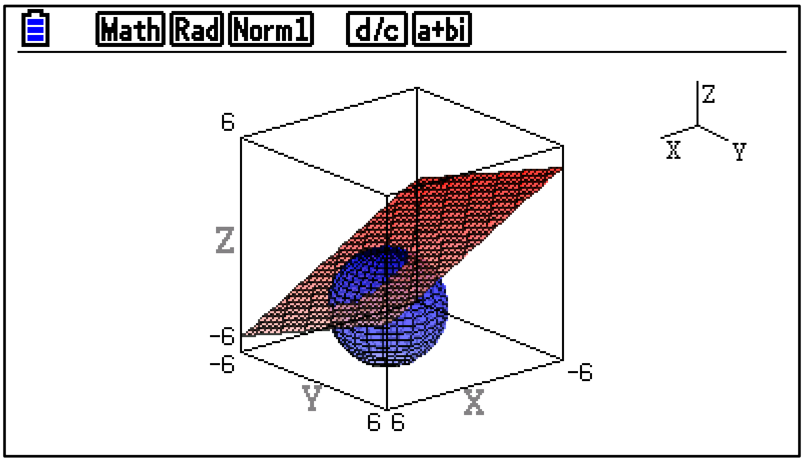
Problema 55
Determineu l'equació de l'esfera tangent a la recta intersecció dels plànols
$\pi_1 \equiv x-y+z=0, \pi_2 \equiv 2x-y-z=3$ i concèntrica a l'esfera d'equació
$E \equiv x^2+y^2+z^2-6y-8z+16=0$

Problema 56
Determineu les equacions de les esferes els centres de les quals pertanyen al plànol $\pi \equiv 3x+2y-z-8=0$ i són tangents als plànols coordenats.

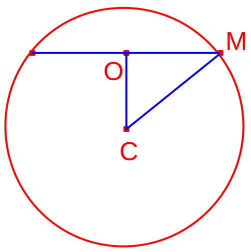
Problema 57
Determineu la màxima esfera de centre $O(5,4,9)$ continguda en el primer octant.

Problema 1
Siga l'esfera d'equació $E \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6z = 0$.
Determineu les coordenades del centre i la mesura del radi.
Verifiqueu si el plànol $\Pi \equiv 3x - 2y + 6z + 1 = 0$ i l'esfera són secants.
Determineu el radi de la circumferència intersecció de E, Π.
Determineu el centre de la circumferència intersecció de E, Π.

Solució:
Obrim el *Menú Gráfico 3D*.
Representem l'esfera i el plànol:



Completant quadrats:
$E \equiv (x-1)^2 + y^2 + (z+3)^2 = \left(\sqrt{10}\right)^2$
Les coordenades del centre són $C(1, 0, -3)$ i el radi $R = \sqrt{10}$.
Per estudiar la posició relativa del plànol i l'esfera, calculem la distància del centre de l'esfera al plànol.
$d(C, \Pi) = \left| \dfrac{3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 + 6(-3) + 1}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 6^2}} \right| = 2$
$d(C, \Pi) = 2 < R = \sqrt{10}$
Aleshores, el plànol i l'esfera són secants.

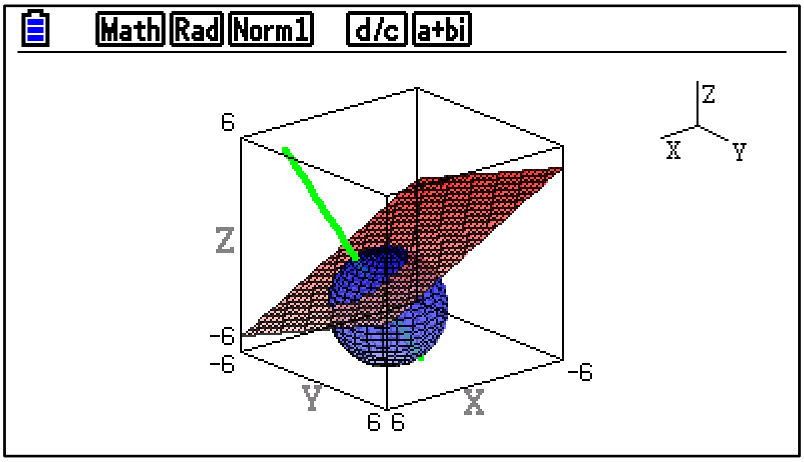


Considerem la circumferència intersecció de l'esfera i el plànol.
Siga O el centre de la circumferència.

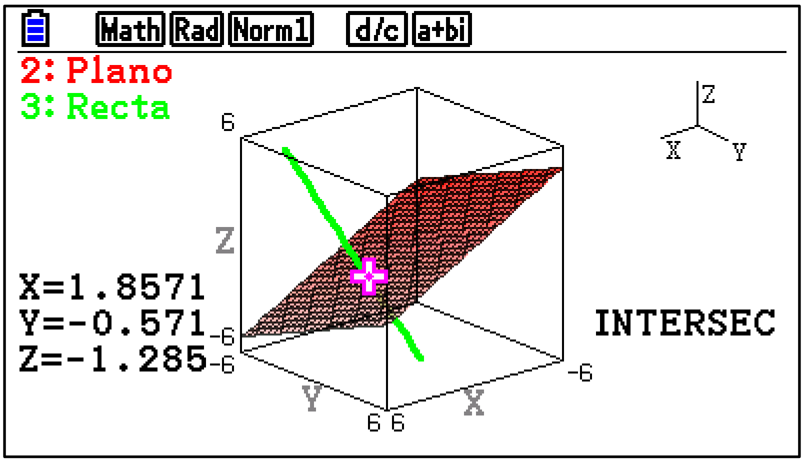
Siga la secció de l'esfera que passa pel centre C i perpendicular al plànol
Siga $r = \overline{OM}$ el radi de la circumferència intersecció.
$\overline{CO} = 2$, $\overline{CM} = \sqrt{10}$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{COM}$
$r^2 = \left(\sqrt{10}\right)^2 - 2^2 = 6$
$r = \sqrt{6}$

Per calcular el centre de la circumferència intersecció de E, Π, determinem la intersecció de la recta perpendicular a Π que passa pel centre $C(1,0,-3)$ de l'esfera i el plànol Π

El vector director de la recta perpendicular al plànol que passa per C és el vector característic del plànol $v=(3,-2,6)$.
La seua equació vectorial és:
$r \equiv (x,y,z)=(1,0,-3)+(3,-2,6)\alpha$
Obrim el *Menú Gráfico 3D*.
Dibuixem la recta r:



Amb la funció *G-Solv* determinem la intersecció de la recta r i el plànol Π.



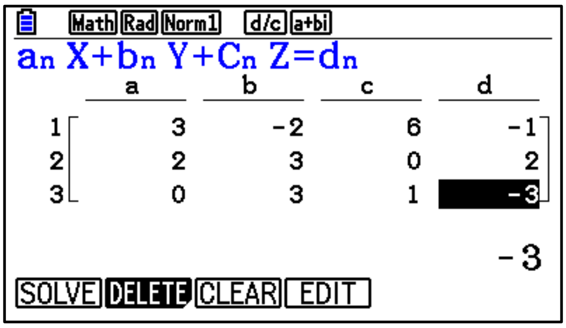
El centre de la circumferència és:
$P(1.8571,-0.571,-1.285)$

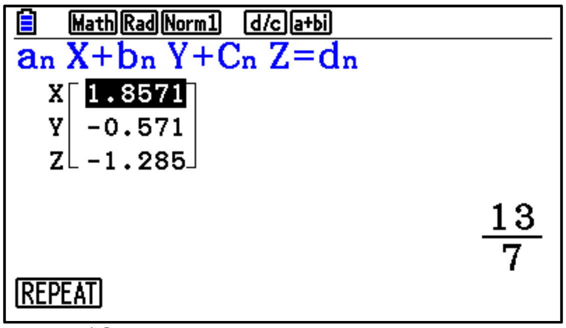
Analíticament, per calcular el punt intersecció resoldrem el sistema format per la recta r i el plànol Π.

$$r \equiv \begin{cases} 2x+3y=2 \\ 3y+z=-3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x-2y+6z=-1 \\ 2x+3y=2 \\ 3y+z=-3 \end{cases}.$$

Obrim el *Menú Ecuación*:
Resolem el sistema d'equacions lineals format per la recta r i el plànol Π.





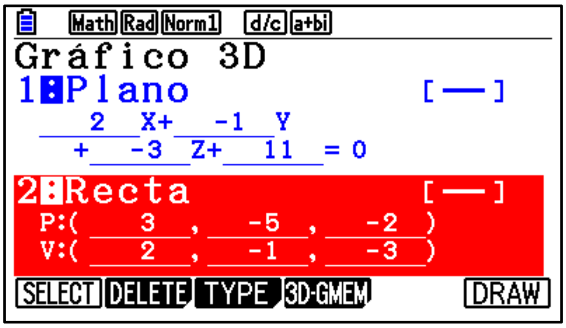
$$\begin{cases} x = \dfrac{13}{7} \\ y = -\dfrac{4}{7} \\ z = -\dfrac{9}{7} \end{cases}$$

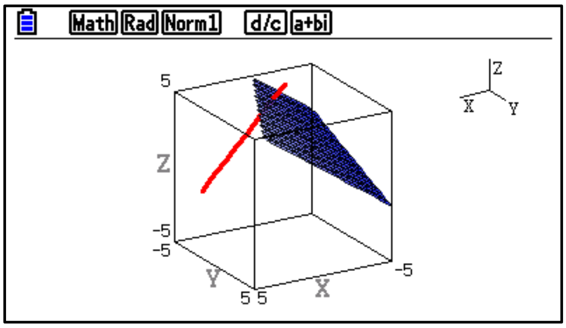
Aleshores, el centre de la circumferència és:

$P\left(\frac{13}{7}, -\frac{4}{7}, -\frac{9}{7}\right)$

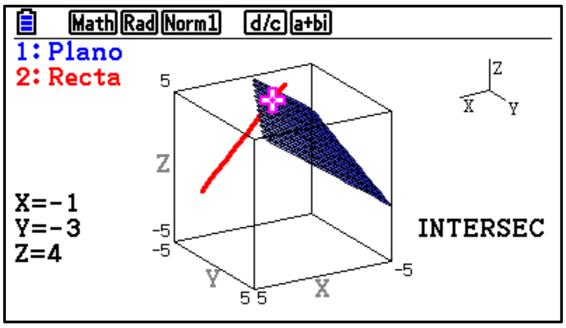
Problema 2
Determineu l'equació de l'esfera de centre $C(3,-5,-2)$ i tangent al plànol
$2x-y-3z+11=0$

Solució:
Obrim el *Menú Gráfico 3D*.
Definim el plànol i la recta que passa pel punt $C(3,-5,-2)$ i té vector director el característic del plànol $a=(2,-1,-3)$. Recta perpendicular al plànol.
La intersecció de la recta i el plànol ens dóna el punt de tangència de l'esfera i el plànol.

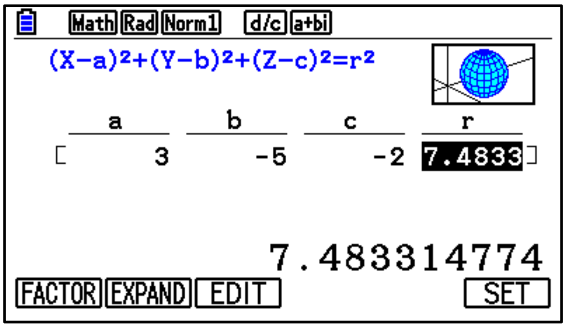


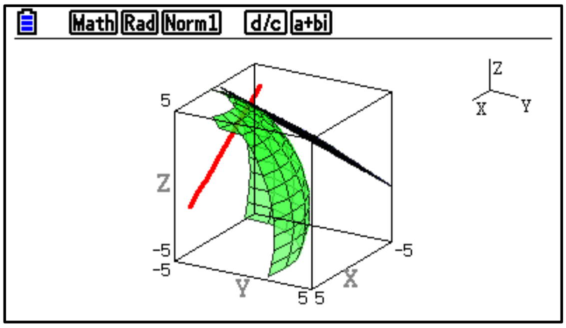


Amb la funció *G-Solv*, determinem la intersecció de la recta i el plànol.



El punt de tangència és $T(-1,3,4)$
El radi de l'esfera és la distància entre el centre i el punt de tangència:
$r=\sqrt{(-4)^2+2^2+6^2}=2\sqrt{14}$
L'equació de l'esfera és:
$E\equiv(x-3)^2+(y+5)^2+(z+2)^2=\left(2\sqrt{14}\right)^2$
Definim l'equació de l'esfera i la representem gràficament.





Problema 3
Determineu l'equació de l'esfera de radi $r = 3$, que és tangent al plànol $x + 2y + 2z + 3 = 0$ en el punt $A(1, 1, -3)$

Solució:
El centre de l'esfera pertany a la recta perpendicular al plànol en el punt $A(1, 1, -3)$
La recta té per vector director el característic del plànol, $a = (1, 2, 2)$
La seua equació paramètrica és:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = 1 + 2\alpha \\ z = -3 + 2\alpha \end{cases}$$

Un punt qualsevol de la recta r és:
$P(1 + \alpha, 1 + 2\alpha, -3 + 2\alpha)$
$\overrightarrow{AP} = (\alpha, 2\alpha, 2\alpha)$

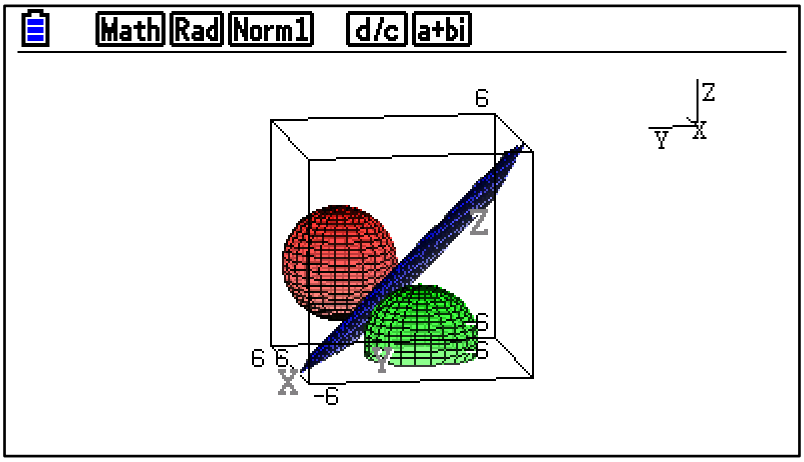
El radi de l'esfera és:
$r = \left\|\overrightarrow{AP}\right\| = 3$
$\sqrt{\alpha^2 + 4\alpha^2 + 4\alpha^2} = 3$

Resolent l'equació:
$\alpha = 1, -1$
El problema de dues solucions.

Si $\alpha = 1$
L'esfera de centre $O_1(2, 3, -1)$
La seua equació és:
$C_1 \equiv (x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z + 1)^2 = 3^2$

Si $\alpha = -1$
L'esfera de centre $O_1(0, -1, -5)$
La seua equació és:
$C_2 \equiv x^2 + (y + 1)^2 + (z + 5)^2 = 3^2$

Obrim el *Menú Gráfico 3D*
Definim el plànol $x + 2y + 2z + 3 = 0$ i les esferes
$C_1 \equiv (x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z + 1)^2 = 3^2$
$C_2 \equiv x^2 + (y + 1)^2 + (z + 5)^2 = 3^2$

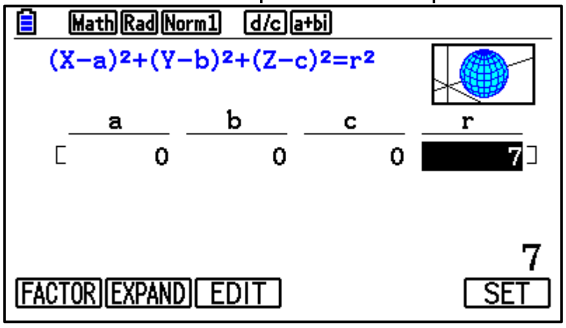


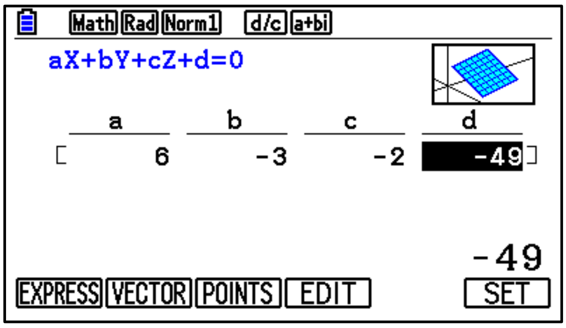
Problema 4
Determineu l’equació del plànol tangent a l’esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 49$ en el punt $M(6, -3, -2)$

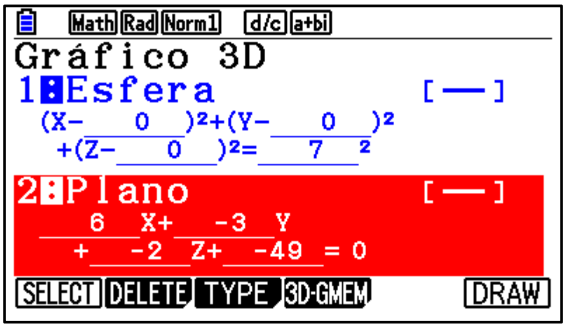
Solució:
L’esfera té centre el punt $O(0, 0, 0)$ i radi $r = 7$

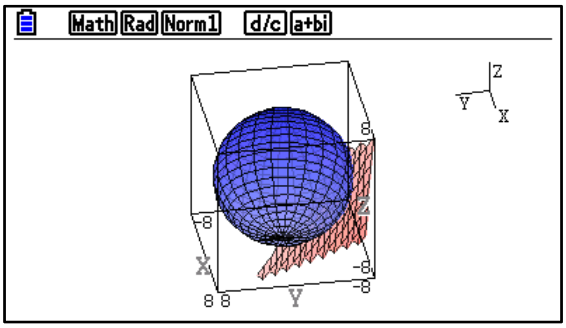
El punt $M(6, -3, -2)$ pertany a l’esfera ja que $6^2 + (-3)^2 + (-2)^2 = 49$
El vector característic del plànol tangent a l’esfera en el punt M és:
$\overrightarrow{OM} = (6, -3, -2)$
L’equació del plànol és:
$6(x - 6) - 3(y + 3) - 2(z + 2) = 0$
Simplificant:
$6x - 3y - 2z - 49 = 0$

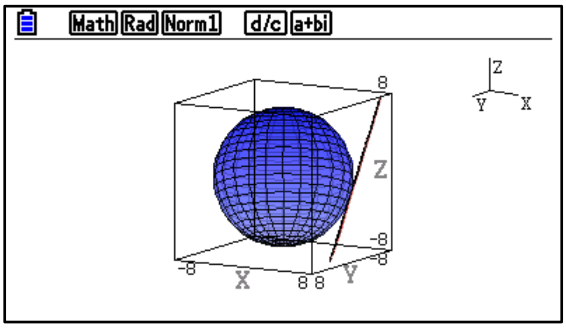
Obrim el *Menú Gráfico 3D*
Definim l’esfera i el plànol i els representem:











Problema 5

Determineu les equacions dels plànols tangents a l'esfera
$(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=25$ paral·lels al plànol $4x+3z-17=0$

Solució:

L'esfera té centre $O(3,-2,1)$ i radi $r=5$

El vector característic del plànol $4x+3z-17=0$ és $a=(4,0,3)$

La recta perpendicular al plànol $4x+3z-17=0$ que passa pel centre de l'esfera té direcció el vector característic del plànol:

$(x,y,z)=(3,-2,1)+\alpha(4,0,3)$

Amb la intersecció de la recta i l'esfera calculem els punts de tangència:

$$\begin{cases}(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=25\\ (x,y,z)=(3,-2,1)+\alpha(4,0,3)\end{cases}$$

$(4\alpha)^2+0^2+(3\alpha)^2=25$

Aleshores, $\alpha=1,-1$

Si $\alpha=1$, el punt de tangència és $T_1(7,-2,4)$

L'equació del plànol és:

$\pi_1\equiv 4(x-7)+3(z-4)=0$

$\pi_1\equiv 4x+3z-40=0$

$\alpha=-1$

el punt de tangència és $T_2(-1,-2,-2)$

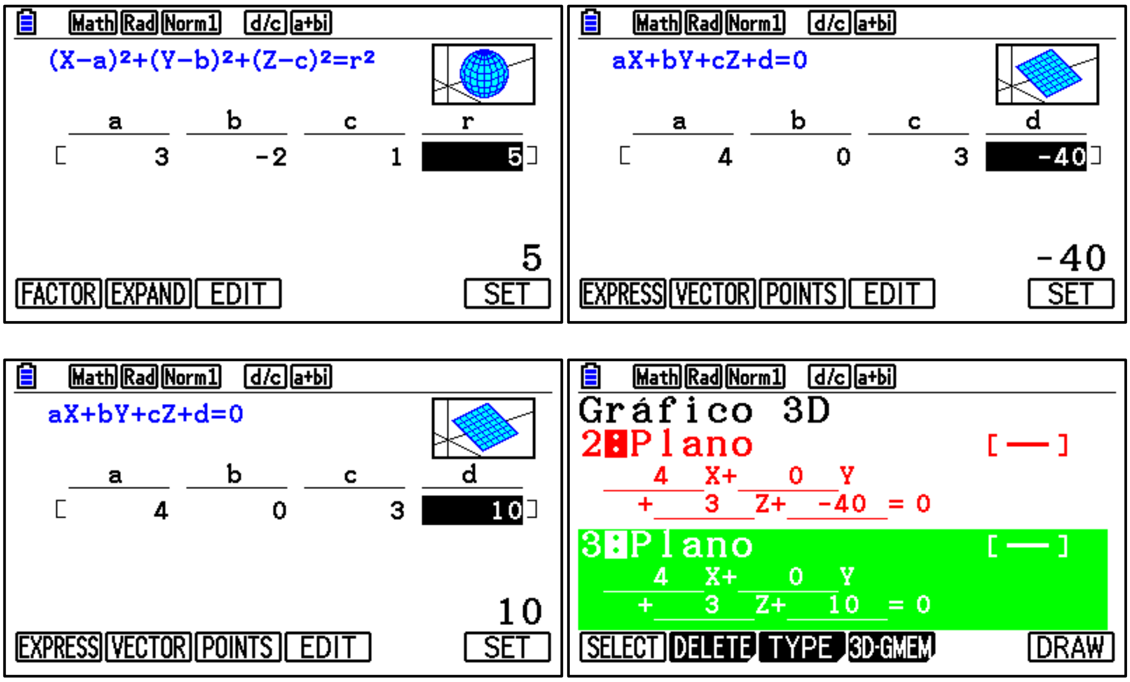
L'equació del plànol és:

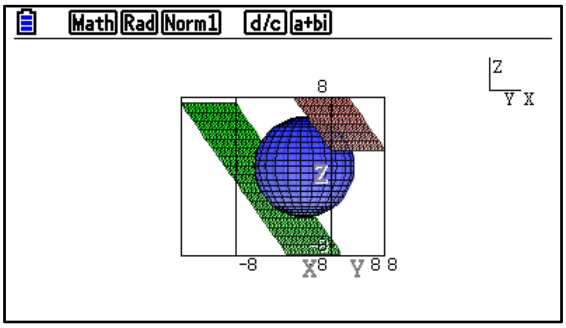
$\pi_2\equiv 4(x+1)+3(z+2)=0$

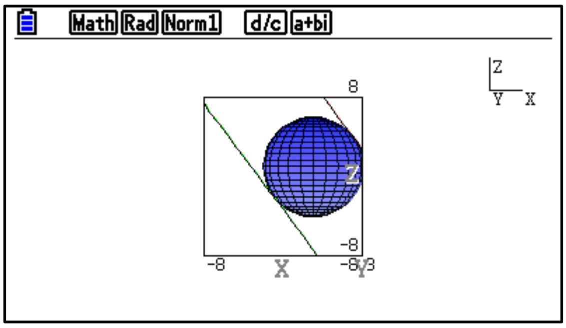
$\pi_2\equiv 4x+3z+10=0$

Obrim el *Menú Gráfico 3D*

Definim l'esfera i els dos plànols i els representem:

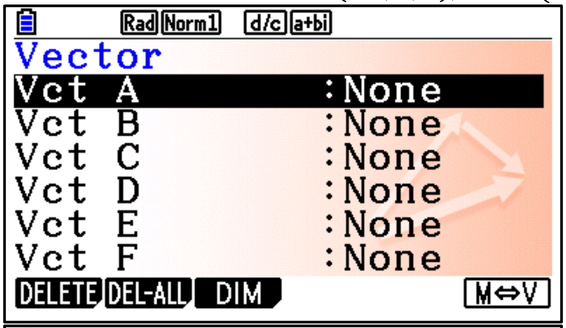


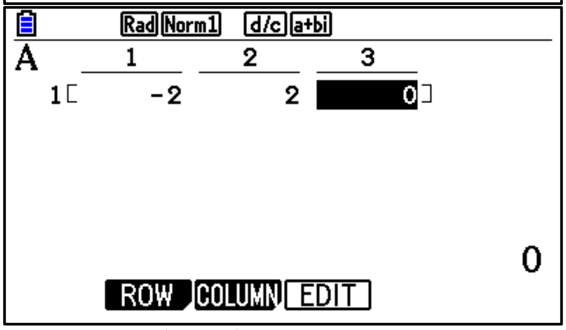


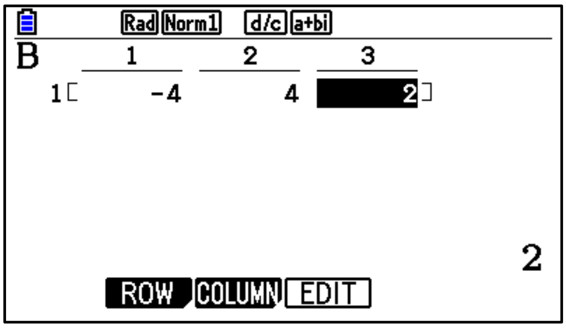


Problema 6
Determineu l’equació de la circumferència que passa pels punts
$A(3,-1,-2), B(1,1,-2), C(-1,3,0)$

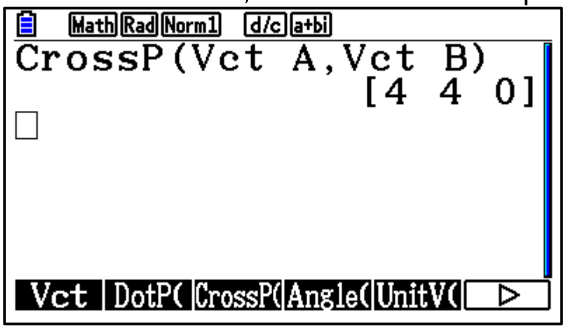
Solució:
Determineu el plànol que passa pels punts A, B, C:
Obrim el *Menú Ejec-Mat*:
Definim els vectors $\overrightarrow{AB} = (-2,2,0), \overrightarrow{AC} = (-4,4,2)$







Calculem $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$, vector característic que passa pels punts A, B, C.



El plànol que passa per A, B, C té equació:
$\pi_{ABC} \equiv x + y + D = 0$
El punt $A(3,-1,-2)$ pertany al plànol.
Aleshores, $3 - 1 + D = 0$
$D = -2$
$\pi_{ABC} \equiv x + y - 2 = 0$
Per determinar el centre d’una de les esferes que passen pels punts A, B, C determinarem els plànols mediadors dels segments $\overline{AB}, \overline{AC}$ i calcularem la intersecció d’aquests dos plànols i del plànol que passa per A, B, C.
El punt mig C_1 del segment $\overline{AB}$ té coordenades:
$C_1(2,0,-2)$
El vector característic del plànol mediador del segment $\overline{AB}$ és $\overrightarrow{AB} = (-2,2,0)$
La seua equació és:
$\pi_1 \equiv -x + y + E = 0$
El punt $C_1(2,0,-2)$ pertany al plànol
$-2 + 0 + E = 0$

$E = 2$

$\pi_1 \equiv -x + y + 2 = 0$

El punt mig B_1 del segment $\overline{AC}$ té coordenades:

$B_1(1, 1, -1)$

El vector característic del plànol mediador del segment $\overline{AC}$ és $\overrightarrow{AC} = (-4, 4, 2)$

La seua equació és:

$\pi_2 \equiv -2x + 2y + z + F = 0$

El punt $B_1(1, 1, -1)$ pertany al plànol

$-2 + 2 - 1 + F = 0$

$F = 1$

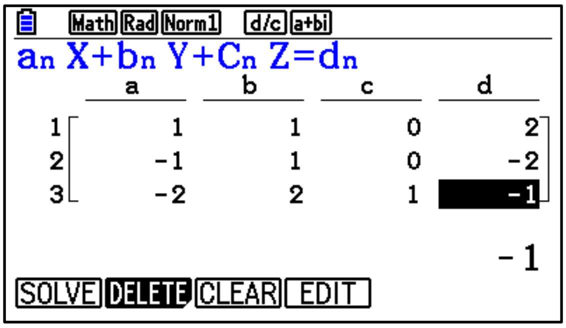
$\pi_2 \equiv -2x + 2y + z + 1 = 0$

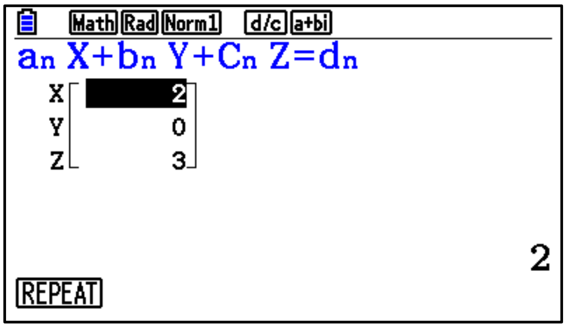
El centre és la intersecció dels tres plànol.:

Obrim el *Menú Ecuación*:

Resolem el sistema:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ -x + y = -2 \\ -2x + 2y + z = -1 \end{cases}$$





Les coordenades del centre són:

$O(2, 0, 3)$

El radi de la circumferència que passa pels punts A, B, C és:

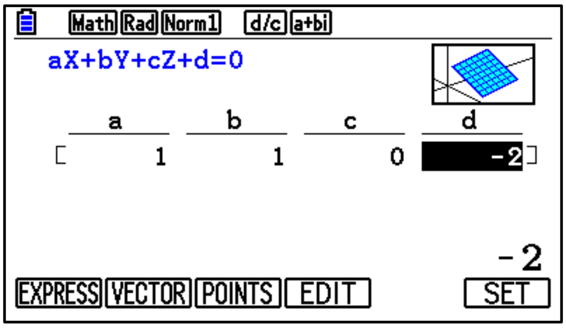
$r = \sqrt{(3-2)^2 + (-1-0)^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{27}$

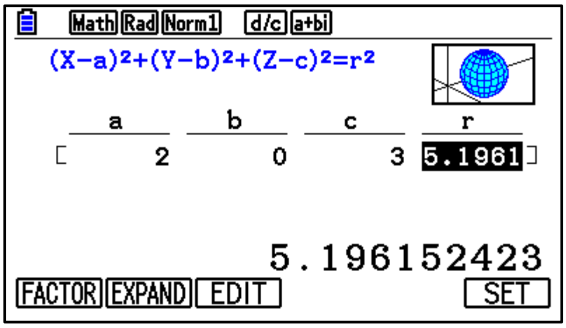
L'equació de la circumferència és igual a la intersecció del plànol $\pi_{ABC} \equiv x + y - 2 = 0$ i l'esfera de centre $O(2, 0, 3)$ i radi $r = \sqrt{27}$

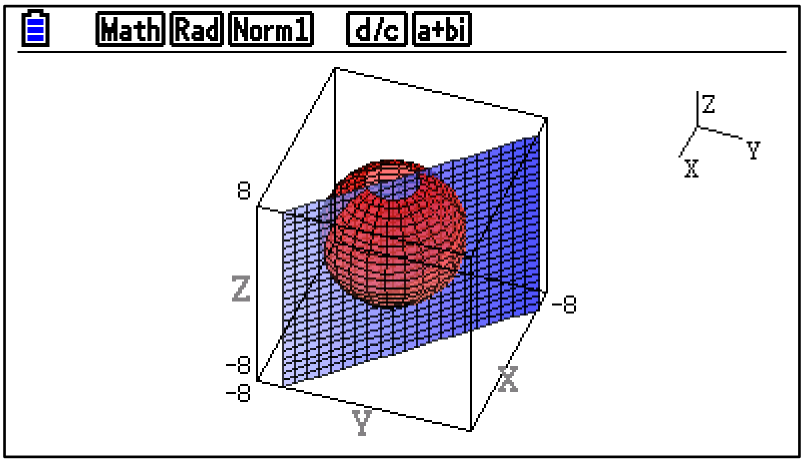
$$\begin{cases} x + y = 2 \\ (x-2)^2 + y^2 + (z-3)^2 = 27 \end{cases}$$

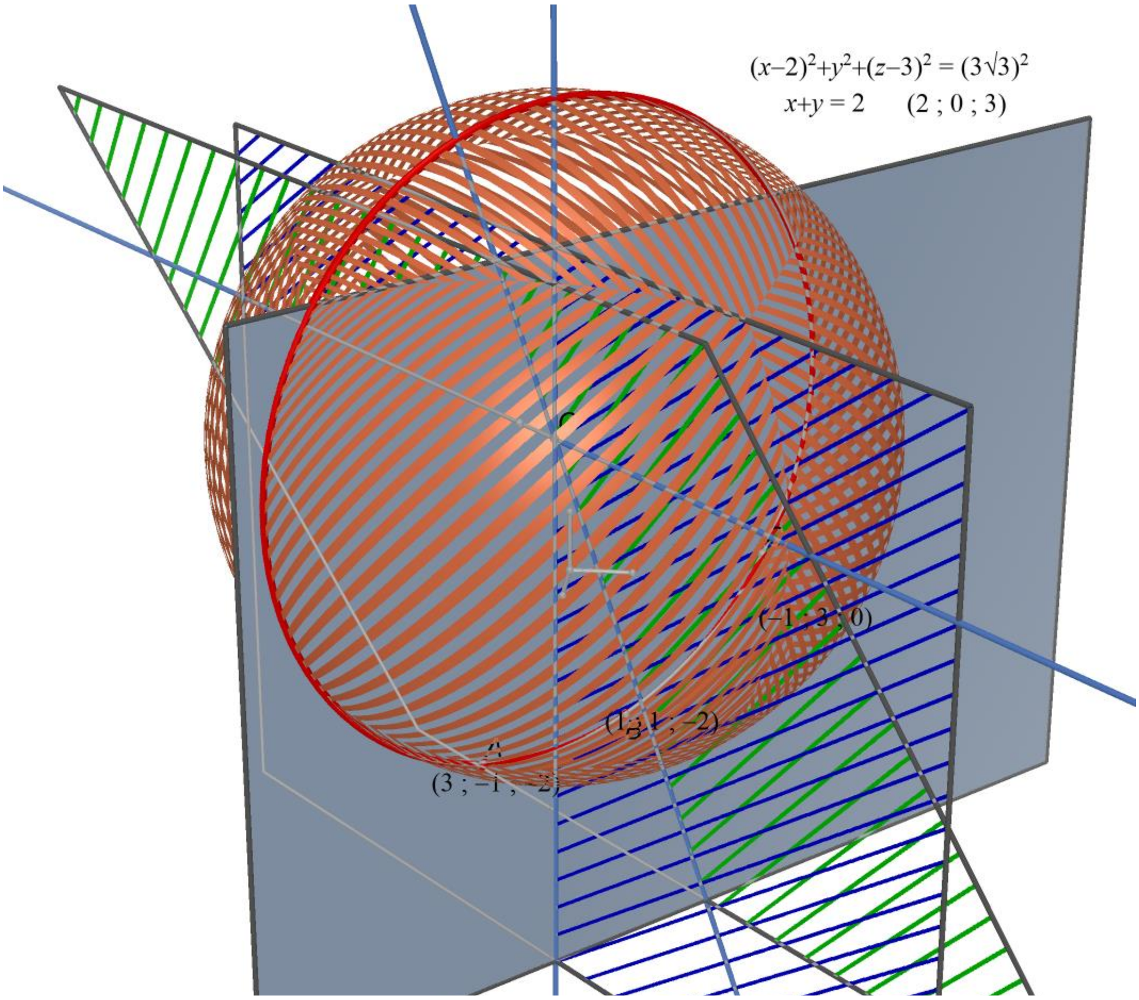
Obrim el *Menú Gráfico 3D*

Definim i representem les equacions del plànol $\pi_{ABC} \equiv x + y - 2 = 0$ i l'esfera $(x-2)^2 + y^2 + (z-3)^2 = 27$






Math Rad Norm1 d/c a+bi
Z
Y
X
8
-8
-8
-8


$(x-2)^2+y^2+(z-3)^2 = (3\sqrt{3})^2$
$x+y = 2$ (2 ; 0 ; 3)
(−1 ; 3 ; 0)
(1 ; 1 ; −2)
(3 ; −1 ; −2)

Problema 7
Demostreu que el plànol $2x-6y+3z-49=0$ és tangent a l'esfera
$x^2+y^2+z^2=49$
Calculeu les coordenades del punt de tangència.

Solució:
l'esfera $x^2+y^2+z^2=49$ té centre $O(0,0,0)$ i radi $r=7$.

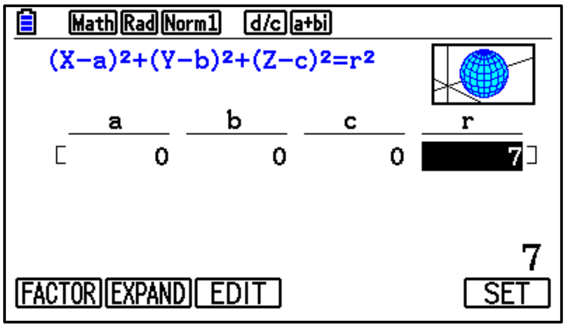
El plànol és tangent si la distància del centre de l'esfera al plànol és igual al radi.
La distància del centre $O(0,0,0)$ al plànol $2x-6y+3z-49=0$ és:
$$d=\frac{|2\cdot 0-6\cdot 0+3\cdot 0-49|}{\sqrt{2^2+(-6)^2+3^2}}=7$$
Aleshores el plànol és tangent a l'esfera.

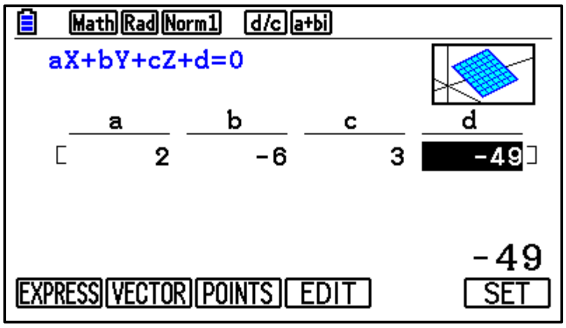
Per calcular el punt de tangència calcularem la intersecció del plànol $2x-6y+3z-49=0$ i la recta perpendicular al plànol que passa pel centre de l'esfera:

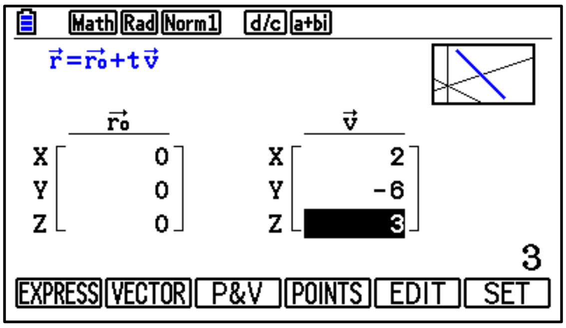
La recta passa pel punt $O(0,0,0)$ i té direcció el vector característic del plànol,
$a=(2,-6,3)$
La seua equació és
$r\equiv(x,y,z)=(0,0,0)+\alpha(2,-6,3)$

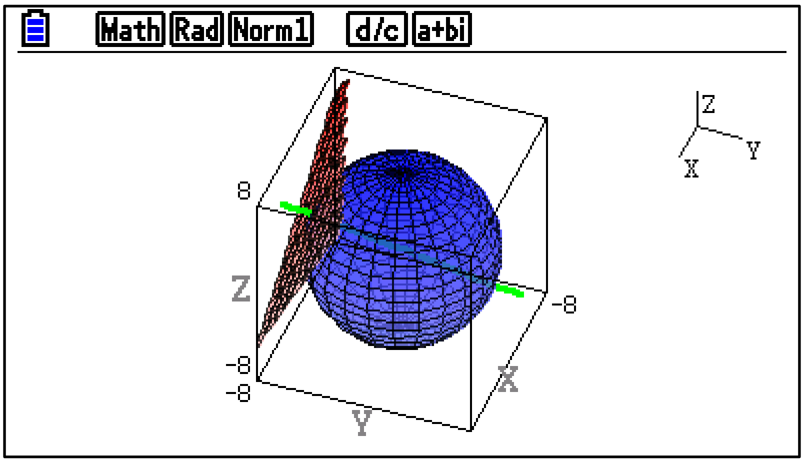
$(x,y,z)=(2\alpha,-6\alpha,3\alpha)$
Substituint les coordenades en l'equació del plànol:
$2\cdot(2\alpha)-6(-6\alpha)+3(3\alpha)-49=0$
Resolent l'equació $\alpha=1$
El punt de tangència de coordenades $P(2,-6,3)$

Obrim el *Menú Gráfico 3D*.
Definim i representem l'equació de l'esfera, del plànol i de la recta.

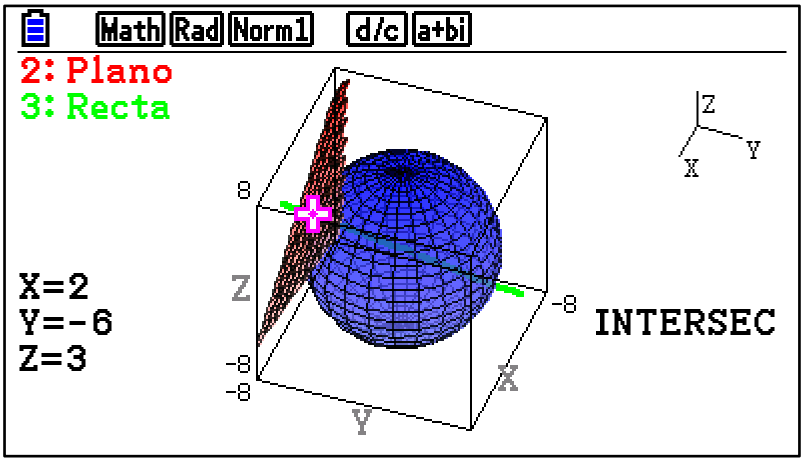








Determinem amb la funció *G-Solv,* la intersecció de la recta i el plànol:



El punt de tangència de coordenades $P(2, -6, 3)$

Problema 8
Determineu l'equació del plànol tangent a l'esfera $(x-3)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=24$ que passe pel punt $M(-1,3,0)$

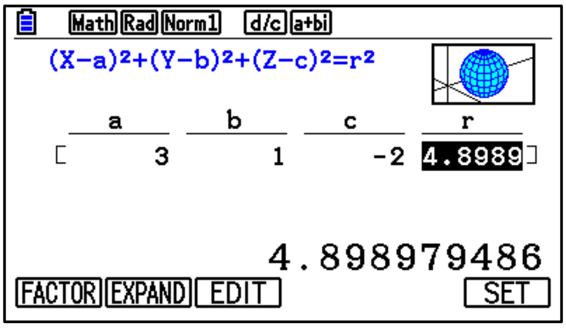
Solució:
L'esfera $(x-3)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=24$ té centre $O(3,1,-2)$ i radi $r=\sqrt{24}$
El punt $M(-1,3,0)$ pertany a l'esfera ja que $(-1-3)^2+(3-1)^2+(0+2)^2=24$

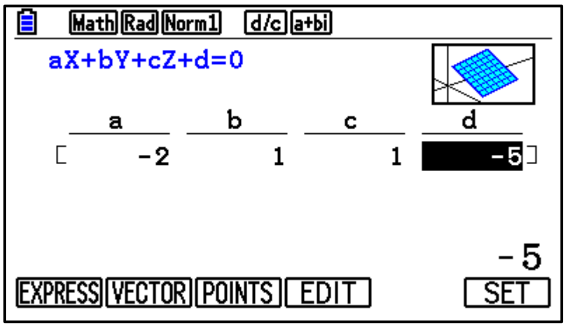
El plànol tangent a l'esfera passa pel punt $M(-1,3,0)$ i té vector característic $\overrightarrow{OM}=(-4,2,2)$

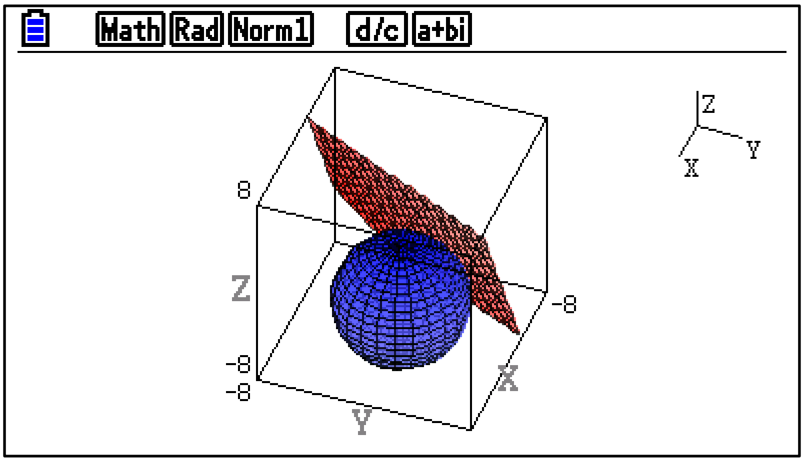
L'equació del plànol és:
$-4(x+1)+2(y-3)+2(z-0)=0$

Simplificant:
$-2x+y+z-5=0$

Obrim el *Menú Gráfico 3D*.
Definim i representem l'esfera i el plànol.







Problema 9
Determineu l'equació de l'esfera que és tangent als plànols $\Pi \equiv 6x - 3y - 2z - 35 = 0$, $\Omega \equiv 6x - 3y - 2z + 63 = 0$, sabent que el punt $M(5, -1, -1)$ és un punt de tangència en un dels plànols.

Solució:
Els dos plànols són paral·lels ja que $\frac{6}{6} = \frac{-2}{-2} = \frac{-2}{-2} \neq \frac{-35}{63}$

Notem que $M(5, -1, -1)$ pertany al plànol $\Pi \equiv 6x - 3y - 2z - 35 = 0$ ja que satisfà la seua equació:
$6 \cdot 5 - 3 \cdot (-1) - 2 \cdot (-1) - 35 = 0$

El diàmetre de l'esfera és la distància del punt $M(5, -1, -1)$ al plànol
$\Omega \equiv 6x - 3y - 2z + 63 = 0$

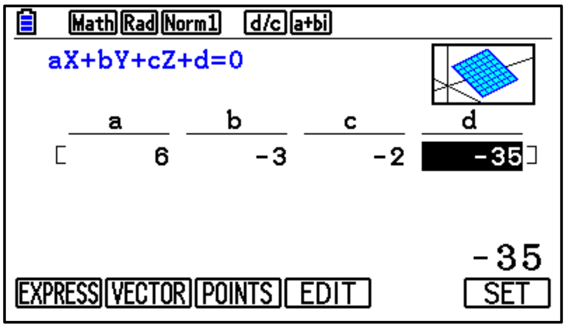
$$2r = \left| \frac{6 \cdot 5 - 3 \cdot (-1) - 2 \cdot (-1) + 63}{\sqrt{6^2 + (-3)^2 + (-2)^2}} \right| = 14$$
Aleshores, el radi de l'esfera és $r = 7$

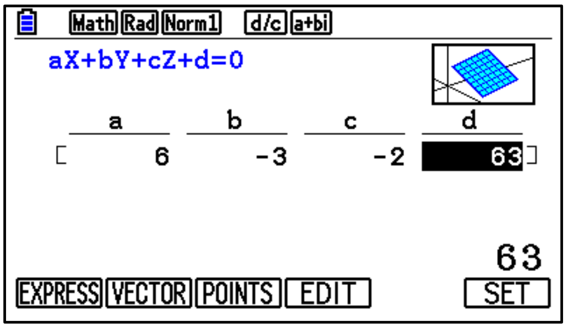
El centre de l'esfera és el punt mig del segment format pel punt M i la projecció de M sobre el plànol $\Omega \equiv 6x - 3y - 2z + 63 = 0$

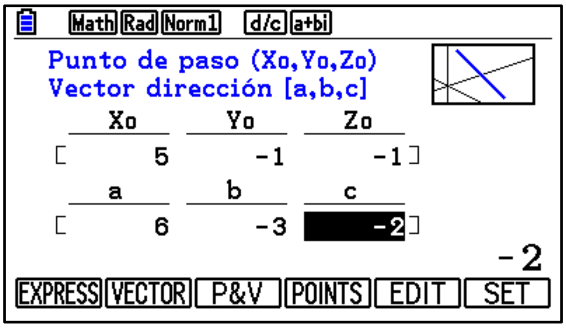
Calculem l'equació de la recta perpendicular al plànol $\Omega \equiv 6x - 3y - 2z + 63 = 0$ que passa per M que té vector director el característic del plànol $a = (6, -3, -2)$

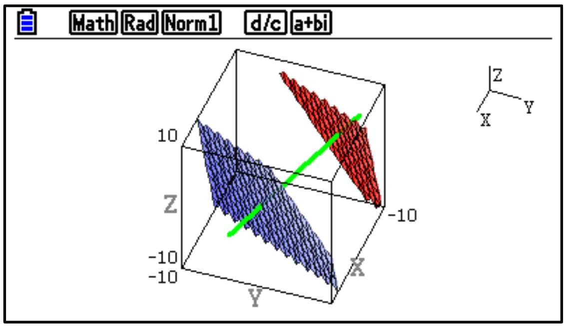
La seua equació és:
$r \equiv (x, y, z) = (5, -1, -1) + \alpha(6, -3, -2)$

Obrim el *Menú Gráfico 3D*
Definim i representem els dos plànols i la recta.

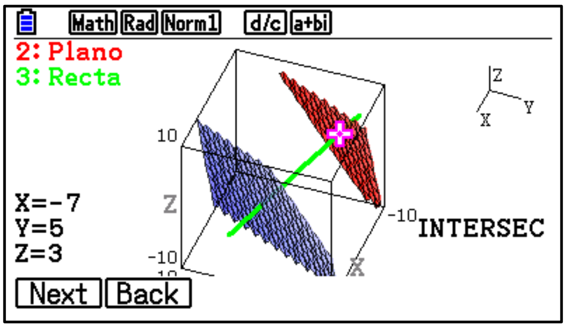






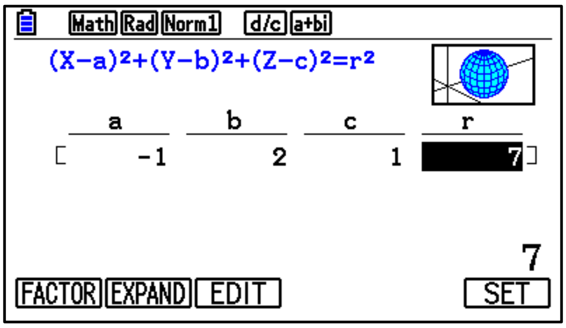


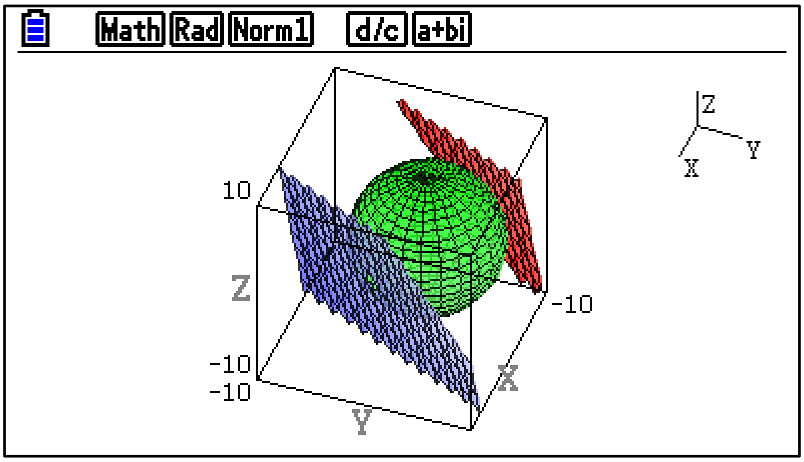
Per determinar la intersecció del plànol $\Omega \equiv 6x - 3y - 2z + 63 = 0$ i la recta $r \equiv (x, y, z) = (5, -1, -1) + \alpha(6, -3, -2)$ s'utilitza la funció *G-Solv*:



Les coordenades del punt projecció són:
$M'(-7, 5, 3)$
El centre de l'esfera és el punt mig del segment $\overline{MM'}$
Les seues coordenades són:
$O(-1, 2, 1)$
L'equació de l'esfera és:
$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 7^2$

Obrim el *Menú Gráfico 3D*.
Definim l'equació de l'esfera i la representem.

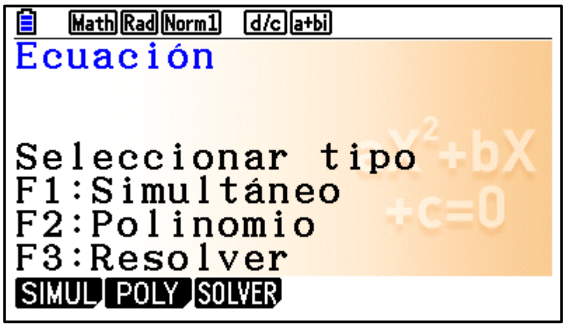


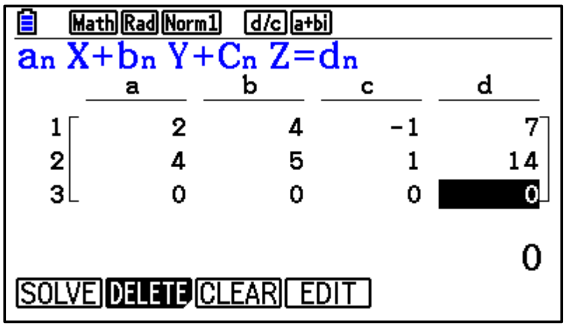


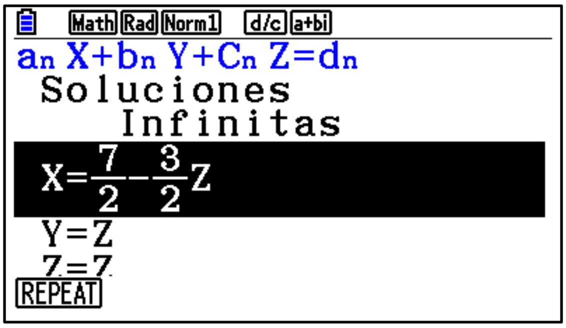
Problema 10

Una esfera té el centre en la recta $r \equiv \begin{cases} 2x+4y-z-7=0 \\ 4x+5y+z-14=0 \end{cases}$ i és tangent als plànols $\Pi \equiv x+2y-2z-2=0$, $\Omega \equiv x+2y-2z+4=0$. Determineu la seua equació:

Solució:
Determinem l'equació paramètrica de la recta r.
Obrim el *Menú Ecuación*





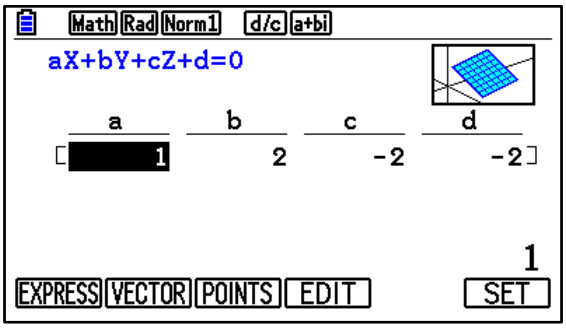


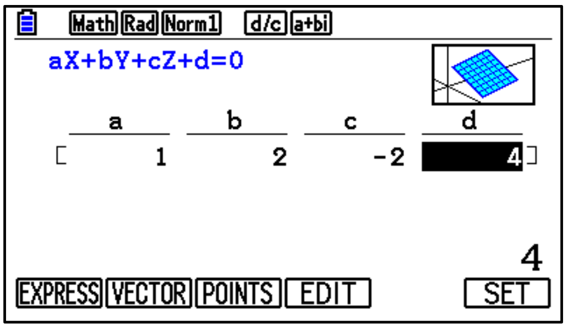
L'equació paramètrica de la recta r és:

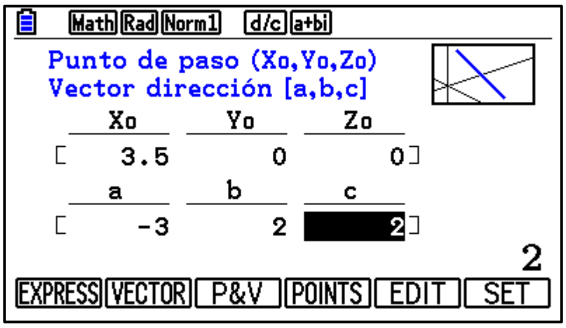
$$r \equiv \begin{cases} x = \dfrac{7}{2} - 3\alpha \\ y = 2\alpha \\ z = 2\alpha \end{cases}$$

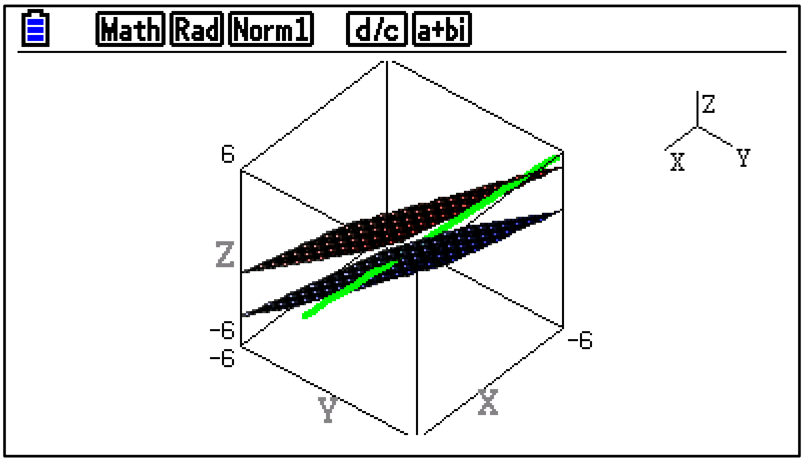
Els dos plànols són paral·lels ja que $\frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{-2}{-2} \neq \frac{-2}{4}$

Obrim el *Menú Gráfico 3D*
Definim els dos plànols i la recta.

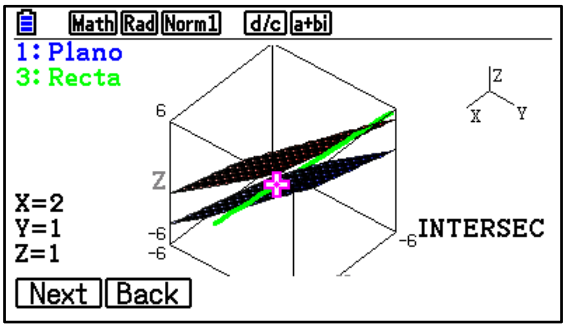


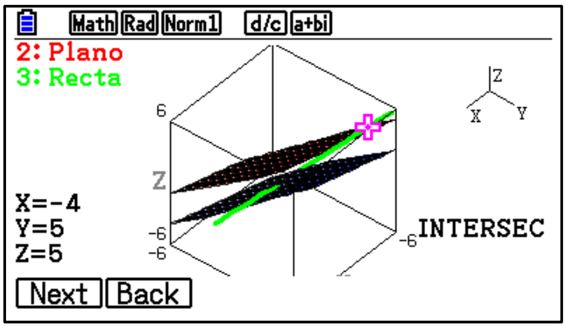






Amb la funció *G-Solv*, determinem la intersecció de la recta i cadascun dels plànols.





Les coordenades del punt intersecció del plànol $\Pi \equiv x + 2y - 2z - 2 = 0$ i la recta $r \equiv \begin{cases} 2x + 4y - z - 7 = 0 \\ 4x + 5y + z - 14 = 0 \end{cases}$ és:
$P(2, 1, 1)$

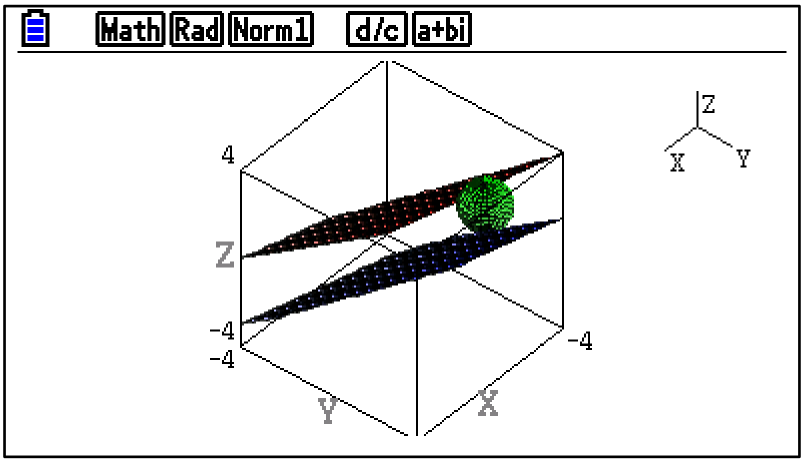
Les coordenades del punt intersecció del plànol $\Omega \equiv x + 2y - 2z + 4 = 0$ i la recta $r \equiv \begin{cases} 2x + 4y - z - 7 = 0 \\ 4x + 5y + z - 14 = 0 \end{cases}$ és:
$Q(-4, 5, 5)$

El centre de l’esfera és el punt mig del segment $\overline{PQ}$. Les seues coordenades són:
$O(-1, 3.3)$
El radi és igual a la distància del centre $O(-1, 3.3)$ al plànol $\Pi \equiv x + 2y - 2z - 2 = 0$

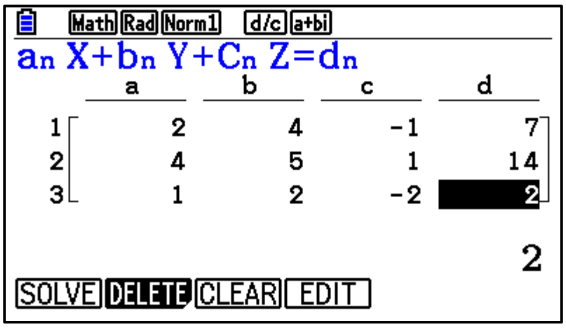
$$r = \left| \frac{-1 + 2 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 2}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} \right| = 1$$

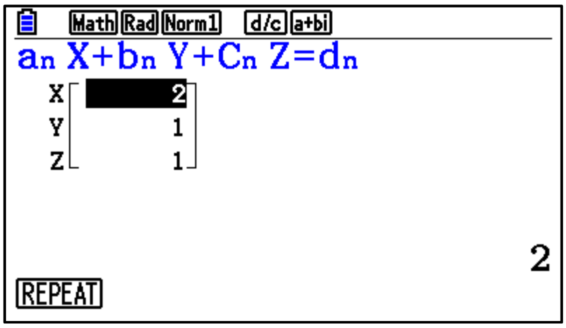
L’equació de l’esfera és:
$(x + 1)^2 + (y - 3)^2 + (z - 3)^2 = 1^2$

Definim i representem l'esfera:

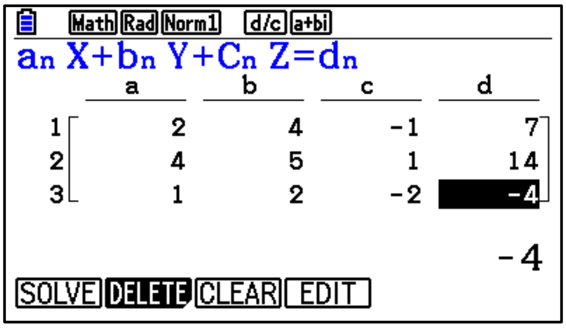


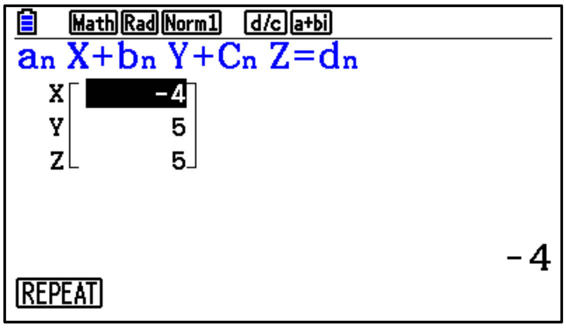
Per calcular els punts intersecció de la recta r i cadascun dels plànol es poden resoldre els sistemes format per la recta i cadascun dels plànols:
Obrim el *Menú Ecuación*:





Les coordenades del punt intersecció del plànol $\Pi \equiv x + 2y - 2z - 2 = 0$ i la recta $r \equiv \begin{cases} 2x + 4y - z - 7 = 0 \\ 4x + 5y + z - 14 = 0 \end{cases}$ és:
$P(2, 1, 1)$





Les coordenades del punt intersecció del plànol $\Omega \equiv x + 2y - 2z + 4 = 0$ i la recta $r \equiv \begin{cases} 2x + 4y - z - 7 = 0 \\ 4x + 5y + z - 14 = 0 \end{cases}$ és:
$Q(-4, 5, 5)$

Problema 11

Determineu la posició relativa de la recta $r \equiv \begin{cases} x = 2 - 2\alpha \\ y = -\frac{7}{2} + 3\alpha \\ z = -2 + \alpha \end{cases}$ i l'esfera

$E \equiv x^2 + y^2 + z^2 + x - 4y - 3z + \dfrac{1}{2} = 0$

Solució:
Completant quadrats l'equació de l'esfera és:

$\left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 + (y - 2)^2 + \left(z - \dfrac{3}{2}\right)^2 = 6$

El centre de l'esfera és el punt $O\left(-\frac{1}{2}, 2, \frac{3}{2}\right)$ el radi és $r = \sqrt{6}$

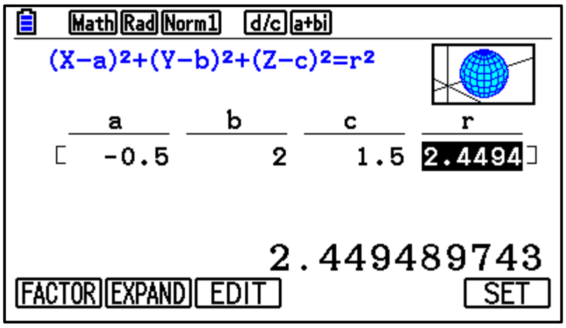
Calculem la projecció del centre O sobre la recta r.
Considerem el plànol perpendicular a la recta r que passa per $O\left(-\frac{1}{2}, 2, \frac{3}{2}\right)$ i vector característic el director de la recta $v = (-2, 3, 1)$
La seua equació és:

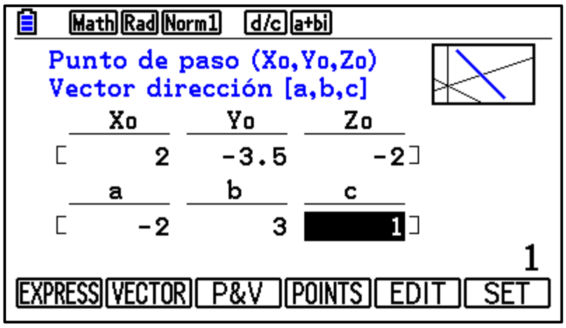
$\Pi \equiv -2\left(x + \dfrac{1}{2}\right) + 3(y - 2) + \left(z - \dfrac{3}{2}\right) = 0$

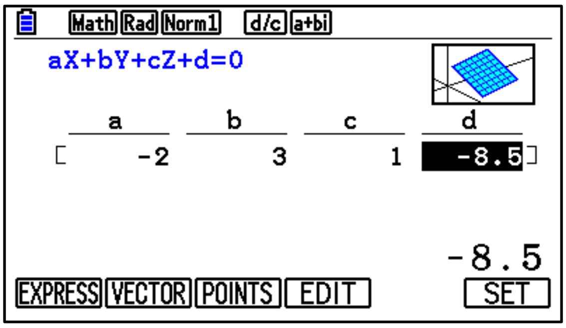
Simplificant:

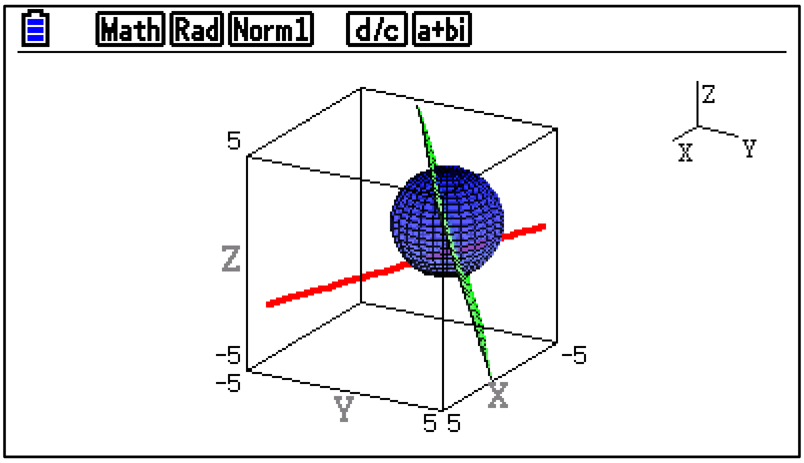
$\Pi \equiv -2x + 3y + z - \dfrac{17}{2} = 0$

Obrim el *Menú Gràfico 3D*
Definim i representem l'esfera la recta i el plànol

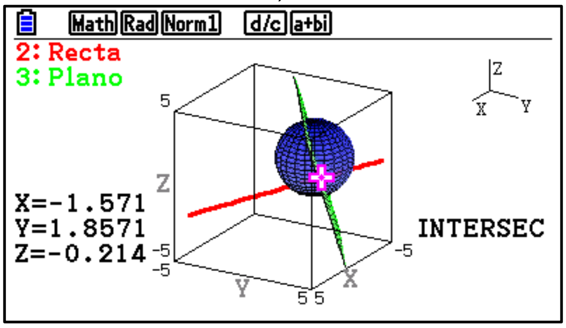








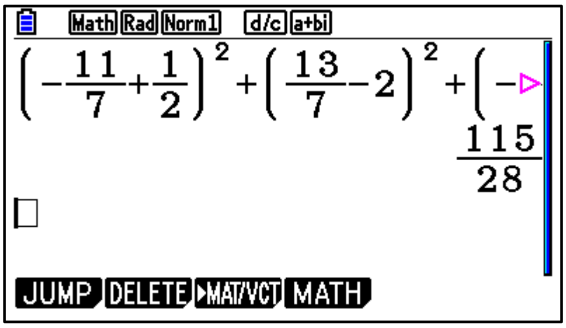
Amb la funció *G-Solv,* determinem la intersecció de la recta i el plànol (punt projecció)

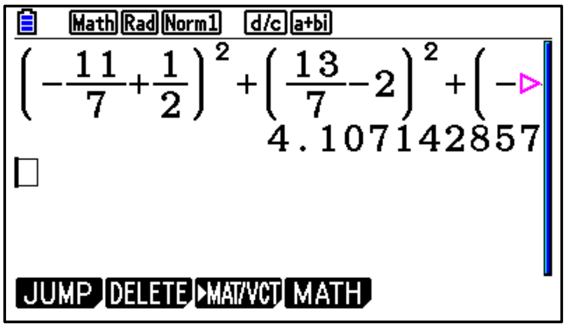


El punt projecció té coordenades $P\left(\frac{-11}{7},\frac{13}{7},\frac{-3}{14}\right)$

Calculem el quadrat de la distància entre el centre O i la projecció P.

$$(d(OP))^2=\left(-\frac{11}{7}+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{13}{7}-2\right)^2++\left(-\frac{3}{14}-\frac{3}{2}\right)^2$$





Aleshores, la recta talla l'esfera ja que $(d(OP))^2<r^2=6$

Problema 12
En l'esfera d'equació $E \equiv (x-1)^2+(y+2)^2+(x-3)^2=25$ determineu el punt M més pròxim al plànol $\Pi \equiv 3x-4y+19=0$ i calculeu la distància del punt M a aquest plànol.

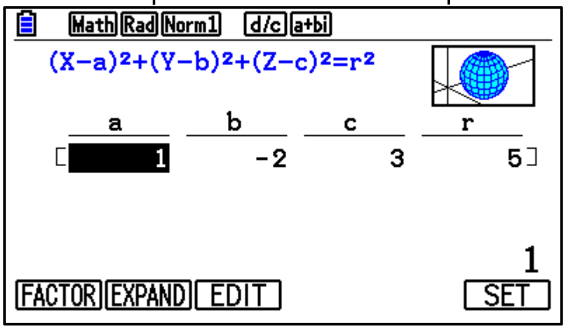
Solució:
L'esfera té centre el punt $O(1,-2,3)$ i radi $r=5$

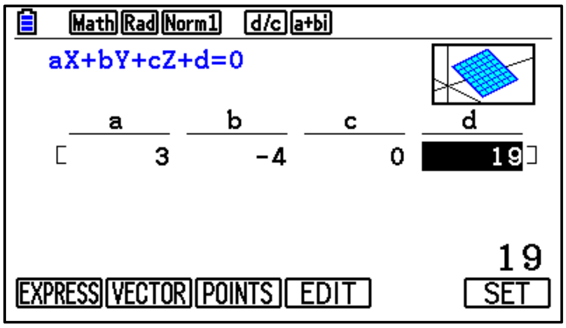
Vegem que el plànol és exterior a l'esfera.
Calculem la distància del centre $O(1,-2,3)$ al plànol $\Pi \equiv 3x-4y+19=0$

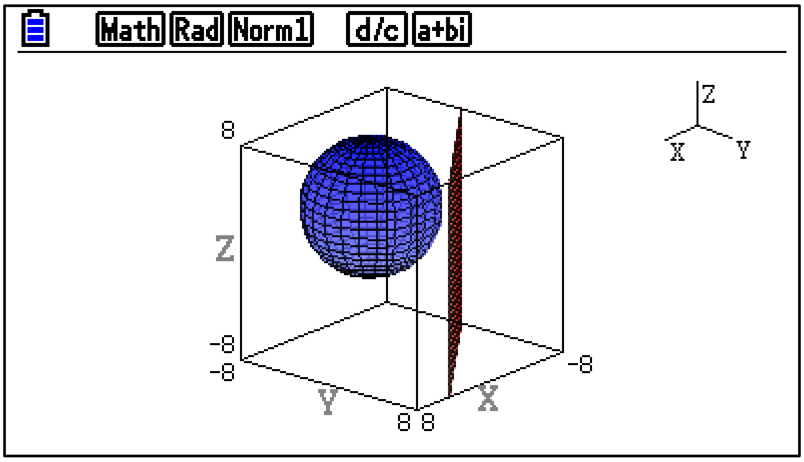
$$d(O,\Pi)=\left|\frac{3\cdot 1-4\cdot(-2)+0\cdot 3+19}{\sqrt{3^2+(-4)^2+0^2}}\right|=6$$

$d(O,\Pi)=6>r=5$
Aleshores, el plànol és exterior a l'esfera.

Obrim el *Menú Gráfico 3D*
Definim i representem l'esfera i el plànol.







La recta perpendicular al plànol $\Pi \equiv 3x-4y+19=0$ que passa pel centre $O(1,-2,3)$ té vector director el característic del plànol $a=(3,-4,0)$.
La seua equació és:
$r \equiv (x,y,z)=(1,-2,3)+\alpha(3,-4,0)$
Un punt qualsevol de la recta té coordenades:
$M(1+3\alpha,-2-4\alpha,3)$
Substituint les coordenades del punt en l'equació del plànol:
$(3\alpha)^2+(-4\alpha)^2=25$
Resolent l'equació:
$\alpha=1,-1$

Si $\alpha=1$ el punt intersecció té coordenades $M_1(4,-6,3)$
Si $\alpha=-1$ el punt intersecció té coordenades $M_2(-2,2,3)$

Calculem la distància del punt $M_1(4,-6,3)$ al plànol $\Pi \equiv 3x-4y+19=0$

$$d(M_1,\Pi)=\left|\frac{3\cdot 4-4\cdot(-6)+0\cdot 3+19}{\sqrt{3^2+(-4)^2+0^2}}\right|=11$$

Calculem la distància del punt $M_2(-2,2,3)$ al plànol $\Pi \equiv 3x-4y+19=0$

$$d(M_2,\Pi)=\left|\frac{3\cdot(-2)-4\cdot 2+0\cdot 3+19}{\sqrt{3^2+(-4)^2+0^2}}\right|=1$$

El punt més pròxim al plànol $\Pi \equiv 3x-4y+19=0$ és $M_2(-2,2,3)$

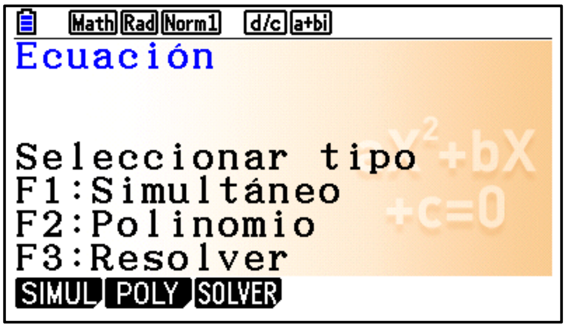
Problema 13

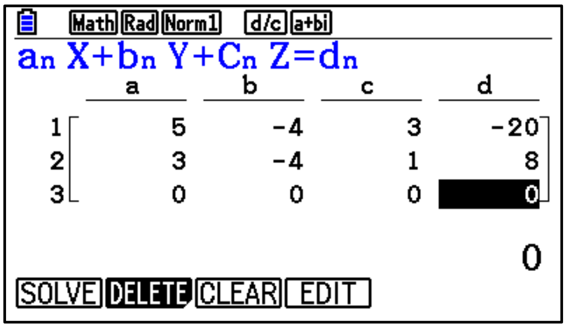
Determineu l'equació de l'esfera de centre $O(2,3,-1)$ que talla la recta $s \equiv \begin{cases} 5x-4y+3z+20=0 \\ 3x-4y+z-8=0 \end{cases}$ amb una corda de longitud igual a 16.

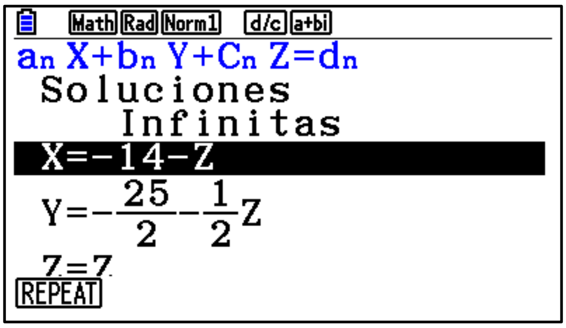
Solució:

Obrim el *Menú Ecuación*.

Resolem el sistema format per la recta per determinar la forma paramètrica:







L'equació paramètrica de la recta és:

$$s \equiv \begin{cases} x=-14-\alpha \\ y=-\dfrac{25}{2}-\dfrac{1}{2}\alpha \\ z=\alpha \end{cases}$$

Un punt de la recta s és $A\left(-14,-\frac{25}{2},0\right)$ i el vector director $v=(-2,-1,2)$

Determinem el punt projecció del centre O sobre la recta s.

El plànol que passa per $O(2,3,-1)$ i és perpendicular a la recta $s \equiv \begin{cases} x=-14-\alpha \\ y=-\frac{25}{2}-\frac{1}{2}\alpha \\ z=\alpha \end{cases}$ té vector característic el vector director de la recta s, $v=(-2,-1,2)$

L'equació és

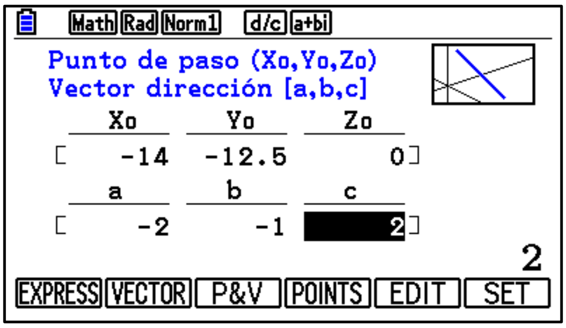
$\Pi \equiv -2(x-2)-(y-3)+2(z+1)=0$

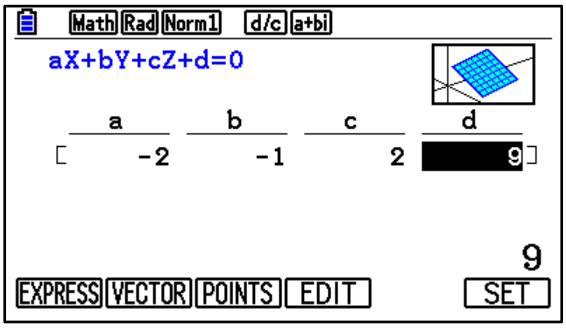
Simplificant:

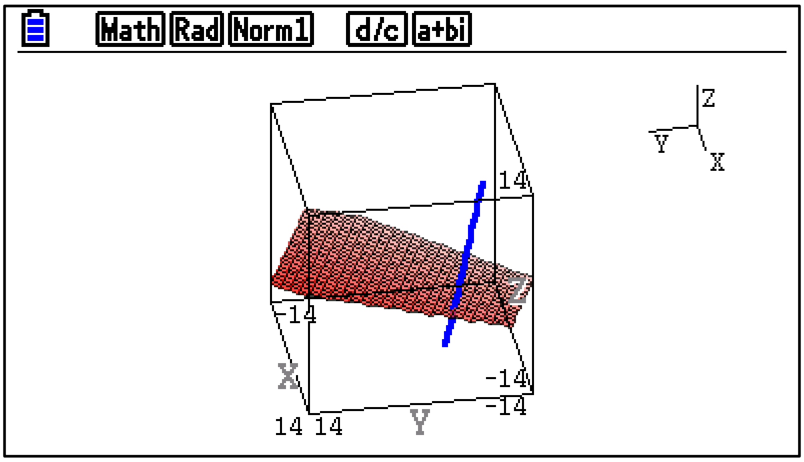
$\Pi \equiv -2x-y+2z+9=0$

Obrim el *Menú Gráfico 3D.*

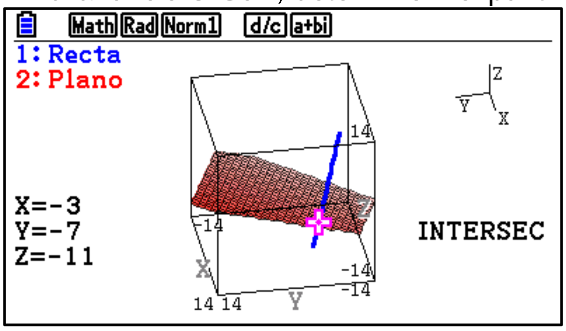
Definim i representem la recta $s \equiv \begin{cases} x=-14-\alpha \\ y=-\frac{25}{2}-\frac{1}{2}\alpha \\ z=\alpha \end{cases}$ i el plànol $\Pi \equiv -2x-y+2z+9=0$





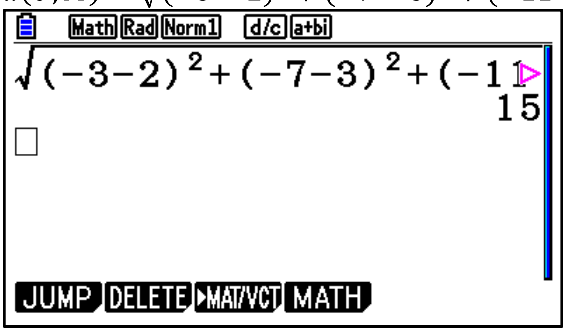


Amb la funció *G-Solv,* determinem el punt intersecció, punt mig de la corda.



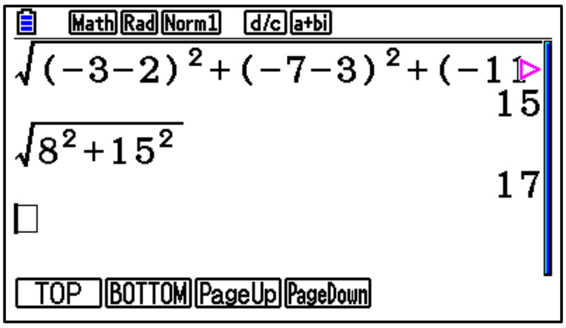
Les coordenades del punt mig de la corda són:
$M(-3,-7,-11)$

Obrim el *Menú Ejec-Mat*
Calculem la distància del centre O al punt M
$d(O,M)=\sqrt{(-3-2)^2+(-7-3)^2+(-11+1)^2}$



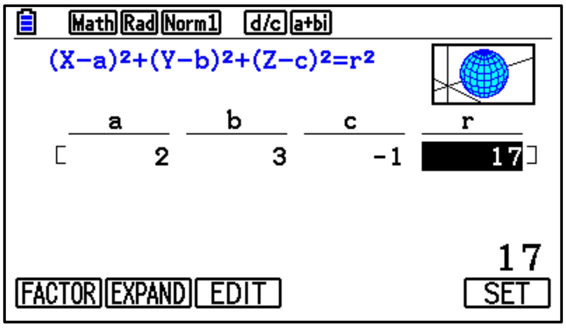
$d(O,M)=15$

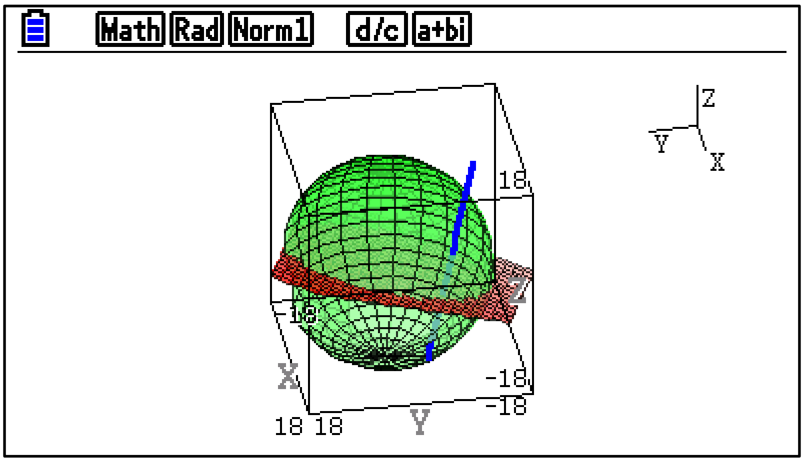
Siga r el radi de l’esfera.
Aplicant el teorema de Pitàgores:
$r^2 = 8^2 + 15^2$



El radi de l’esfera és $r = 17$
L’equació de l’esfera és:
$(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 17^2$

Obrim el *Menú Gráfico 3D*
Definim i representem l’esfera.



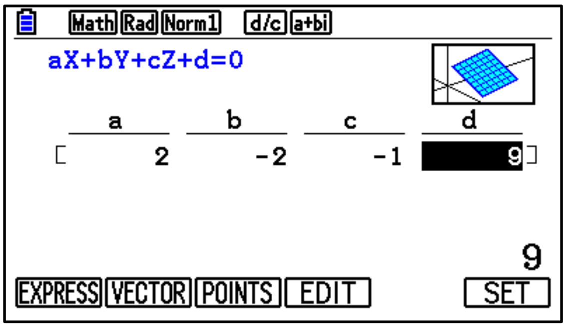


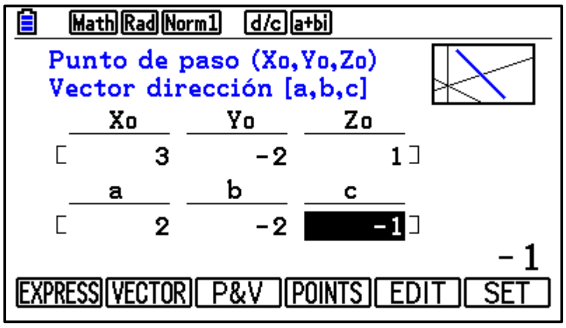
Problema 14
Determineu el centre C i el radi r de la circumferència
$$\begin{cases}(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=100\\ 2x-2y-z+9=0\end{cases}$$

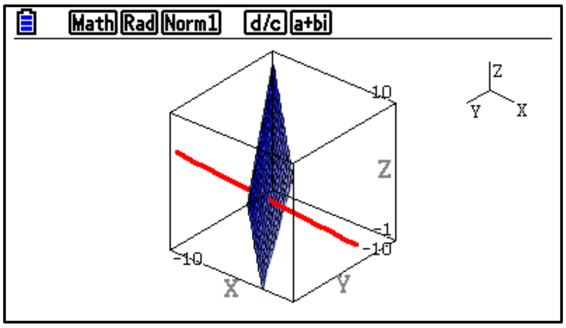
Solució:
$E \equiv (x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=100$ és una esfera de centre $O(3,-2,1)$ i radi $R=10$

El centre de la circumferència és igual a la projecció del centre $O(3,-2,1)$ sobre el plànol $\Pi \equiv 2x-2y-z+9=0$
La recta perpendicular al plànol $2x-2y-z+9=0$ que passa pel punt $O(3,-2,1)$ té vector director el característic del plànol, $a=(2,-2,-1)$
La seua equació és:
$r \equiv (x,y,z)=(3,-2,1)+\alpha(2,-2,-1)$

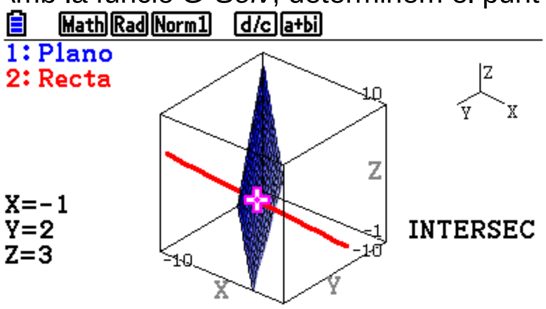
Obrim el *Menú Gráfico 3D*
Definim i representem el plànol i la recta.







Amb la funció *G-Solv*, determinem el punt intersecció del plànol i la recta:

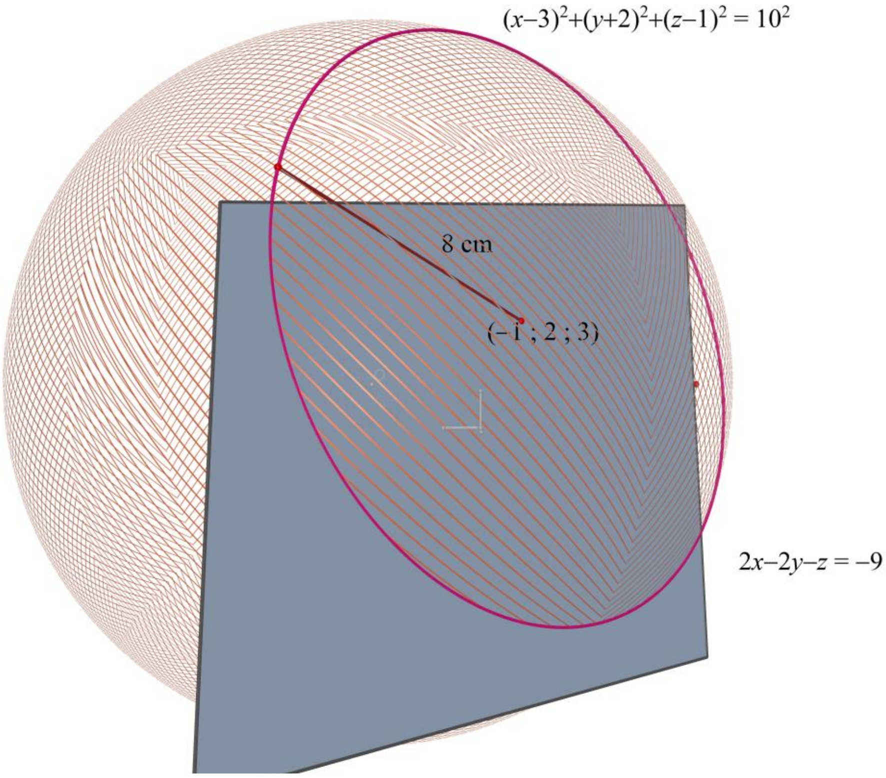


Les coordenades del centre de la circumferència és:
$C(-1,2,3)$
Calculem la distància entre els punts O i C.
$\overline{OC}=\sqrt{(-1-3)^2+(2-(-2))^2+(3-1)^2}=6$

Siga r el radi de la circumferència que cerquem

Un punt A qualsevol de la circumferència, O i C formen un triangle rectangle $\overset{\Delta}{ACO}$,
$C = 90°, \overline{OA} = R = 10, \overline{OC} = 6. \overline{CA} = r$

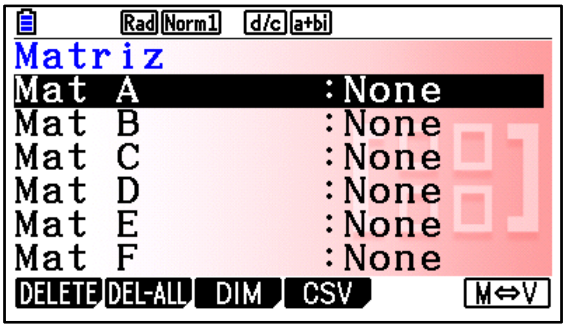
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ACO}$:
$r = 8$

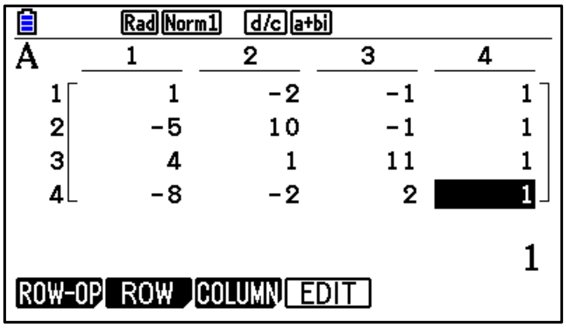


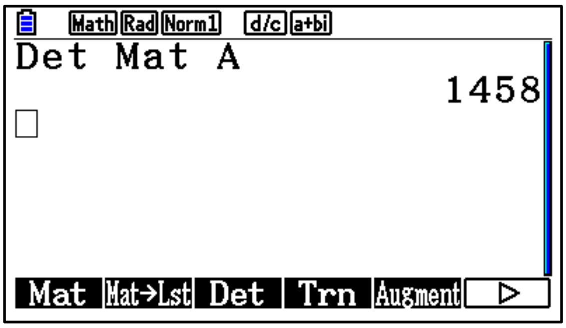
Problema 15
Determineu l'equació de l'esfera que passa pels punts
$A(1,-2,-1), B(-5,10,-1), C(4,1,11), D(-8,-2,2)$

Solució 1:
Vegem que els quatre punts no són coplanaris.
Obrim el *Menú Ejec-Mat*

Vegem que el determinant de la matriu $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ -5 & 10 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 11 & 1 \\ -8 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ és distint de zero.







Calculem els punts migs dels segments $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$
El punt mig del segment $\overline{AB}$ és $E(-2,4,-1)$
El punt mig del segment $\overline{AC}$ és $F\left(\frac{5}{2}, \frac{-1}{2}, 5\right)$
El punt mig del segment $\overline{AD}$ és $G\left(\frac{-7}{2}, -2, \frac{1}{2}\right)$

Calculem les components dels vectors $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$
$\overrightarrow{AB} = (-6,-12,0)$
$\overrightarrow{AC} = (3,3,12)$
$\overrightarrow{AD} = (-9,0,3)$

El plànol mediador del segment $\overline{AB}$ té equació:
$\Pi_1 \equiv (x+2) + 2(y-4) = 0$
$\Pi_1 \equiv x + 2y = 6$

El plànol mediador del segment $\overline{AC}$ té equació:
$\Pi_2 \equiv \left(x - \frac{5}{2}\right) + \left(y + \frac{1}{2}\right) + 4(z-5) = 0$
$\Pi_2 \equiv x + y + 4z = 22$

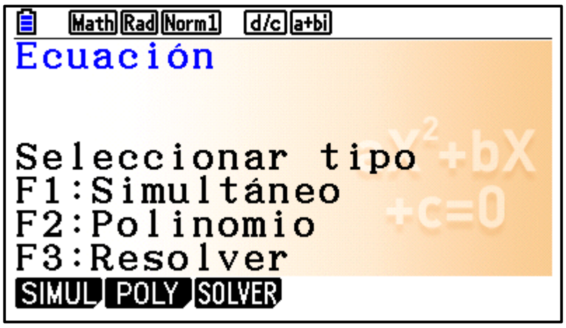
El plànol mediador del segment $\overline{AD}$ té equació:

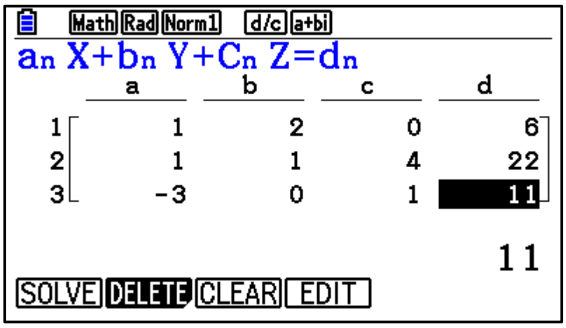
$$\Pi_3 \equiv -3\left(x+\frac{7}{2}\right)+\left(z-\frac{1}{2}\right)=0$$

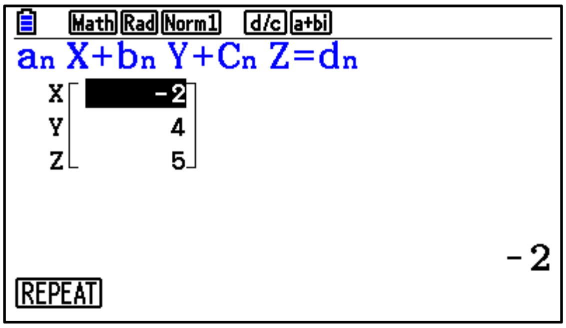
$$\Pi_3 \equiv -3x+z=11$$

El centre de l'esfera és igual al punt intersecció dels tres plànol.

Obrim el *Menú Ecuación*:



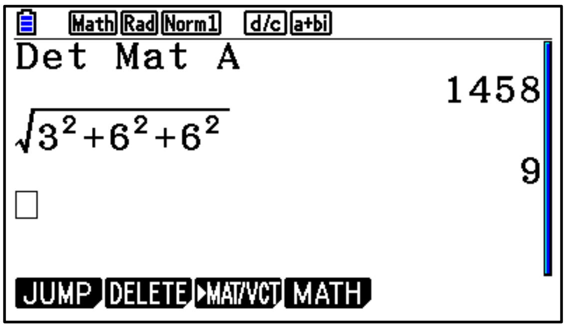




El centre de l'esfera és el punt $O(-2,4,5)$

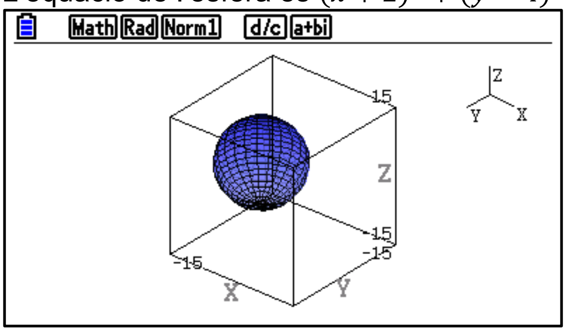
El radi de l'esfera és:

$$r=\overline{OA}=\sqrt{(1+2)^2+(-2-4)^2+(-1-5)^2}$$



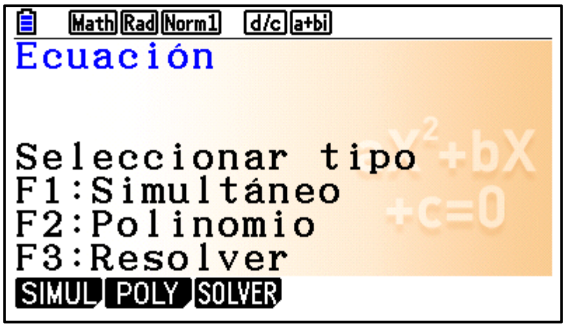
El radi de l'esfera és $r=9$

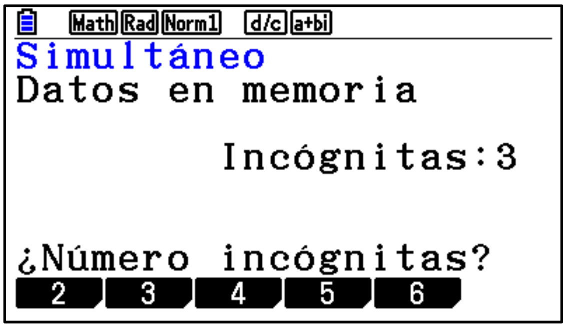
L'equació de l'esfera és $(x+2)^2+(y-4)^2+(z-5)^2=9^2$

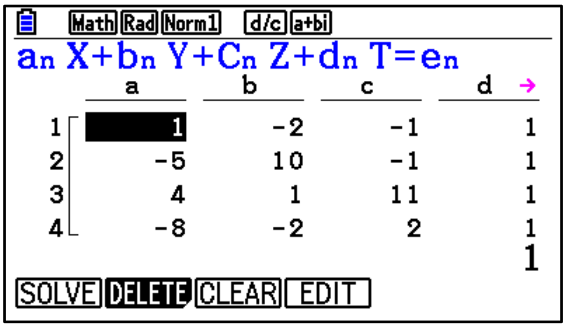


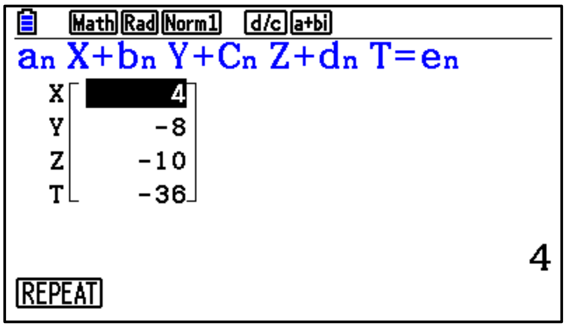
Solució 2
L'equació general de l'esfera és:
$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$
Substituïm les coordenades dels quatre punts en l'equació general i resolem el sistema format per les 4 equacions amb les incògnites A, B, C, D.

Obrim el *Menú Ecuación*:









La solució és:
$$\begin{cases} A = 4 \\ B = -8 \\ C = -10 \\ D = -36 \end{cases}$$
L'equació general de l'esfera és:
$x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 8y - 10z + 36 = 0$
Completant quadrats:
$(x + 2)^2 + (y - 4)^2 + (z - 5)^2 = 36 + 2^2 + 4^2 + 5^2$
$(x + 2)^2 + (y - 4)^2 + (z - 5)^2 = 9^2$

El centre de l'esfera és el punt $O(-2, 4, 5)$ i el radi $r = 9$

Problema 16
Determineu l'equació de l'esfera que passa pels punts
$A(3,1,-3), B(-2,4,1), C(-5,0,0)$ i té el centre en el plànol $\Pi \equiv 2x+y-z+3=0$

Solució:
Calculem les components dels vectors $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$
$\overrightarrow{AB}=(-5,3,4)$
$\overrightarrow{AC}=(-8,-1,3)$
Els vectors són linealment independents ja que les components no són proporcionals
$\frac{-5}{-8} \neq \frac{3}{-1}$

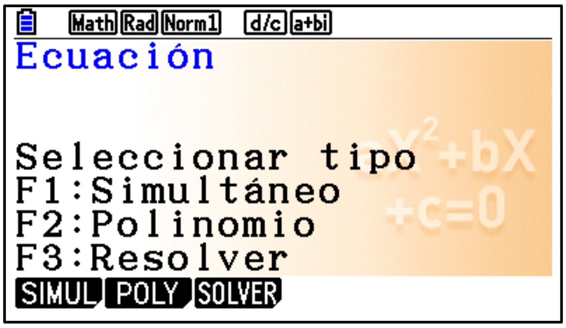
Calculem els punts migs dels segments $\overline{AB}, \overline{AC}$
El punt mig del segment $\overline{AB}$ és $D\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, -1\right)$
El punt mig del segment $\overline{AC}$ és $E\left(-1, \frac{1}{2}, \frac{-3}{2}\right)$

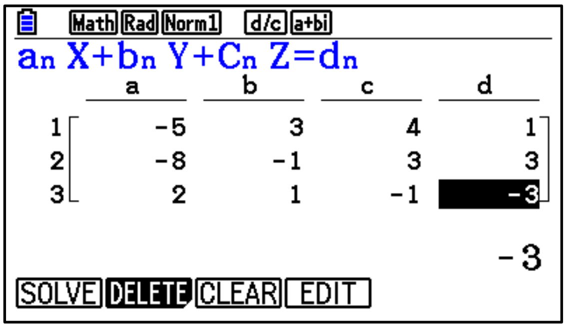
El plànol mediador del segment $\overline{AB}$ té equació:
$\Pi_1 \equiv -5\left(x-\frac{1}{2}\right)+3\left(y-\frac{5}{2}\right)+4(z+1)=0$
$\Pi_1 \equiv -5x+3y+4z=1$

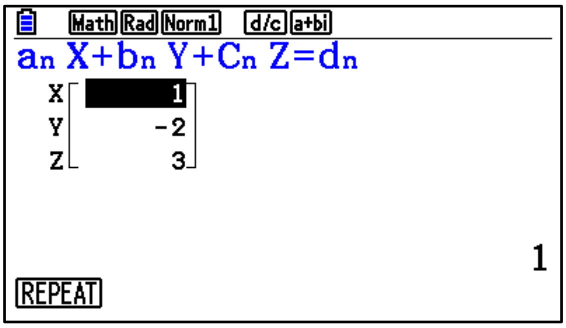
El plànol mediador del segment $\overline{AC}$ té equació:
$\Pi_2 \equiv -8(x+1)-\left(y-\frac{1}{2}\right)+3\left(z+\frac{3}{2}\right)=0$
$\Pi_2 \equiv -8x-y+3z=3$

El centre de l'esfera és igual al punt intersecció dels tres plànol.

Obrim el *Menú Ecuación*:



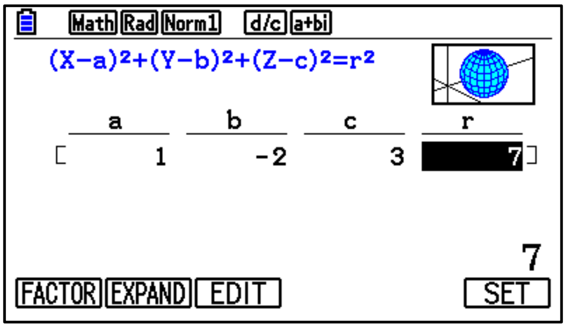


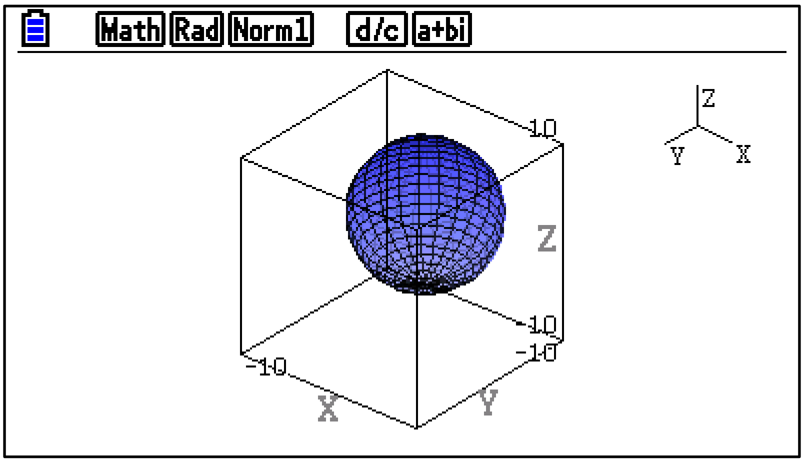


El centre de l'esfera és el punt $O(1,-2,3)$

El radi de l'esfera és:
$r=\overline{OA}=\sqrt{(3-1)^2+(1+2)^2+(-3-3)^2}=7$

El radi de l'esfera és $r = 7$
L'equació de l'esfera és $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 7^2$
Obrim el *Menú Gráfico 3D*.
Definim i representem l'esfera.





Problema 17

Siga l'esfera $x^2+y^2+z^2+6y-4z+9=0$

Determineu l'equació de l'esfera concèntrica amb ella que és tangent al plànol $2x-3y+2z+4=0$

Solució:

Completant quadrats en l'esfera $x^2+y^2+z^2+6y-4z+9=0$

$x^2+(y+3)^2+(z-2)^2=2^2$

El centre de l'esfera és el punt $O(0,-3,2)$ i el radi $r=2$

El radi de l'esfera concèntrica tangent al plànol $\Pi \equiv 2x-3y+2z+4=0$ té radi $R=d(O,\Pi)$

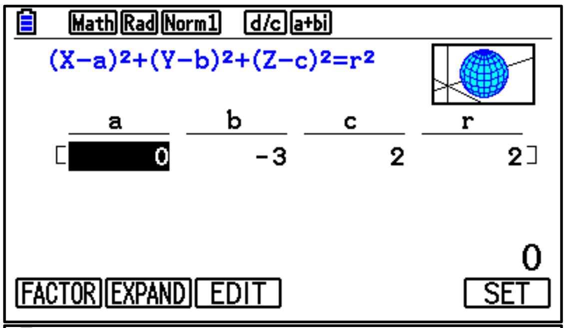
$$R=d(O,\Pi)=\left|\frac{2\cdot 0-3\cdot(-3)+2\cdot 2+4}{\sqrt{2^2+(-3)^2+2^2}}\right|=\sqrt{17}$$

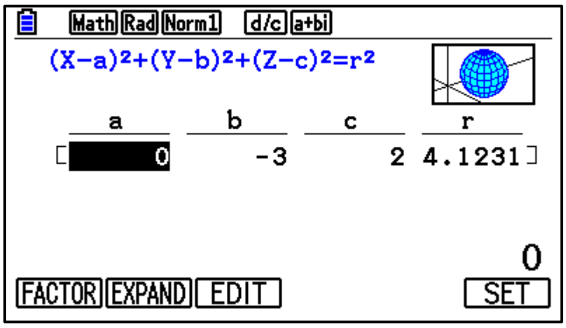
L'equació de l'esfera:

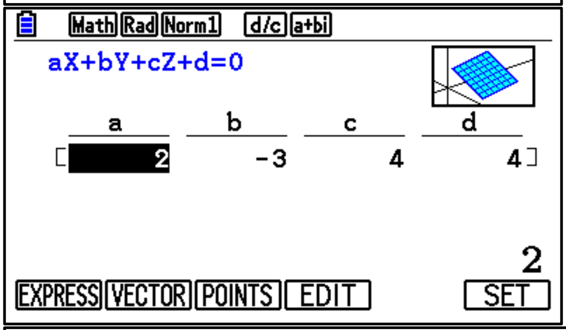
$x^2+(y+3)^2+(z-2)^2=17$

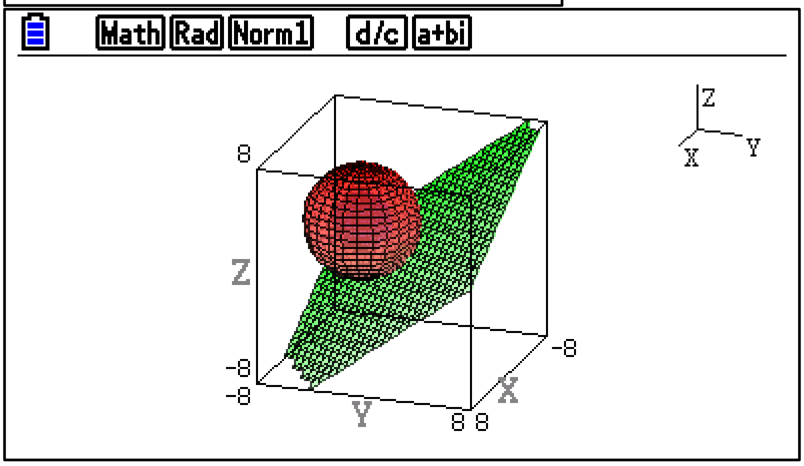
Obrim el *Menú Gráfico 3D*.

Definim i representem les dues esferes i el plànol









Problema 18

Siga l’esfera $x^2+y^2+z^2-6x-4y+8z+20=0$

Calculeu l’esfera d’igual radi, tangent exterior en el punt $A(1,4,-3)$ de l’esfera.

Calculeu l’esfera d’igual radi, tangent exterior en el punt diametralment oposat al punt $A(1,4,-3)$ de l’esfera.

Solució:

Completant quadrats:

$E\equiv(x-3)^2+(y-2)^2+(z+4)^2=3^2$

L’esfera E te centre $O(3,2,-4)$ i radi $r=3$

Notem que el punt $A(1,4,-3)$ pertany a l’esfera E ja que satisfà la seua equació:

$E\equiv(1-3)^2+(4-2)^2+(-3+4)^2=3^2$

El centre O_1de l’esfera tangent en el punt $A(1,4,-3)$ compleix:

$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AO_1}$

$(-2,2,1)=(x-2,y-4,z+3)$

Resolent l’equació:

$O_1(-1,6,-2)$

L’equació de l’esfera de radi 3 tangent en A a l’esfera E té equació:

$E_1\equiv(x+1)^2+(y-6)^2+(z+2)^2=3^2$

El punt $A’$ diametralment oposat del punt A compleix:

$\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OA'}$

$(2,-2,-1)=(x-3,y-2,z+4)$

Resolent l’equació:

$A'(5,0,-5)$

El centre O_2 de l’esfera tangent en el punt $A'(5,0,-5)$ compleix:

$\overrightarrow{O_1O}=\overrightarrow{OO_2}$

$(4,-4,-2)=(x-3,y-2,z+4)$

Resolent l’equació:

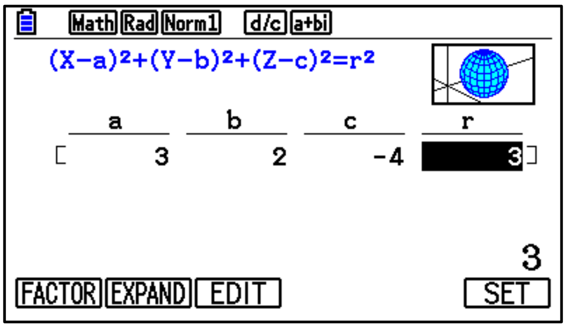
$O_2(7,-2,-6)$

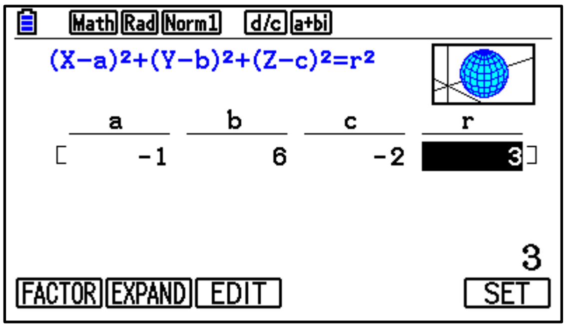
L’equació de l’esfera de radi 3 tangent en $A’$ a l’esfera E té equació:

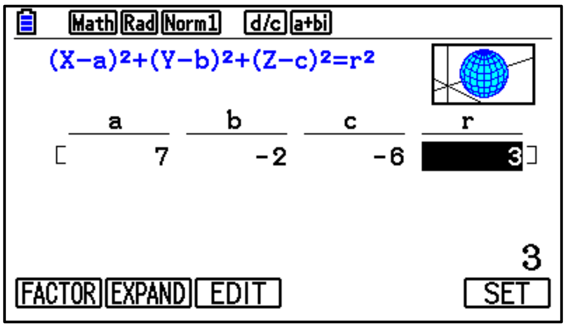
$E_1\equiv(x-7)^2+(y+2)^2+(z+6)^2=3^2$

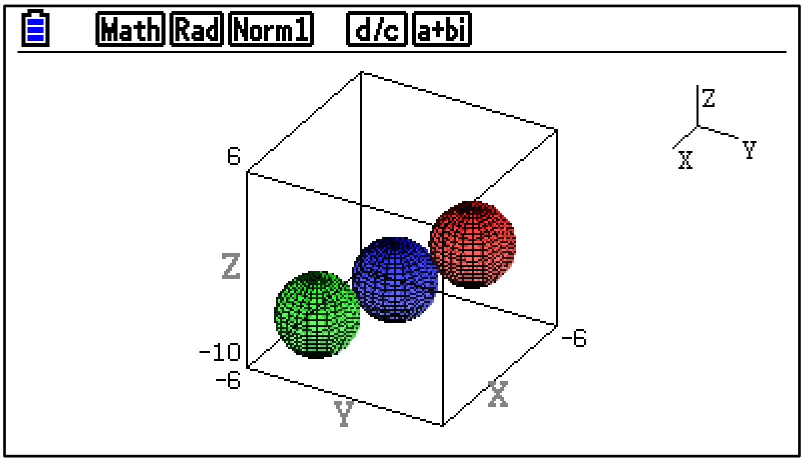
Obrim el *Menú Gráfico 3D.*

Definim i representem les tres esferes.






Math Rad Norm1 d/c a+bi
(X−a)²+(Y−b)²+(Z−c)²=r²
a b c r
[7 −2 −6 3]
3
FACTOR EXPAND EDIT SET


Math Rad Norm1 d/c a+bi
6
Z
−10
−6
Y
X
−6
Z
X
Y

Problema 19

Siguen les esferes d'equacions

$E_1 \equiv x^2 + y^2 + z^2 = 25$, $E_2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 15y - 25z = 0$

d) Proveu que les dues esferes són secants.

e) Determineu el plànol que conté la intersecció de les dues esferes.

f) Determineu el centre i el radi de la circumferència intersecció.

Solució:

a)

L'esfera $E_1 \equiv x^2 + y^2 + z^2 = 25$ té centre $O_1(0,0,0)$ i radi $R_1 = 5$

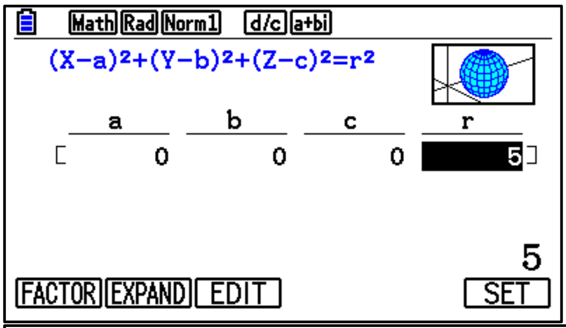
Completant quadrat en l'esfera $E_2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 15y - 25z = 0$

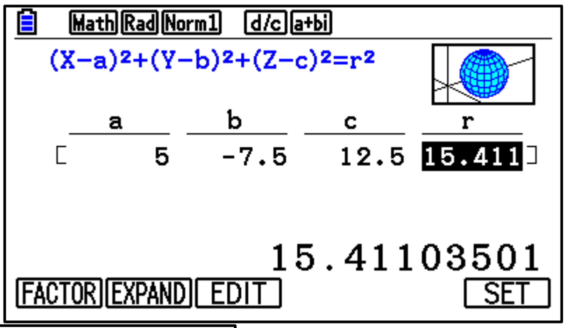
$$(x-5)^2 + \left(y + \frac{15}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{25}{2}\right)^2 = 25 + \frac{225}{4} + \frac{625}{4} = \left(\frac{5}{2}\sqrt{38}\right)^2$$

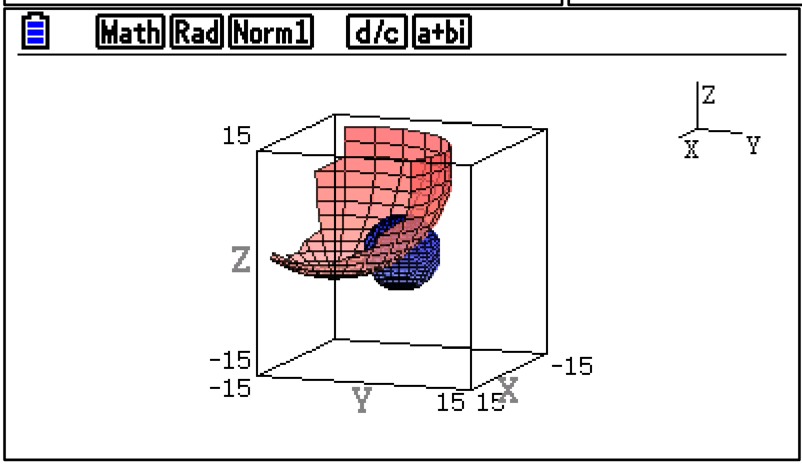
El centre de l'esfera és $O_2\left(5, -\frac{15}{2}, \frac{25}{2}\right)$ i radi $R_2 = \frac{5}{2}\sqrt{38}$

Obrim el *Menú Gràfico 3D*

Definim i representem les dues esferes.







Vegem analíticament que les dues esferes són secants.

Calculem la distància entre els dos centres.

$$\overline{O_1O_2} = \sqrt{(5-0)^2 + \left(-\frac{15}{2} - 0\right)^2 + \left(\frac{25}{2} - 0\right)^2} = \frac{5}{2}\sqrt{38}$$

La suma dels radis és:

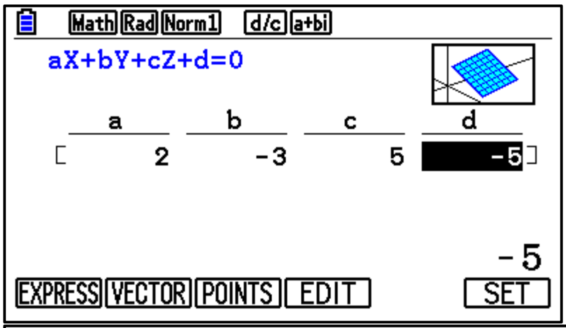
$R_1 + R_2 = 5 + \frac{5}{2}\sqrt{38} > \overline{O_1O_2}$

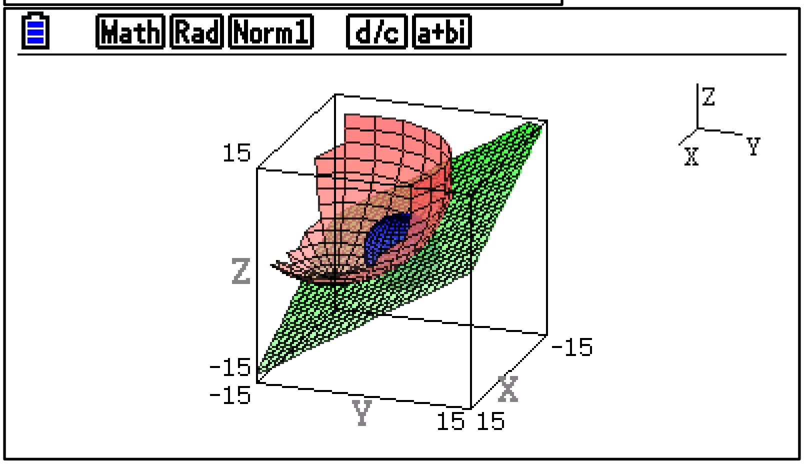
La diferència dels radis és:

$$R_2 - R_1 = \frac{5}{2}\sqrt{38} - 5 > \overline{O_1O_2}$$

Aleshores, les dues esferes són secants.

b)
El plànol intersecció de les dues esferes és el plànol format per la diferència de les equacions de les dues esferes:
$\Pi \equiv 10x - 15y + 25z = 25$
Simplificant:
$\Pi \equiv 2x - 3y + 5z - 5 = 0$
Representem el plànol.





c)
El centre de la circumferència intersecció de les dues esferes és la projecció del centre $O_1(0,0,0)$ sobre el plànol $\Pi \equiv 2x - 3y + 5z - 5 = 0$
La recta r perpendicular al plànol que passa per $O_1(0,0,0)$ té vector director el característic del plànol $a = (2,-3,5)$ la seua equació és:
$r \equiv (x,y,z) = \alpha(2,-3,5)$

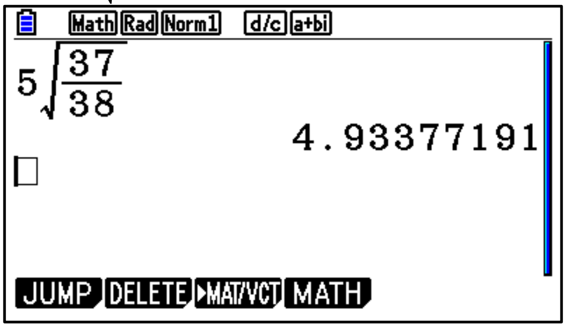
Substituïm les coordenades d'un punt qualsevol de la recta r, $(2\alpha,-3\alpha,5\alpha)$ en l'equació del plànol:
$2(2\alpha) - 3(-3\alpha) + 5(5\alpha) - 5 = 0$
Resolent l'equació:
$\alpha = \frac{5}{38}$
La intersecció del plànol i la recta és:
$O\left(\frac{5}{19}, -\frac{15}{38}, \frac{25}{38}\right)$
$\overline{O_1O} = d(O_1,\Pi) = \left|\frac{-5}{\sqrt{38}}\right| = \frac{5}{\sqrt{38}}$
Considerem el triangle rectangle format pels catets $\overline{O_1O}$, O i un punt de la circumferència i d'hipotenusa $R_1 = 5$

Siga R el radi de la circumferència.

Aplicant el teorema de Pitàgores:

$$5^2 = R^2 + \left(\frac{5}{\sqrt{38}}\right)^2$$

$$R = 5 \cdot \sqrt{\frac{37}{38}} \approx 4.93$$



Problema 20

Calculeu la distància més curta del punt $A(1,-1,3)$ a l'esfera
$E \equiv x^2+y^2+z^2-6x+4y-10z-62=0$
En quin punt de l'esfera s'assoleix la distància més curta.

Solució
Completant quadrats:
$E \equiv (x-3)^2+(y+2)^2+(z-5)^2=62+9+4+25=10^2$
Les coordenades del centre de l'esfera és $O(3,-2{,}5)$ i el radi $R=10$

Estudiem la posició relativa del punt $A(1,-1,3)$ respecte de l'esfera.
$(1-3)^2+(-1+2)^2+(3-5)^2=9<10^2$
El punt $A(1,-1,3)$ és interior a l'esfera.
$\overline{OA}=\sqrt{(1-3)^2+(-1+2)^2+(3-5)^2}=3$
La distància més curta és:
$d_{mín}=R-\overline{OA}=10-3=7$
La distància més llarga és:
$d_{màx}=R+\overline{OA}=10+3=13$

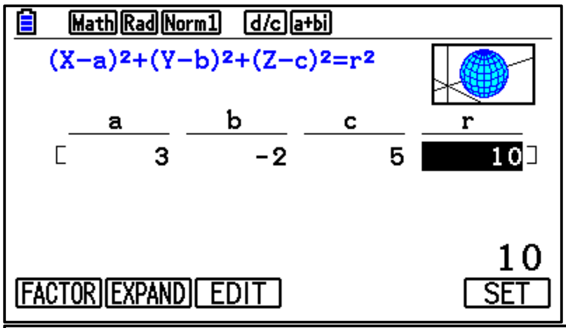
$\overrightarrow{OA}=(-2,1,-2)$
L'equació de la recta que passa pels punts O i A és:
$r_{OA} \equiv (x,y,z)=(3,-2,5)+\alpha(-2,1,-2)$
Un punt qualsevol de la recta $r_{OA} \equiv (x,y,z)=(3,-2,5)+\alpha(-2,1,-2)$té coordenades:
$P(3-2\alpha,-2+\alpha,5-2\alpha)$

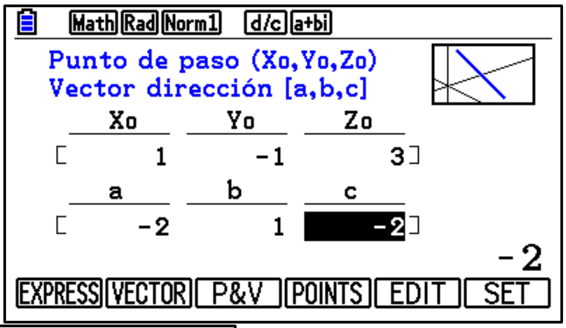
Determinem la intersecció de la recta i l'esfera. Substituïm les coordenades del punt $P(3-2\alpha,-2+\alpha,5-2\alpha)$ en l'equació de l'esfera:
$(-2\alpha)^2+\alpha^2+(-2\alpha)^2=100$ Resolent l'equació:
$$\alpha=\frac{10}{3},-\frac{10}{3}$$
Si $\alpha=\frac{10}{3}$
$$P_1\left(\frac{-11}{3},\frac{4}{3},\frac{-5}{3}\right)$$
$$\overline{AP_1}=\sqrt{\left(\frac{-11}{3}-1\right)^2+\left(\frac{4}{3}+1\right)^2+\left(\frac{-5}{3}-3\right)^2}=7$$
$P_1\left(\frac{-17}{3},\frac{7}{3},\frac{11}{3}\right)$ és el punt més proper de A.

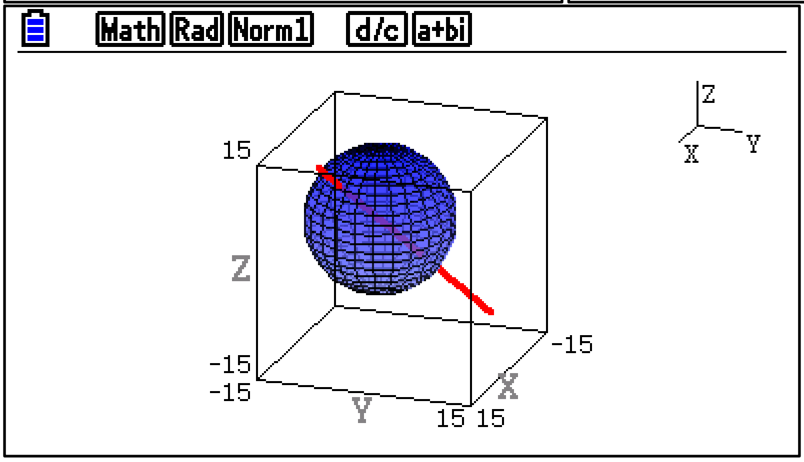
$$\alpha=-\frac{10}{3}$$

$$P_2\left(\frac{29}{3},\frac{-16}{3},\frac{35}{3}\right)$$
$$\overline{AP_2}=\sqrt{\left(\frac{29}{3}-1\right)^2+\left(\frac{-16}{3}+1\right)^2+\left(\frac{35}{3}-3\right)^2}=13$$
$P_2\left(\frac{29}{3},\frac{-16}{3},\frac{35}{3}\right)$ és el punt més allunyat de A.

Obrim el *Menú Gráfico 3D*
Definim i representem l'esfera i la recta







Problema 21

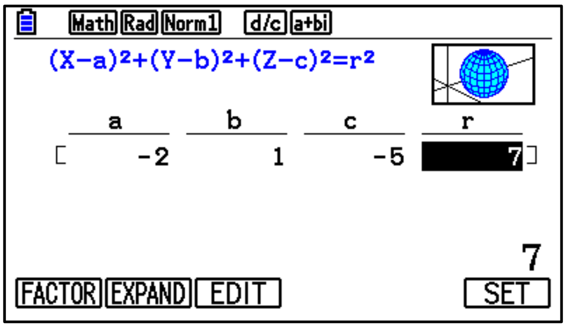
Pels punts intersecció de la recta $r \equiv \begin{cases} x = -5 + 3t \\ y = -11 + 5t \\ z = 9 - 4t \end{cases}$ i de l’esfera d’equació $E \equiv (x+2)^2 + (y-1)^2 + (z+5)^2 = 49$ s’han traçat plànol tangents determineu les seues equacions.

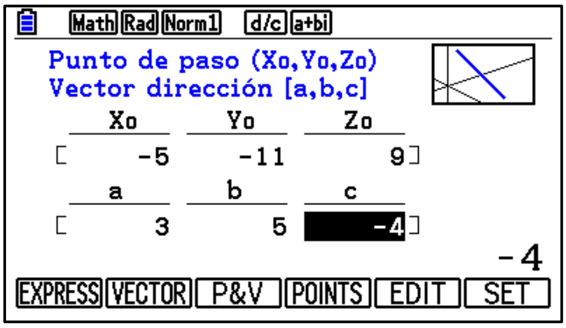
Solució:
El centre de l’esfera és $O(-2, 1, -5)$ i e radi $R = 7$

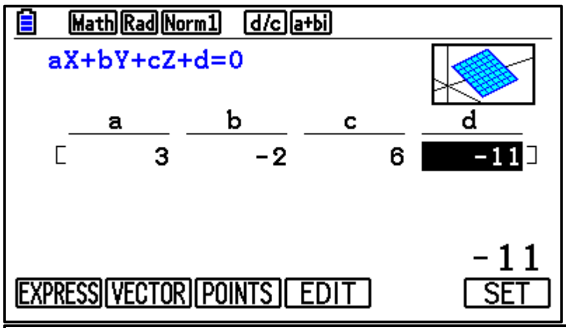
Determinem els punts intersecció de la recta i l’esfera.
Un punt qualsevol de la recta $r \equiv \begin{cases} x = -5 + 3t \\ y = -11 + 5t \\ z = 9 - 4t \end{cases}$ és $P(5 + 3t, -11 + 5t, 9 - 4t)$
Substituïm les seues coordenades en l’equació de l’esfera:
$(-3 + 3t)^2 + (-12 + 5t)^2 + (14 - 4t)^2 = 49$
Simplificant:
$t^2 - 5t + 6 = 0$
Resolent l’equació:
$t = 2, 3$
Les coordenades dels punts intersecció són:
$P_1(1, -1, 1), P_2(4, 4, -3)$
Els vector del plànol característic del plànol tangent a l’esfera en el punt $P_1(1, -1, 1)$ és:
$\overrightarrow{OP_1} = (3, -2, 6)$
L’equació del plànol és:
$\pi_1 \equiv 3(x-1) - 2(y+1) + 6(z-1) = 0$
Simplificant:
$\pi_1 \equiv 3x - 2y + 6z - 11 = 0$

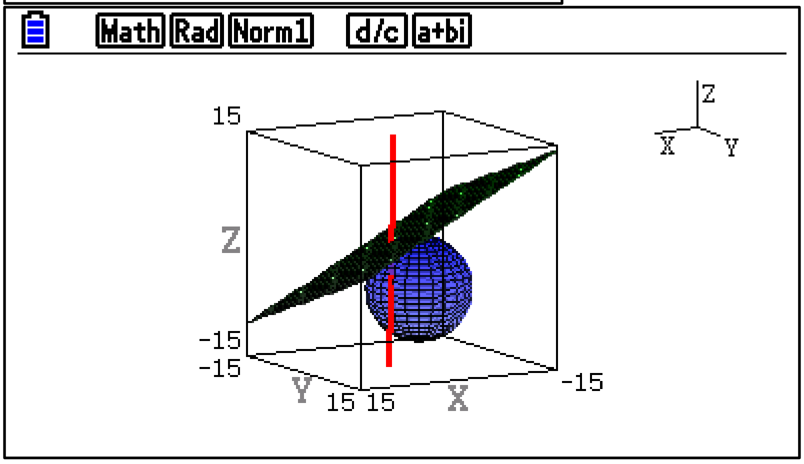
Els vector del plànol característic del plànol tangent a l’esfera en el punt $P_2(4, 4, -3)$és:
$\overrightarrow{OP_2} = (6, 3, 2)$
L’equació del plànol és:
$\pi_2 \equiv 6(x-4) + 3(y-4) + 2(z+3) = 0$
Simplificant:
$\pi_2 \equiv 6x + 3y + 2z - 30 = 0$

Obrim el *Menú Gráfico 3D.*
Definim les equacions de l’esfera, la recta i el plànol $\pi_1 \equiv 3x - 2y + 6z - 11 = 0$

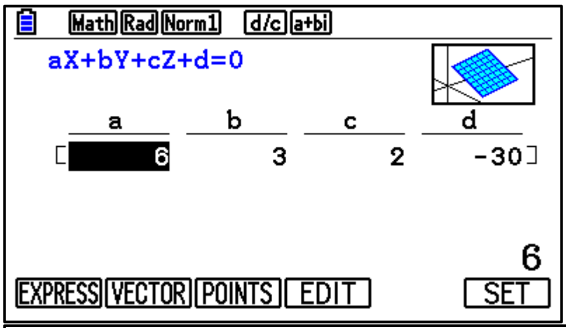


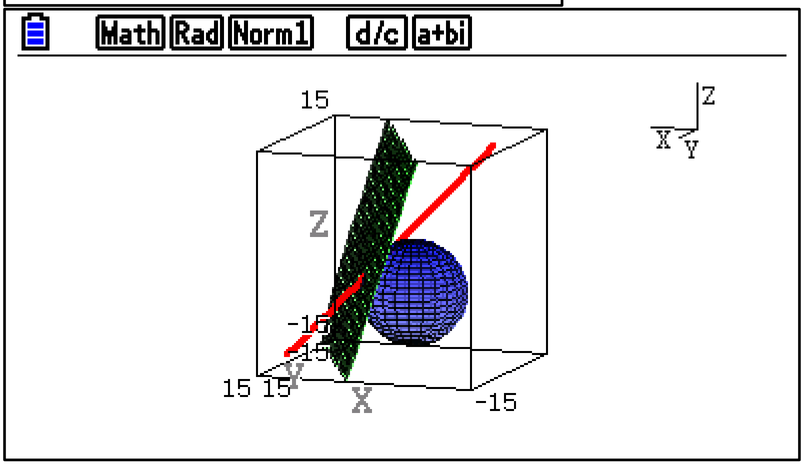






Definim les equacions de l'esfera, la recta i el plànol $\pi_2 \equiv 6x + 3y + 2z - 30 = 0$

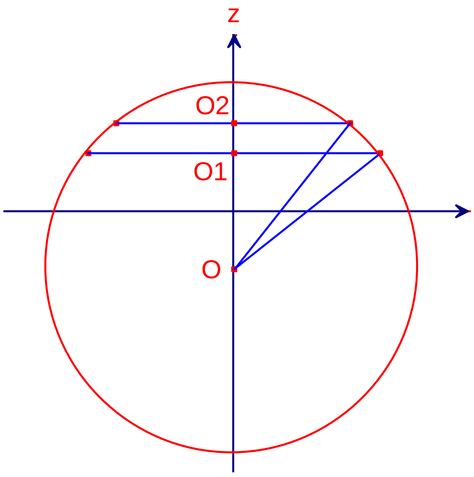




Problema 22

Determineu l’equació de l’esfera que passa per les circumferències $\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ z=2 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2+y^2=16 \\ z=3 \end{cases}$

Solució:
Les circumferències són cadascuna d’elles, intersecció d’un cilindre i un plànol perpendicular a l’eix de simetria del plànol.



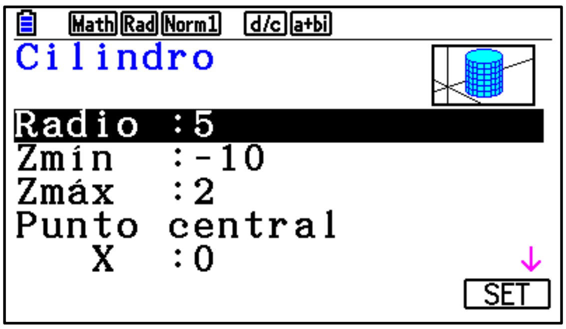
El centre de la primera circumferència és $O_1(0,0,2)$ i radi $R_1=5$
El centre de la segona circumferència és $O_2(0,0,3)$ i radi $R_1=4$

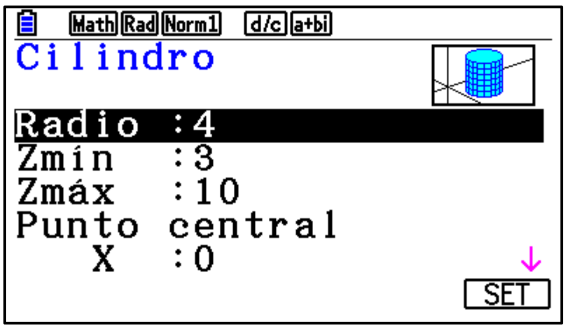
El centre de l’esfera pertany a la recta que uneix els dos centres

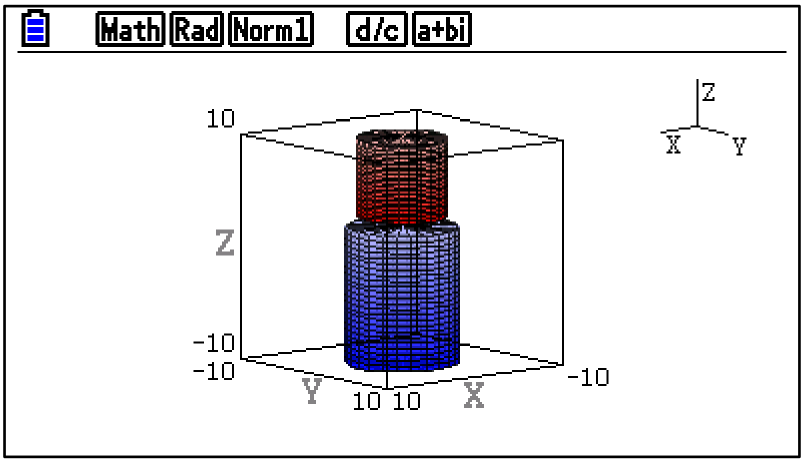
Siguen les seues coordenades $O(0,0,-x)$ siga R el radi de l’esfera.

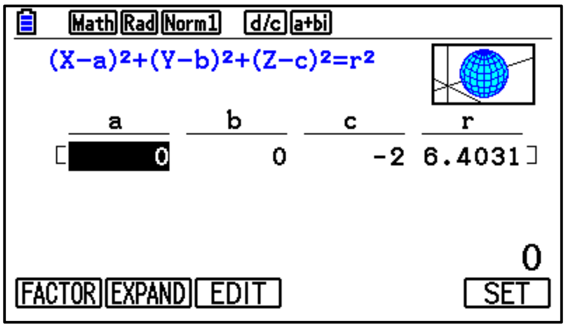
Aplicant el teorema de Pitàgores:
$R^2=(x+2)^2+5^2=(x+3)^2+4^2$
Resolent el sistema:
$\begin{cases} x=2 \\ R=\sqrt{41} \end{cases}$
El centre de l’esfera és $O(0,0,-x)$
La seua equació és:
$x^2+y^2+(z+2)^2=41$

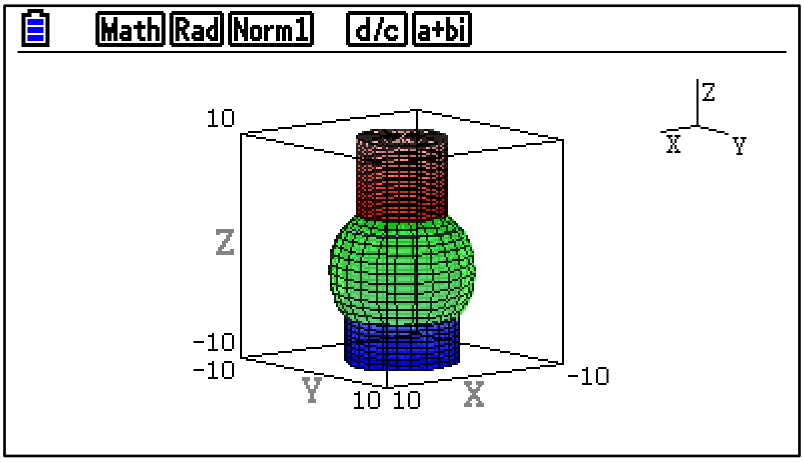
Obri el *Menú Gràfico 3D*.
Definim i representem els dos cilindres, $x^2+y^2=5^2$, $x^2+y^2=4^2$ i l’esfera $x^2+y^2+(z+2)^2=41$






Math Rad Norm1 d/c a+bi
10
Z
-10
-10
Y
10 10
X
-10
Z
X
Y


Math Rad Norm1 d/c a+bi
(X−a)²+(Y−b)²+(Z−c)²=r²
a b c r
[0 0 -2 6.4031]
0
FACTOR EXPAND EDIT SET


Math Rad Norm1 d/c a+bi
10
Z
-10
-10
Y
10 10
X
-10
Z
X
Y

Problema 23

Donades les esferes $E_1 \equiv 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 3x - 2y + z - 5 = 0$,
$E_2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 - x + 3y - 2z + 1 = 0$

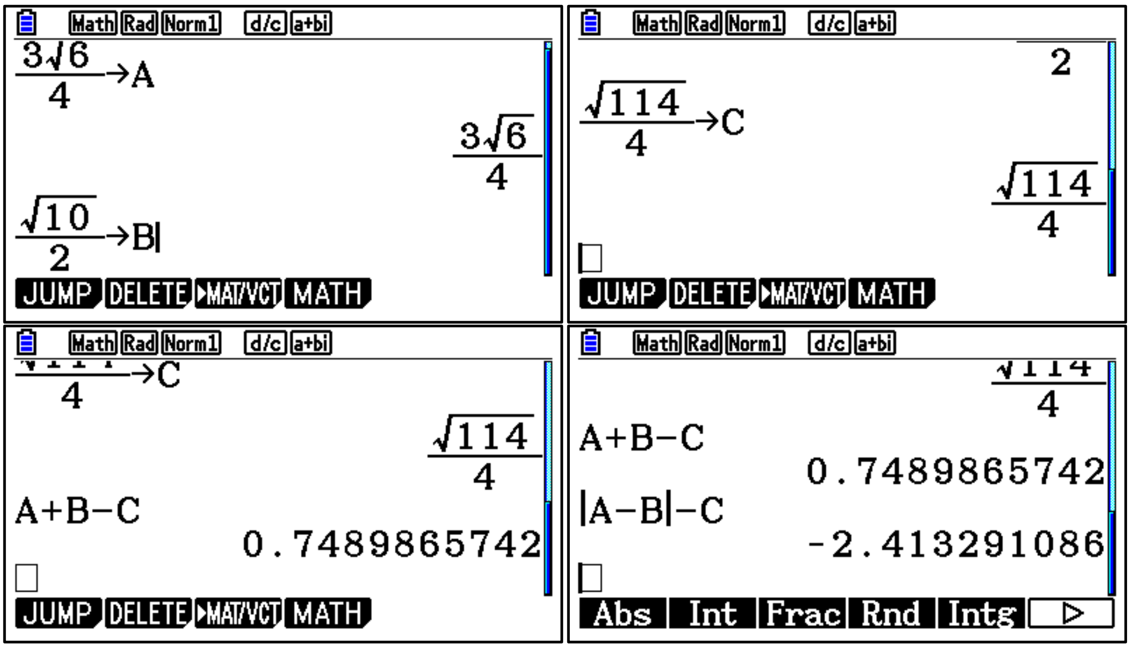
d) Determineu la posició relativa de les dues esferes.
e) Si són secants, determineu el plànol on es tallen.
f) Determineu el centre i el radi de la circumferència intersecció de les dues esferes.

Solució:
Completant quadrats:
$$E_1 \equiv \left(x+\frac{3}{4}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(z+\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{5}{2}+\frac{3}{16}+\frac{1}{4}+\frac{1}{16} = \frac{54}{16}$$
El centre té coordenades, $O_1\left(-\frac{3}{4},\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$ i el radi és $R_1 = \frac{3}{4}\sqrt{6}$

$$E_2 \equiv \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{3}{2}\right)^2 + (z-1)^2 = -1+\frac{1}{4}+\frac{9}{4}+1 = \frac{10}{4}$$
El centre té coordenades, $O_2\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{2},1\right)$ i el radi és $R_1 = \frac{1}{2}\sqrt{10}$

$$\overrightarrow{O_1O_2} = \left(\frac{5}{4},2,\frac{5}{4}\right)$$
La distància entre els centres és:
$$\overline{O_1O_2} = \frac{\sqrt{114}}{4}$$

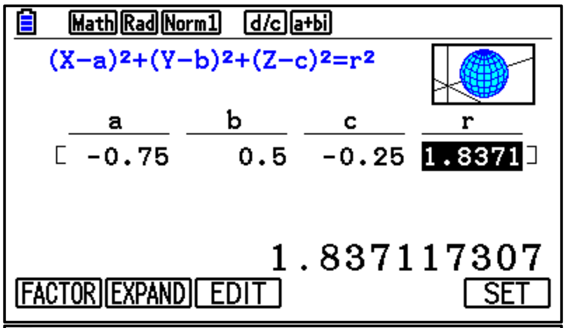
$$\overline{O_1O_2} = \frac{\sqrt{114}}{4} < R_1 + R_2 = \frac{3\sqrt{6}+2\sqrt{10}}{4}$$
$$\overline{O_1O_2} = \frac{\sqrt{114}}{4} > |R_1 - R_2| = \frac{3\sqrt{6}-2\sqrt{10}}{4}$$

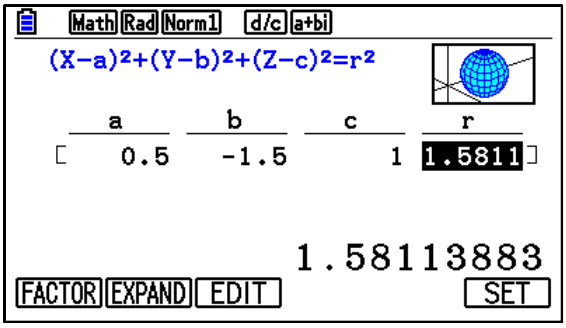


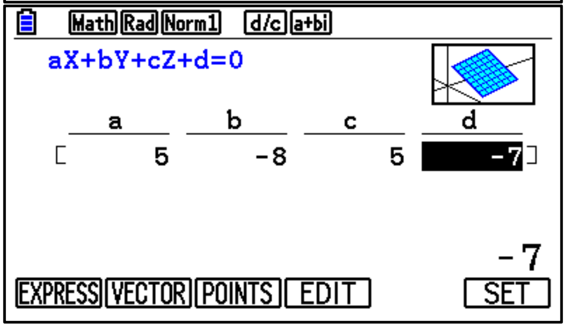
Aleshores, les dues esferes són secants.

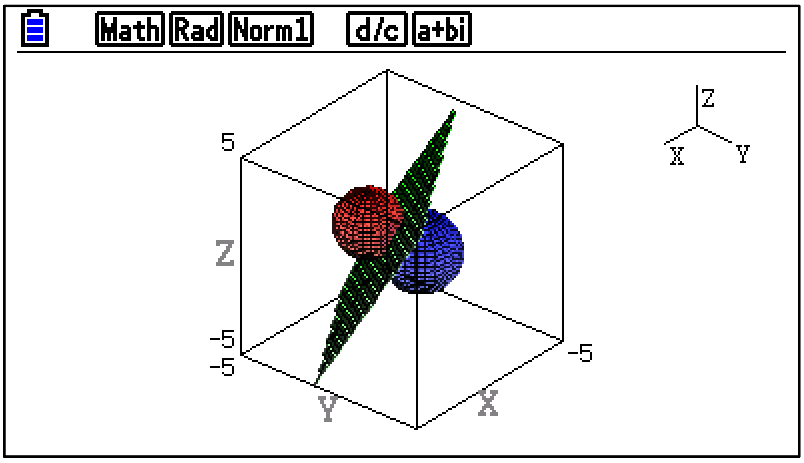
Calculem $E_1 - 2\cdot E_2$ que ens dóna el plànol intersecció de les dues esferes.
$E_1 - 2\cdot E_2 \equiv 5x - 8y + 5z - 7 = 0$

Obrim el *Menú Gráfico 3D*.
Definim i representem les dues esferes i el plànol intersecció.

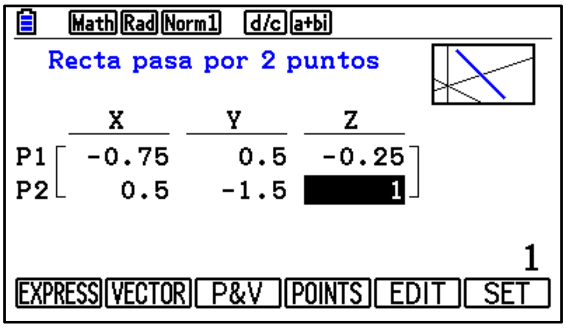


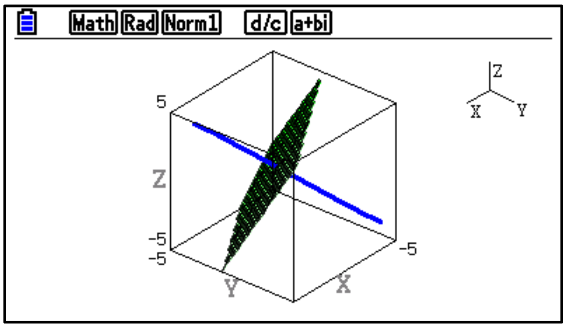




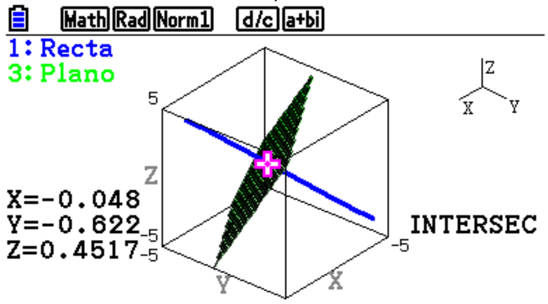


Definim i representem la recta que passa pels centres $O_1\left(-\frac{3}{4},\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$, $O_2\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{2},1\right)$



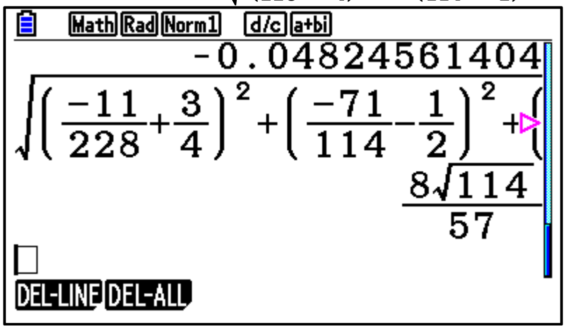


El centre de la circumferència intersecció és calcula efectuant la intersecció de la recta i el plànol.
Amb la funció *G-Solv*, determinem la intersecció:



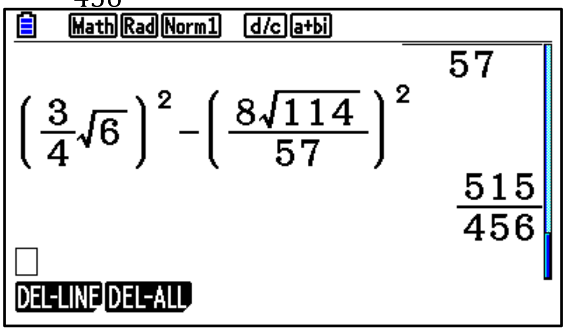
El centre de la circumferència és:
$O\left(\frac{-11}{228},\frac{-71}{114},\frac{103}{228}\right)$

Calculem $\overline{O_1O}=\sqrt{\left(\frac{-11}{228}+\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{-71}{114}+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{103}{228}+\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{8\sqrt{114}}{57}$



Siga R el radi de la circumferència intersecció de les dues esferes.
Per calcular el radi R aplicarem el teorema de Pitàgores al triangle rectangle de catets, R, $\overline{O_1O}=\frac{8\sqrt{114}}{57}$ i hipotenusa $R_1=\frac{3}{4}\sqrt{6}$

$$\left(\frac{3}{4}\sqrt{6}\right)^2=R^2+\left(\frac{8\sqrt{114}}{57}\right)^2$$
$$R^2=\frac{515}{456}$$



El radi de la circumferència és $R=\sqrt{\frac{515}{456}}$

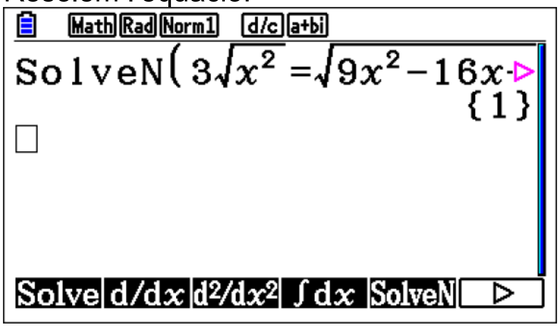
Problema 24
Proveu que el punt $T(1,0,1)$ pertany al plànol $\pi \equiv x-2y+2z=3$.
Determineu l'equació de l'esfera que passa pel punt $P(1,0,5)$ i és tangent en T al plànol π.

Solució:
Substituïm el punt $T(1,0,1)$ en l'equació del plànol $\pi \equiv x-2y+2z=3$ i vegem que es transforma en una igualtat:
$1-2\cdot 0+2\cdot 1=3$

El centre pertany a la recta r perpendicular al plànol que passa pel punt $T(1,0,1)$.
El vector director de la recta r és el característic del plànol π, $a=(1,-2,2)$
$r \equiv (x,y,z)=(1,0,1)+\mu(1,-2,2)$

El centre de l'esfera té coordenades:
$O(1+\mu,-2\mu,1+2\mu)$

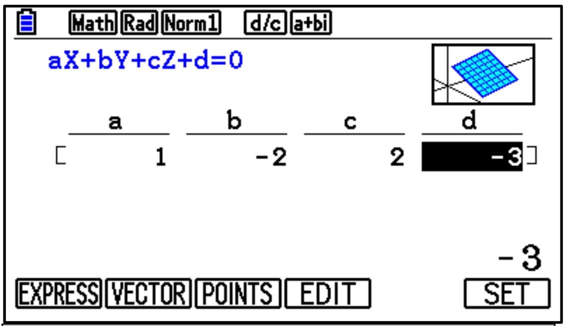
El centre compleix que $d(O,T)=d(O,P)=R$, radi de l'esfera.
$d(O,T)=\sqrt{(-\mu)^2+(2\mu)^2+(-2\mu)^2}=3\sqrt{\mu^2}$
$d(O,P)=\sqrt{(-\mu)^2+(2\mu)^2+(4-2\mu)^2}=\sqrt{9\mu^2-16\mu+16}$
$3\sqrt{\mu^2}=\sqrt{9\mu^2-16\mu+16}$

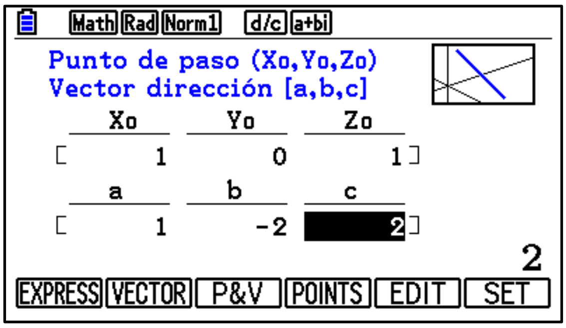
Obrim el *Menú Ejec-Mat*:
Resolem l'equació:


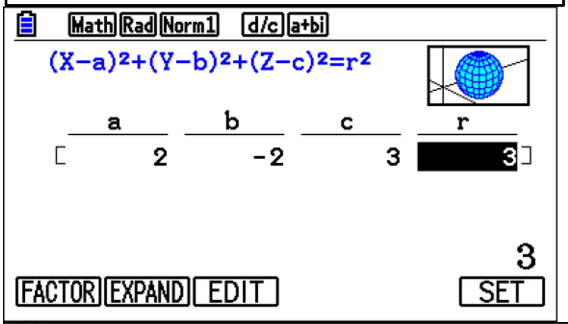
$\mu=1$
El centre de l'esfera és $O(2,-2,3)$
El radi és $R=3\cdot 1=3$

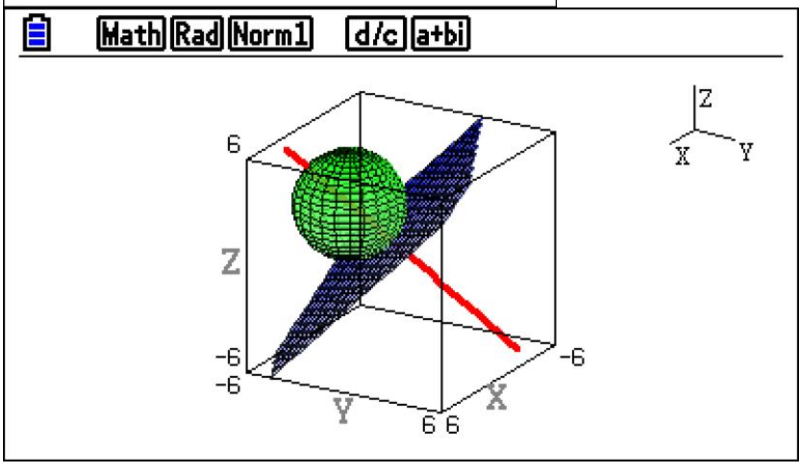
L'equació de l'esfera és:
$(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=3^2$

Obrim el *Menú Gráfico 3D*.
Definim i representem el plànol $\pi \equiv x-2y+2z=3$
la recta $r \equiv (x,y,z)=(1,0,1)+\mu(1,-2,2)$ i
l'esfera
$(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=3^2$


Math Rad Norm1 d/c a+bi
aX+bY+cZ+d=0
a b c d
[1 -2 2 -3]
-3
EXPRESS VECTOR POINTS EDIT SET


Math Rad Norm1 d/c a+bi
Punto de paso (Xo,Yo,Zo)
Vector dirección [a,b,c]
Xo Yo Zo
[1 0 1]
a b c
[1 -2 2]
2
EXPRESS VECTOR P&V POINTS EDIT SET

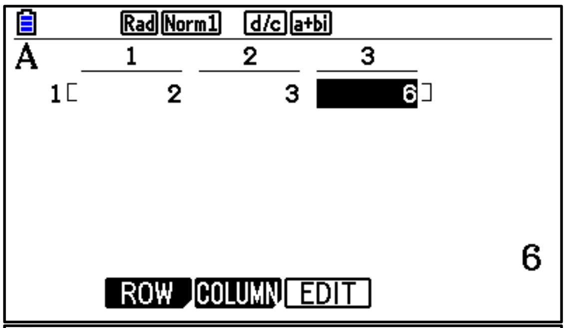

Math Rad Norm1 d/c a+bi
(X−a)²+(Y−b)²+(Z−c)²=r²
a b c r
[2 -2 3 3]
3
FACTOR EXPAND EDIT SET

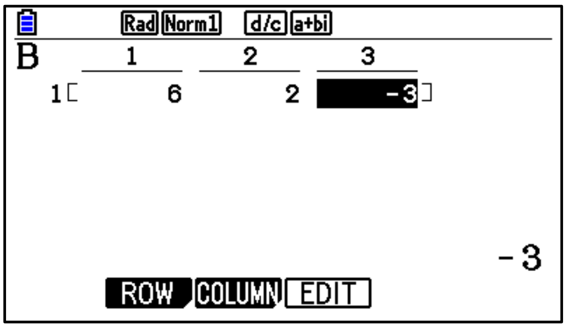

Math Rad Norm1 d/c a+bi
6
Z
-6
-6
Y
6 6
X
-6
Z
X
Y

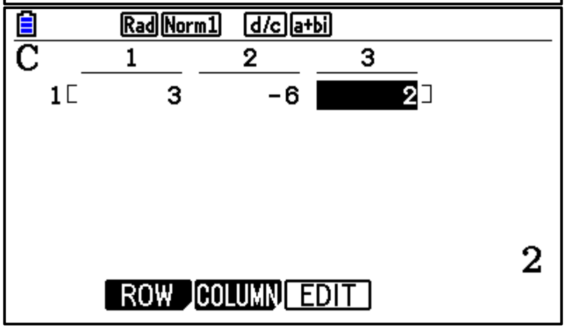
Problema 25

Considerem els punts $A(2,3,6), B(6,2,-3), C(3,-6,2)$ en l'espai tridimensional.
Verifiqueu que els segments $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}$ són arestes d'un cub, on $O(0,0,0)$.
Determineu el centre i el radi de l'esfera circumscrita al cub.

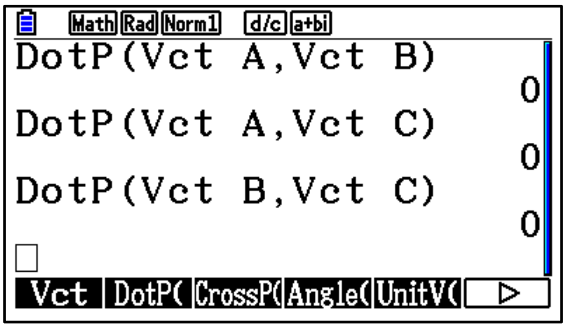
Solució:
Obrim el *Menú Ejec-Mat*.
Definim els vectors
$\overrightarrow{OA} = (2,3,6), \overrightarrow{OB} = (6,2,-3), \overrightarrow{OC} = (3,-6,2)$



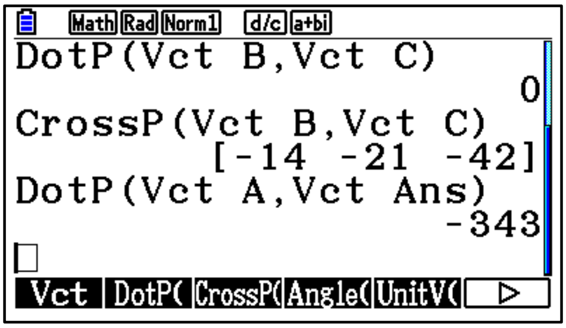




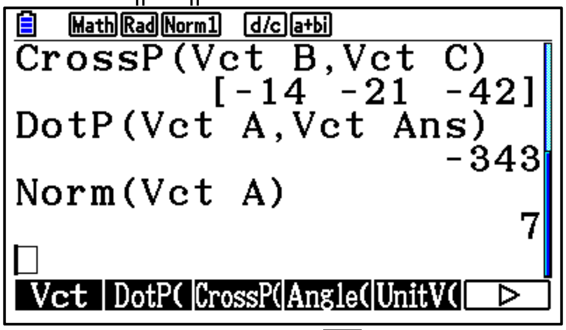
Vegem que els vectors dos a dos són ortogonals.
Calculem els productes escalars i vegem que són zero.



Vegem que els tres vectors són linealment independents.
Calculem el producte mixt dels tres vetcors i vegem que és distint de zero.



Calculem la mesura de l'aresta del cub.
Calculem $\|\overrightarrow{OA}\|$

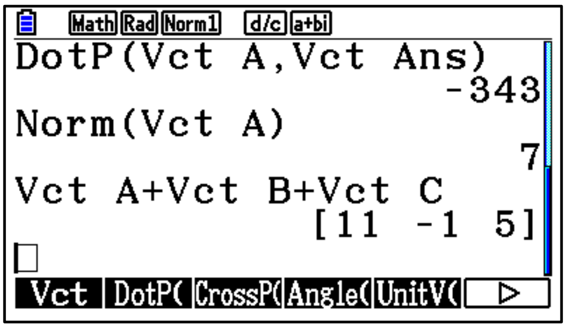


L'aresta del cub mesura $\overline{OA} = 7$

El radi de l'esfera mesura $R = \overline{OA}\frac{\sqrt{3}}{2}$

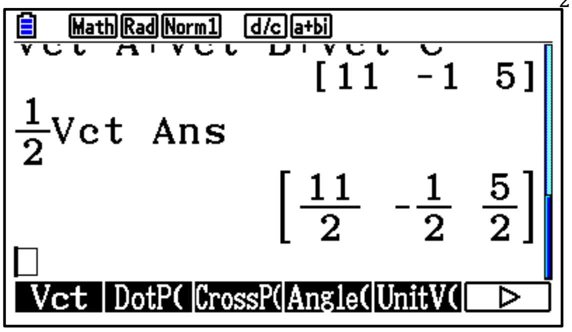
$R = \frac{7}{2}\sqrt{3}$

El vèrtex P del cub oposat al vèrtex O, les seues coordenades compleixen que:
$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$



Les coordenades són $P(11, -1, 5)$

El centre Q de l'esfera compleix que $\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OP}$

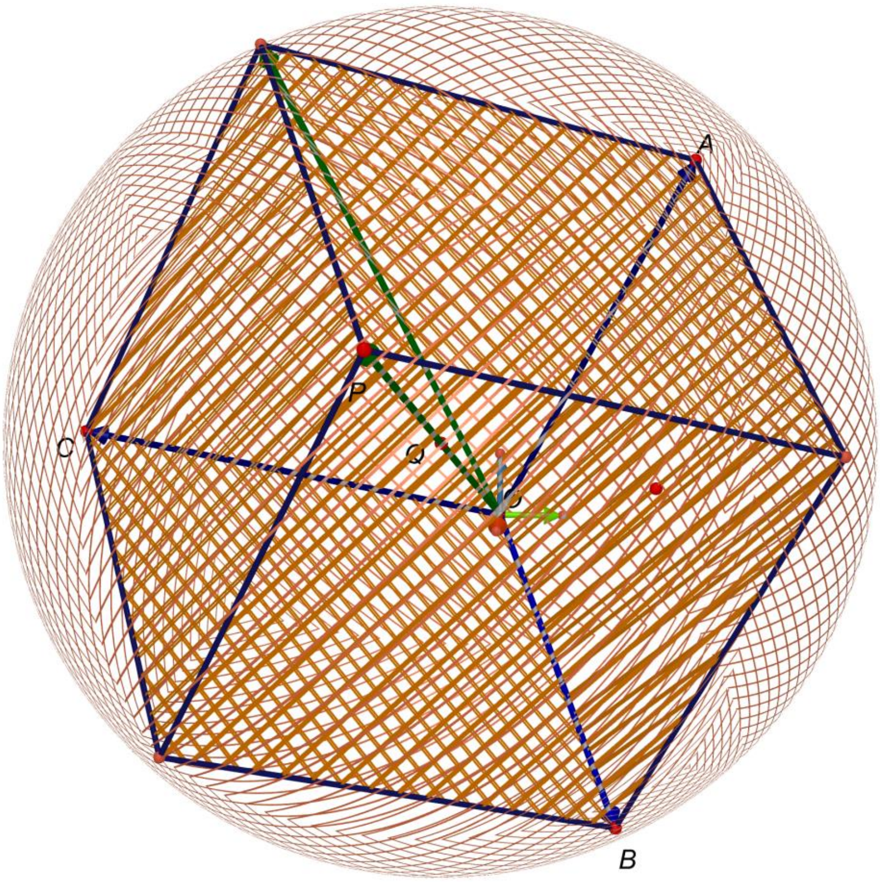


Les coordenades del centre són

$Q\left(\frac{11}{2},-\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right)$

L’equació de l’esfera és:

$\left(x-\frac{11}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\left(z-\frac{5}{2}\right)^2=\left(\frac{7}{2}\sqrt{3}\right)^2$



$(x-11/2)^2+(y+1/2)^2+(z-5/2)^2 = (7\sqrt{3}/2)^2$

Problema 26

Siguen les esferes $E_1 \equiv x^2+y^2+z^2-4x-12y+6z+45=0, E_2 \equiv x^2+y^2+z^2=81$

c) Demostreu que les dues esferes són tangents.

d) Determineu l’equació del plànol tangent a les dues esferes.

Solució:

a)

Completant quadrats:

$E_1 \equiv (x-2)^2+(y-6)^2+(z+3)^2=-45+4+36+9=2^2$

L’esfera té centre $O_1(2,6,-3)$ i radi $R_1=2$

L’esfera $E_2 \equiv x^2+y^2+z^2=81$ té centre $O_2(0,0,0)$ i radi $R_2=9$

Calculem la distància entre els centres:

$\overline{O_1O_2}=\sqrt{2^2+6^2+3^2}=7$

Calculem la suma i la diferència dels radis:

$R_1+R_2=2+9=11, R_2-R_1=9-2=7$

Aleshores, $\overline{O_1O_2}=R_2-R_1=7$

Les esferes són tangents interiors.

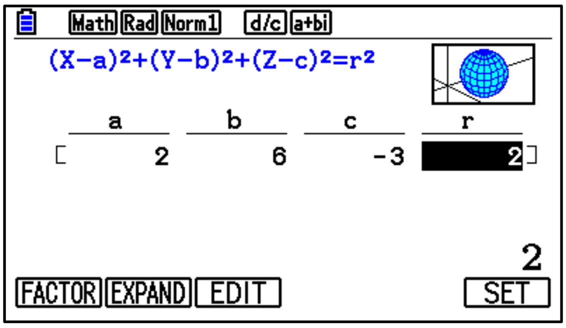
b)

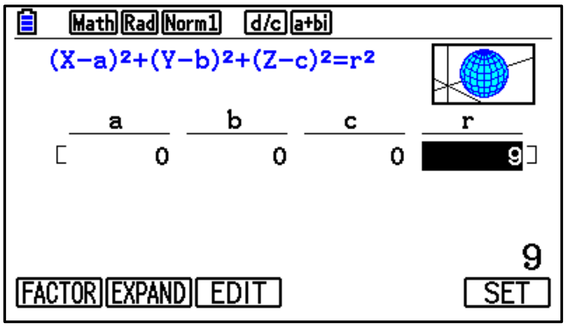
Calculem E_1-E_2

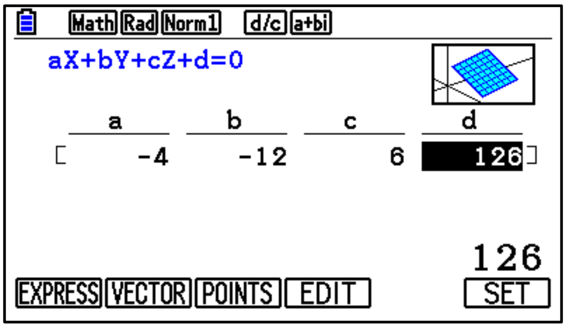
$\pi \equiv -4x-12y+6z+36=0$, plànol tangent a les dues esferes.

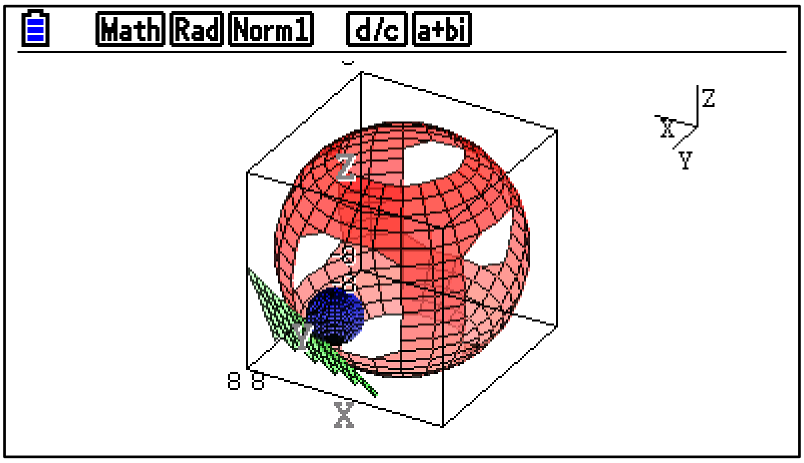
Obrim el *Menú Gráfico 3D*.

Definim i representem les dues esferes i el plànol.








Math
Rad
Norm1
d/c
a+bi
Z
X
Y

Problema 27

Siguen les esferes $E_1 \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 2y - 4z + 11 = 0$,
$E_2 \equiv (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2 = 3^2$

c) Demostreu que les dues esferes són tangents.
d) Determineu l'equació del plànol tangent a les dues esferes.

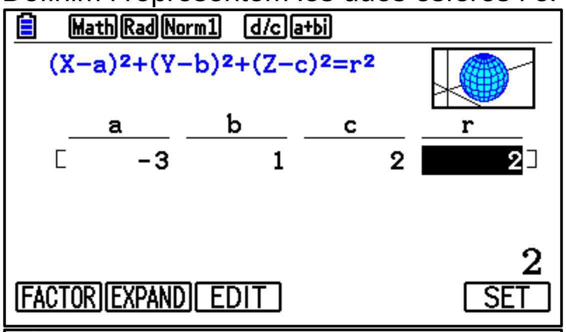
Solució:
Completant quadrats:
$E_1 \equiv (x+3)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = -11 + 9 + 1 + 4 = 2^2$
L'esfera té centre $O_1(-3, 1, 2)$ i radi $R_1 = 2$

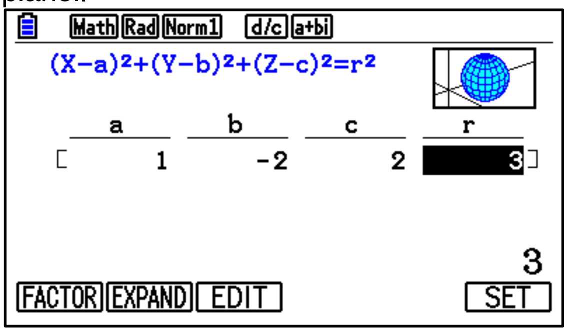
L'esfera $E_2 \equiv (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2 = 3^2$ té centre $O_2(1, -2, 2)$ i radi $R_2 = 3$

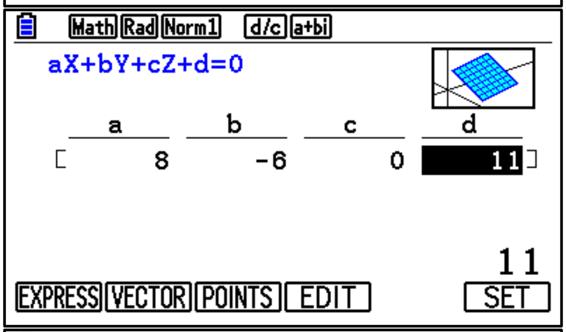
Calculem la distància entre els centres:
$\overline{O_1O_2} = \sqrt{4^2 + 3^2 + 0^2} = 5$
Calculem la suma dels radis:
$R_1 + R_2 = 2 + 3 = 5$

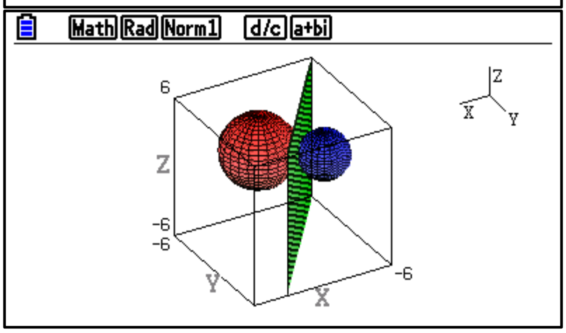
Les esferes són tangents exteriors.
b)
$E_2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 4z = 0$
Calculem $E_1 - E_2$
$\pi \equiv 8x - 6y + 11 = 0$, plànol tangent a les dues esferes.

Obrim el *Menú Gráfico 3D*.
Definim i representem les dues esferes i el plànol.









Problema 28

Determineu l’equació de l’esfera E, amb centre sobre la recta $r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \; t \in \mathbb{R}$

Tangent al plànol $\pi \equiv 3x - y - 2z + 14 = 0$ en el punt $T(-4, 0, 1)$

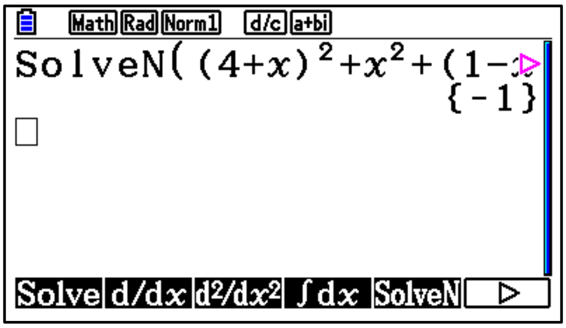
Solució:
Notem que el punt $T(-4, 0, 1)$ pertany al plànol $\pi \equiv 3x - y - 2z + 14 = 0$ ja que satisfà la seua equació, $3(-4) - 0 - 2 \cdot 1 + 14 = 0$

Les coordenades del centre de l’esfera són $O(t, t, t)$
El radi R de l’esfera compleix:
$d(O, T) = d(O, \pi) = R$

$$\sqrt{(-4-t)^2 + (0-t)^2 + (1-t)^2} = \left| \frac{3(-t) - (-t) - 2(-t) + 14}{\sqrt{3^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} \right|$$

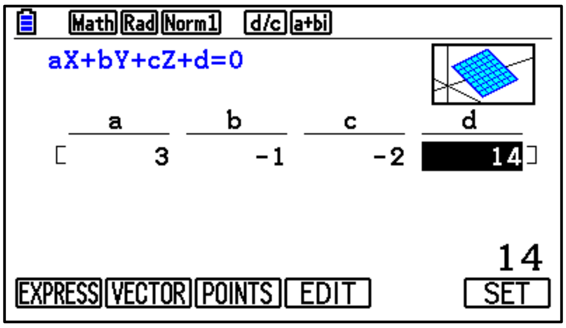
$$\sqrt{(4+t)^2 + t^2 + (1-t)^2} = \sqrt{14}$$

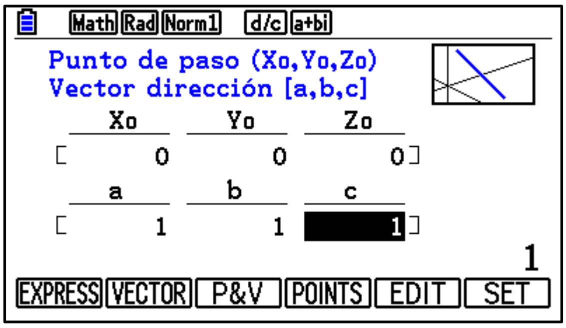
Obrim el *Menú Ejec-Mat*
Resolem l’equació
$(4+t)^2 + t^2 + (1-t)^2 = 14$

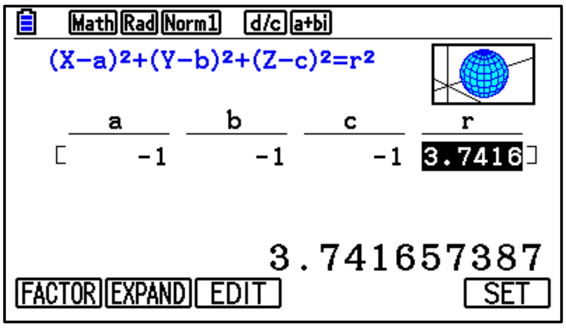


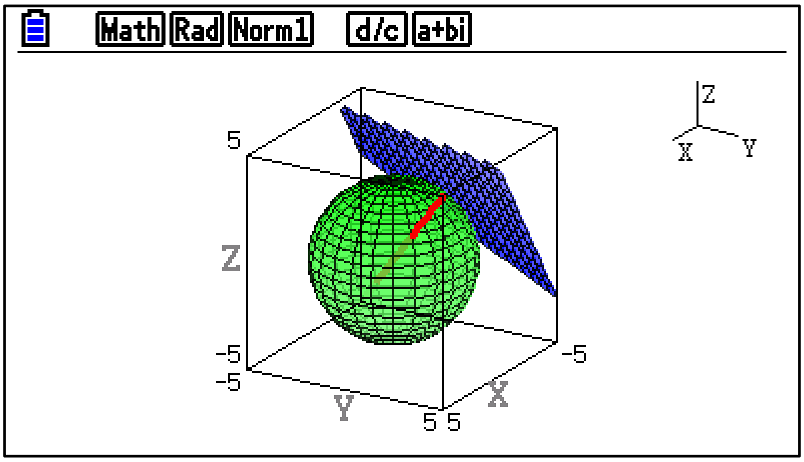
El problema té una solució:
El centre de l’esfera és $O(-1, -1, -1)$ i el radi $R = \sqrt{14}$
L’equació de l’esfera és:
$E \equiv (x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 14$

Obrim el *Menú Gráfico 3D*
Definim i representem el plànol la recta i l’esfera.



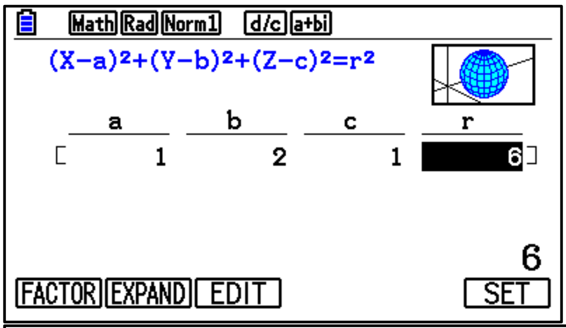


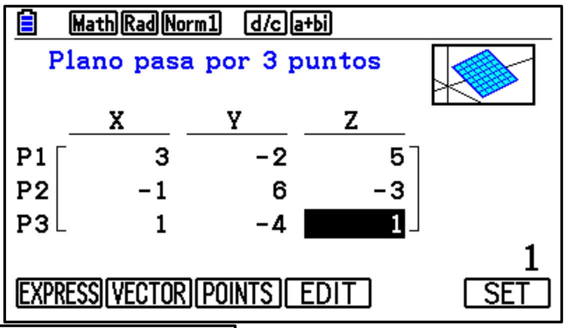

Math Rad Norm1 d/c a+bi
(X−a)²+(Y−b)²+(Z−c)²=r²
a b c r
[−1 −1 −1 3.7416]
3.741657387
FACTOR EXPAND EDIT SET

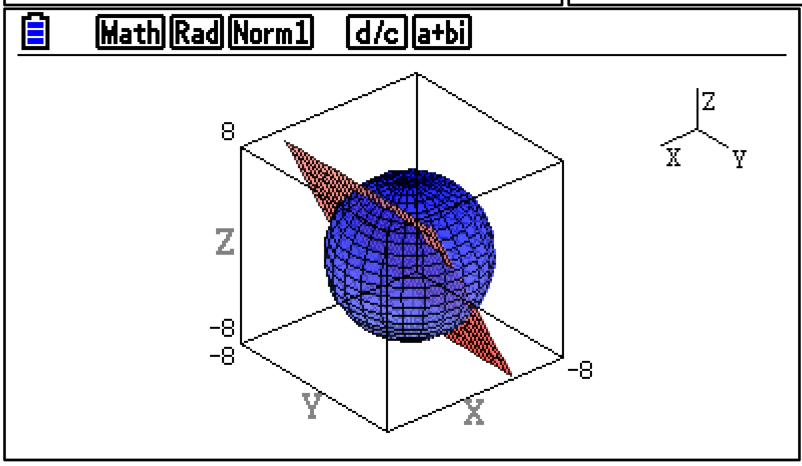

Math Rad Norm1 d/c a+bi
Z
X Y
5
Z
-5
-5
Y
5 5
X
-5

Problema 29
Els punts $A(3,-2,5), B(-1,6,-3)$ són els extrems d'un diàmetre d'una circumferència que passa pel punt $C(1,-4,1)$
Determineu l'equació de la circumferència.

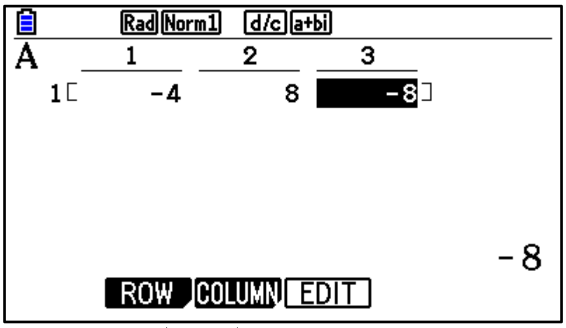
Solució:
El centre de la circumferència és el punt mig O del segment $\overline{AB}$ que té coordenades $O(1,2,1)$
$\overrightarrow{OA} = (2,-4,4)$
El radi és de la circumferència és:
$r = \|\overrightarrow{OA}\| = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + 4^2} = 6$
L'equació de la circumferència és la intersecció de l'esfera de centre $O(1,2,1)$ i radi $r = 6$ i el plànol que passa pels punts $A(3,-2,5), B(-1,6,-3), C(1,-4,1)$
Obrim el *Menú Gráfico 3D*
Definim i representem l'esfera i el plànol.

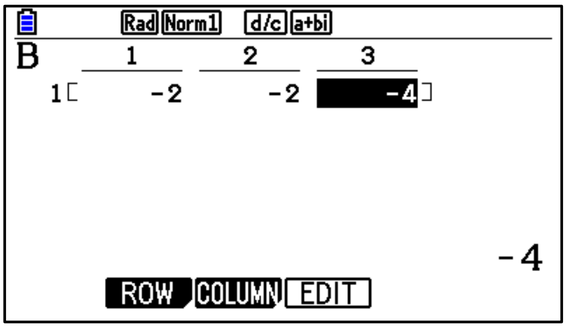




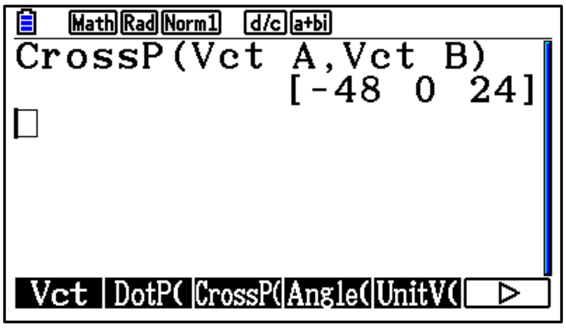


L'equació de l'esfera és
$E \equiv (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 6^2$
$\overrightarrow{AB} = (4,-8,8), \overrightarrow{AC} = (-2,-2,-4)$
Obrim el *Menú Ejec-Mat*
Definim els vectors $\overrightarrow{AB} = (4,-8,8), \overrightarrow{AC} = (-2,-2,-4)$





Calculem $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ vector característic del plànol que passa pels punts A, B, C



El vector característic del plànol és $a = (-2, 0, 1)$
L’equació del plànol que passa pels punts A, B, C és:
$\pi_{ABC} \equiv -2(x-3) + 0(y+2) + 1(z-5) = 0$

L’equació de la circumferència és:
$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 6^2 \\ -2x + z + 1 = 0 \end{cases}$

Problema 30

El punt $C(1,-1,-2)$ és el centre d'una circumferència que talla la recta

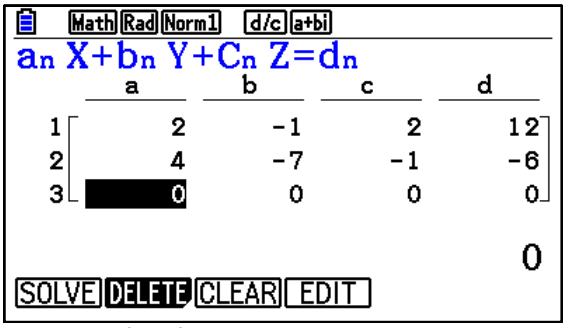
$r \equiv \begin{cases} 2x - y + 2z - 12 \\ 4x - 7y - z + 6 = 0 \end{cases}$ una corda de longitud 8.

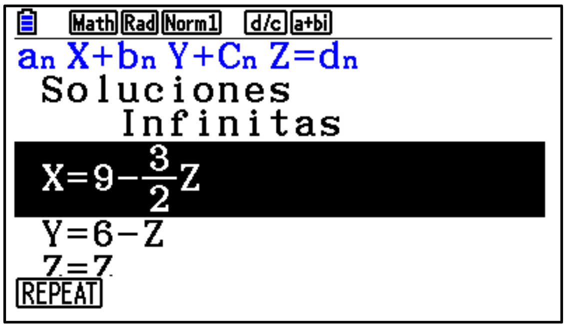
Determineu l'equació de la circumferència.

Solució.

Obrim el *Menú Ecuación*.

Determinem l'equació paramètrica de la recta, resolent el sistema





$r \equiv \begin{cases} x = 9 - 3\mu \\ y = 6 - 2\mu \\ z = 2\mu \end{cases}$

Un punt de la recta és $P(9,6,0)$ i el vector director $v_r = (-3,-2,2)$

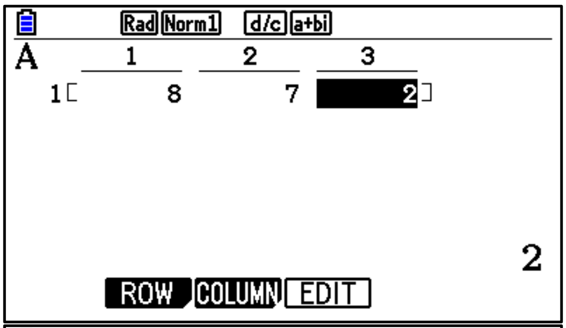
$\overrightarrow{CP} = (8,7,2)$

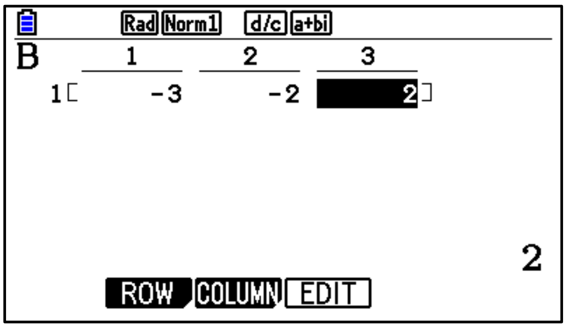
Determinem el plànol que conté la recta r i el centre $C(1,-1,-2)$ que conté la circumferència que cerquem.

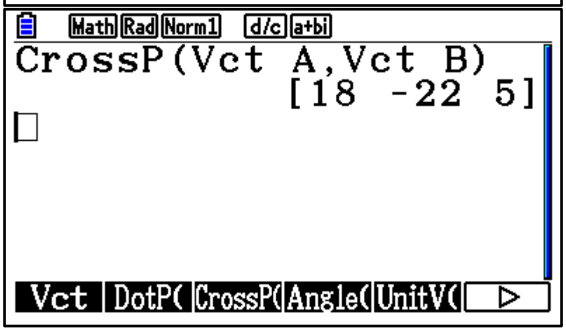
Calculem $\overrightarrow{CP} \times v_r$ vector característic del plànol.

Obrim el *Menú Ejec-Mat*.

Definim els vectors $\overrightarrow{CP},\ v_r$





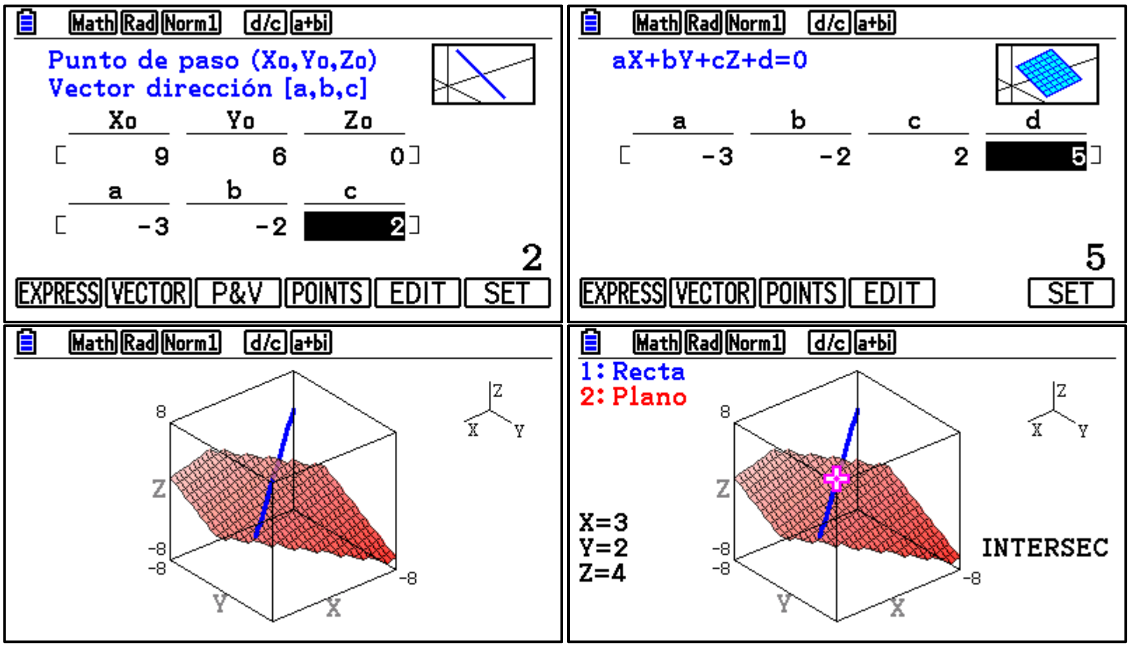


L'equació del plànol és:

$\pi \equiv 18(x-1) - 22(y+1) + 5(z+2) = 0$

$\pi \equiv 18x - 22y + 5x - 30 = 0$

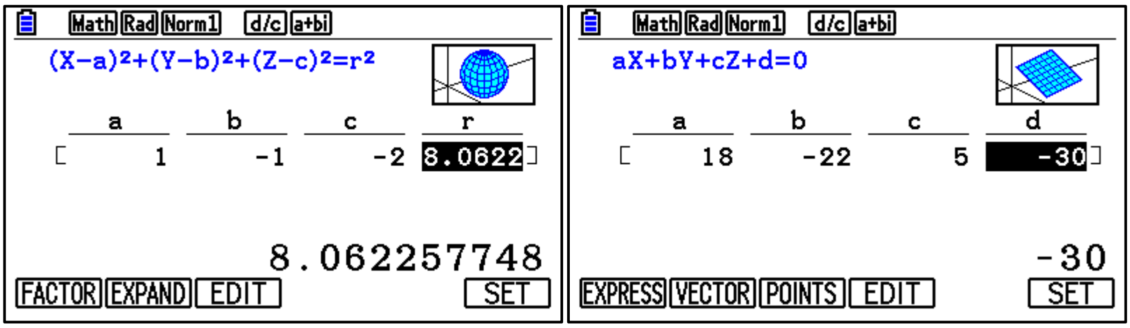
Determinem el punt projecció del centre $C(1,-1,-2)$ sobre la recta r.
El plànol perpendicular a la recta r que passa pel centre té vector característic el seu vector director, $v_r = (-3,-2,2)$
La seua equació és:
$\omega \equiv -3(x-1) - 2(y+1) + 2(z+2) = 0$
$\omega \equiv -3x - 2y + 2z + 5 = 0$
Obrim el *Menú Gráfico 3D*.
Definim i representem la recta r i el plànol ω.
Amb la funció *G-Solv*, determinem la intersecció de la recta i el plànol.

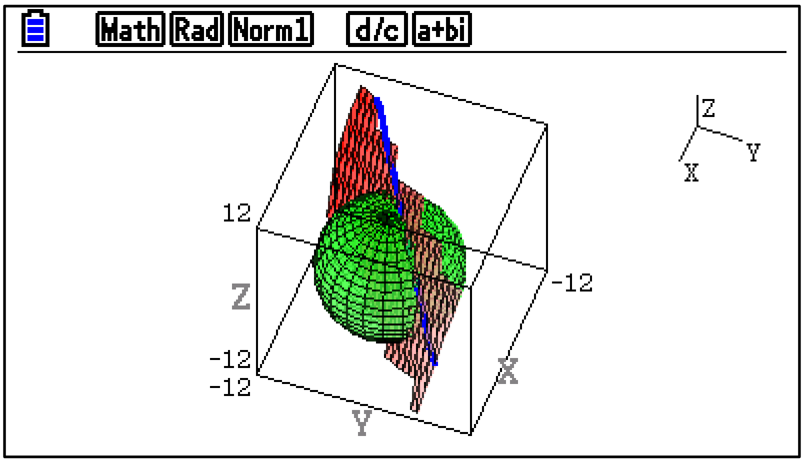


El punt projecció és la intersecció de la recta r i el plànol ω.
Les seues coordenades són $P'(3,2,4)$. És el centre de la corda.
$\overrightarrow{CP'} = (2,3,6)$
$\left\|\overrightarrow{CP'}\right\| = \sqrt{2^2 + 3^3 + 6^2} = 7$
Aplicant el teorema de Pitàgores, el radi de la circumferència és:
$r = \sqrt{4^2 + 7^2} = \sqrt{65}$
L’esfera de centre $C(1,-1,-2)$ i radi $r = \sqrt{65}$ té equació:
$E \equiv (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2 = 65$
La circumferència és la intersecció de l’esfera E i el plànol π

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2 = 65 \\ 18x - 22y + 5x - 30 = 0 \end{cases}$$

Obrim el *Menú Gráfico 3D.*
Definim i representem l’esfera i el plànol π.




Math Rad Norm1 d/c a+bi
12
Z
-12
-12
Y
-12
X
Z
Y
X

Problema 31

Demostreu que per la recta $r \equiv \begin{cases} x = 4 + 4t \\ y = 1 + 3t \\ z = 1 + t \end{cases}$ només es pot traçar un plànol tangent a l'esfera $E \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y + 2z + 8 = 0$

Determineu la seua equació.

Solució:

Completant quadrats en l'equació de l'esfera:

$E \equiv (x-1)^2 + (y+3)^2 + (z+1)^2 = -8 + 1 + 9 + 1 = 3$

El centre de l'esfera és el punt $O(1, -3, -1)$ i el radi $R = \sqrt{3}$

Només es pot traçar un plànol tangent a l'esfera que continga la recta i la recta és tangent a l'esfera.

Un punt de la recta és $P(4, 1, 1)$ i el vector director $v_r = (4, 3, 1)$

Vegem que la distància del centre de l'esfera a la recta r és igual al radi $R = \sqrt{3}$.

El plànol perpendicular a la recta r que passa pel centre O té vector característic el vector director de la recta $v_r = (4, 3, 1)$

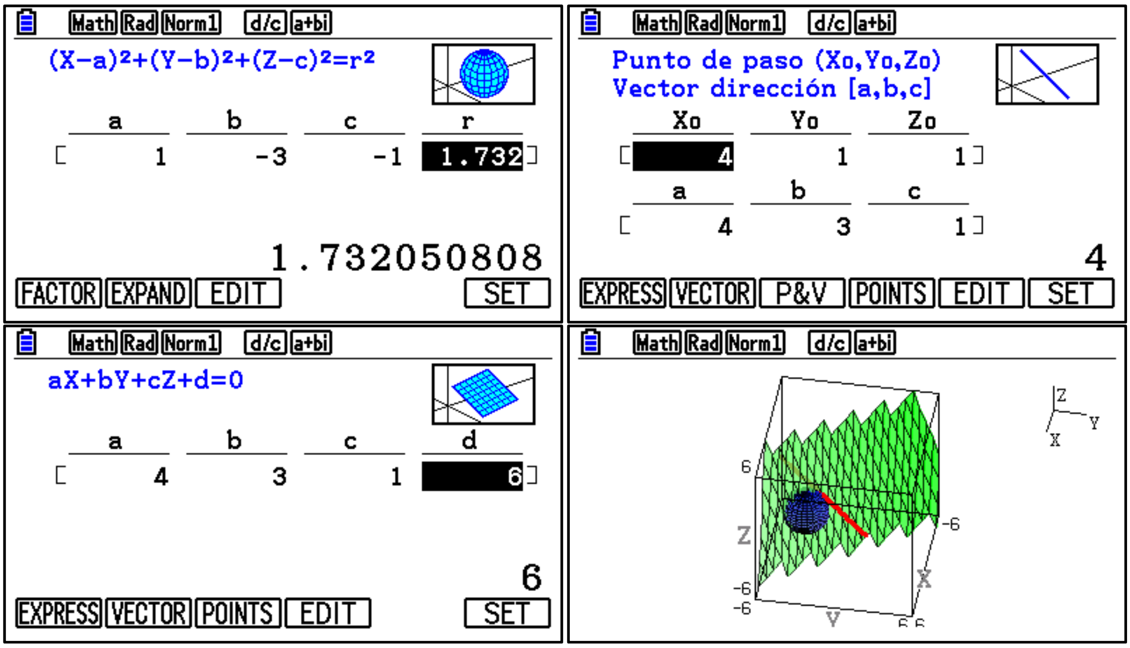
La seua equació és:

$\pi \equiv 4(x-1) + 3(y+3) + (z+1) = 0$

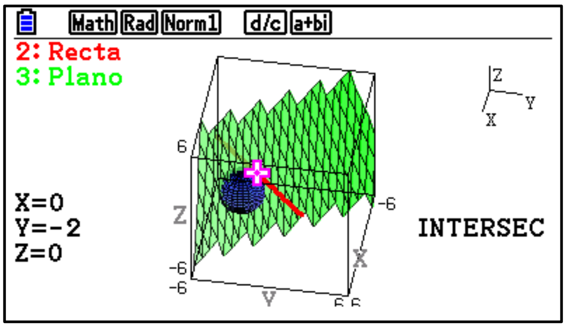
$\pi \equiv 4x + 3y + z + 6 = 0$

Obrim el *Menú Gráfico 3D*

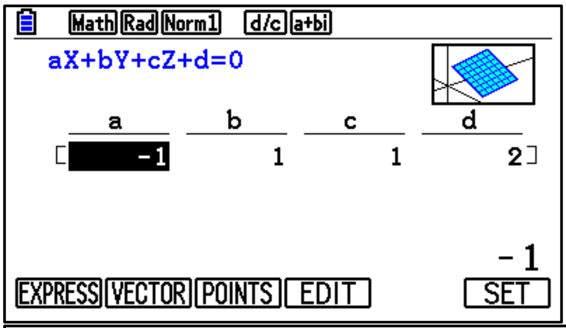
Definim i representem l'esfera, la recta i el plànol.

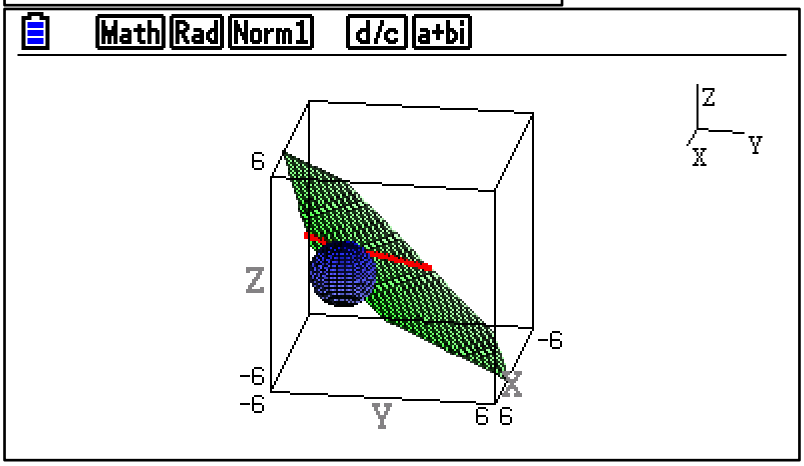


Amb la funció *G-Solv*, determinem la intersecció de la recta i el plànol, punt projecció del centre $O(1,-3,-1)$ sobre la recta r



El punt projecció és $O'(0,-2,0)$
Calculem la distància entre els punts O, O'
$\overrightarrow{OO'} = (-1,1,1)$
$\overline{OO'} = \sqrt{3}$
La recta r és tangent a l’esfera E aleshores, només es pot traçar un plànol tangent a l’esfera.
L’equació del plànol que cerquem té vector característic $\overrightarrow{OO'} = (-1,1,1)$ i passa pel punt $O'(0,-2,2)$
La seua equació és $\omega \equiv -(x-0)+(y+2)+(z-0)=0$
Simplificant:
$\omega \equiv -x+y+z+2=0$
Representem el plànol ω





Problema 32

Determineu l’equació de l’esfera de radi $\sqrt{6}$ tangent al plànol $\pi \equiv x + 2y - z + 1 = 0$ en el punt de coordenades $(1, 0, 2)$.

Solució:
El punt $P(1, 0, 2)$ pertany al plànol ja que $1 + 2 \cdot 0 - 2 + 1 = 0$.

El centre de l’esfera pertany al la recta perpendicular al plànol π que passa pel punt $P(1, 0, 2)$.
El vector director de la recta és el característic del plànol $a = (1, 2, -1)$
L’equació de la recta és:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = 2\mu \\ z = 2 - \mu \end{cases}$$

Un punt qualsevol de la recta té coordenades:
$A(1 + \mu, 2\mu + 2 - \mu)$
$d(A, r) = \sqrt{6}$

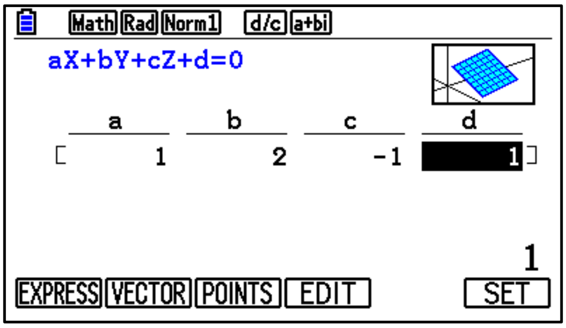
$$\left| \frac{1 + \mu + 2(2\mu) - (2 - \mu) + 2}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}} \right| = \sqrt{6}$$

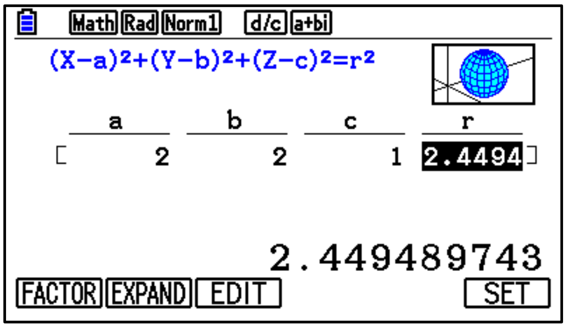
Simplificant:
$|6\mu| = 6$
Resolent l’equació:
$\mu = 1, -1$
El problema té dues solucions:

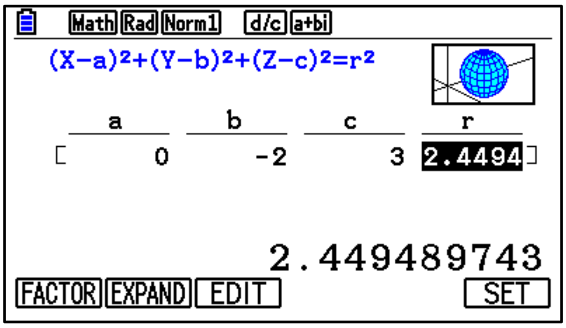
Si $\mu = 1$ el centre de l’esfera és el punt $O_1(2, 2, 1)$
L’equació de l’esfera és:
$E_1 \equiv (x - 2)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 6$

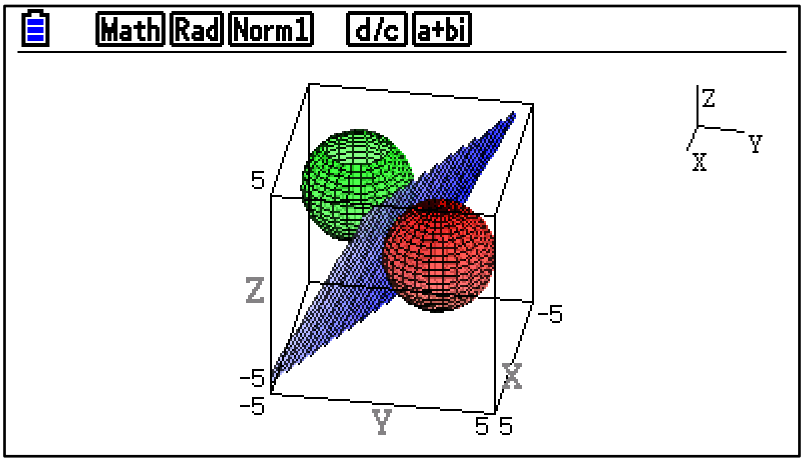
Si $\mu = -1$ el centre de l’esfera és el punt $O_2(0, -2, 3)$
L’equació de l’esfera és:
$E_2 \equiv (x - 0)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 6$

Obrim el *Menú Gráfico 3D*
Definim i representem el plànol i les dues esferes.






Math Rad Norm1 d/c a+bi
(X−a)²+(Y−b)²+(Z−c)²=r²
a b c r
[0 -2 3 2.4494]
2.449489743
FACTOR EXPAND EDIT SET


Math Rad Norm1 d/c a+bi
5
Z
-5
-5
Y
5 5
X
-5
Z
Y
X

Problema 33

Determineu el punt O del plànol $\pi \equiv x+y+z=1$ que equidista dels punts $A(1,-1,2)$, $B(3,1,2)$, $C(1,1,0)$. Determineu l'equació de l'esfera de centre el punt O anterior que passa pels tres punts A, B, C.

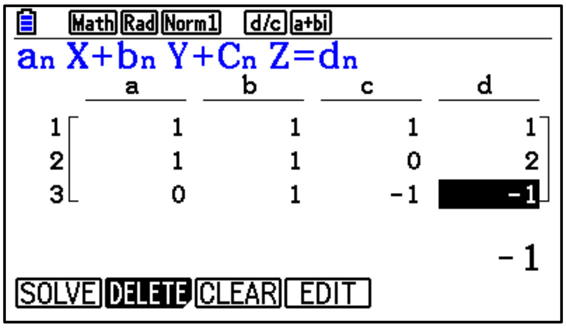
Solució:

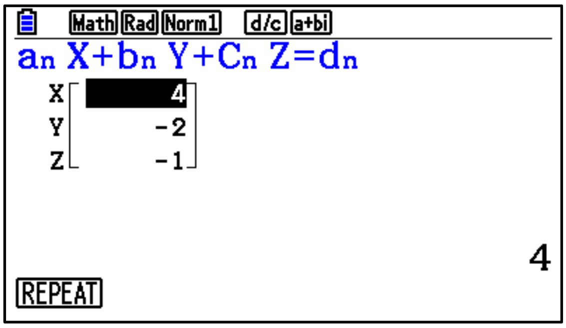
El punt O és la intersecció dels s mediadors als segments $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ i el plànol $\pi \equiv x+y+z=1$

El plànol mediador al segment $\overline{AB}$ té vector característic el vector $\overrightarrow{AB} = (2,2,O)$ i passa pel punt mig M del segment $\overline{AB}$, $M(2,0,2)$.
La seua equació és:
$\pi_M \equiv 2(x-2)+2(y-0)+0(z-1)=0$
Simplificant:
$\pi_M \equiv x+y=2$

El plànol mediador al segment $\overline{AC}$ té vector característic el vector $\overrightarrow{AC} = (0,2,-2)$ i passa pel punt mig N del segment $\overline{AC}$, $N(1,0,1)$.
La seua equació és:
$\pi_N \equiv 0(x-1)+2(y-0)-2(z-1)=0$
Simplificant:
$\pi_N \equiv y-z=-1$

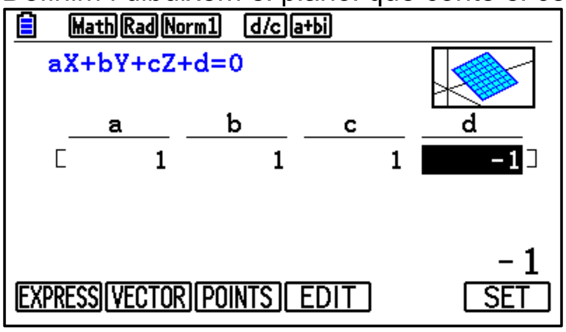
Per determinar les coordenades del centre O, resolem el sistema format pels tres plànols.
Obrim el *Menú Ecuación*

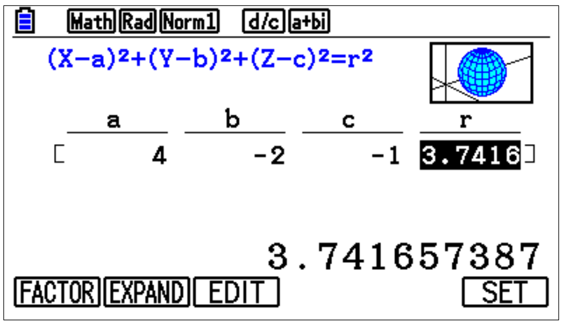


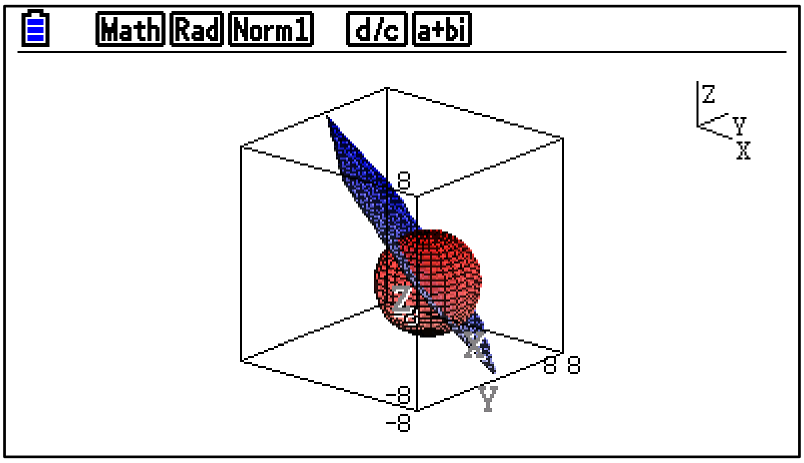


El centre té coordenades $O(4,-2,-1)$
El radi és $r = \overline{OA}$
$r = \sqrt{(-3)^2+2^2+1^2} = \sqrt{14}$
L'equació de l'esfera és:
$E \equiv (x-4)^2+(x+2)^2+(z+1)^2 = 14$

Obrim el *Menú Gráfico 3D*
Definim i dibuixem el plànol que conté el centre i l'esfera.






Math
Rad
Norm1
d/c
a+bi
Z
Y
X
8
-8
-8
8 8

Problema 34

Donades les esferes d'equacions:

$E_1 \equiv (x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=4$, $E_2 \equiv (x-2)^2+(y-4)^2+(z-3)^2=4$.

a) Proveu que són secants.
b) Determineu el plànol intersecció de les dues esferes.
c) Calculeu el centre i el radi de la circumferència intersecció.´.
d) Calculeu el volum de la intersecció de les dues esferes.

Solució:

a)

L'esfera $E_1 \equiv (x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=4$ té centre $O_1(1,2,1)$ i radi $R_1=2$.

L'esfera $E_2 \equiv (x-2)^2+(y-4)^2+(z-3)^2=4$ té centre $O_2(2,4,3)$ i radi $R_2=2$.

$\overline{O_1O_2}=\left\|\overrightarrow{O_1O_2}\right\|=\|(1,2,2)\|=3$.

$|R_1-R_2|<\overline{O_1O_2}<R_1+R_2$

$0<3<4$

Les esferes són secants.

b)

$E_1 \equiv x^2+y^2+z^2-2x-4y-2z=4-1-4-1=-2$

$E_2 \equiv x^2+y^2+z^2-4x-8y-6z=4-4-16-9=-25$

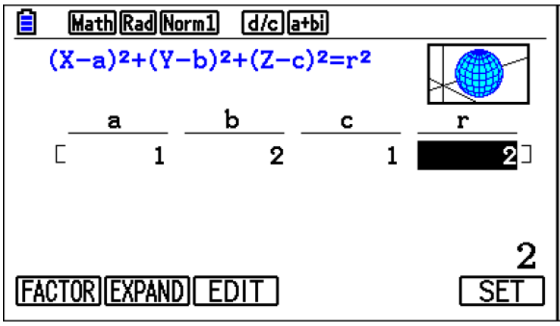
Per determinar el plànol intersecció restem les dues equacions:

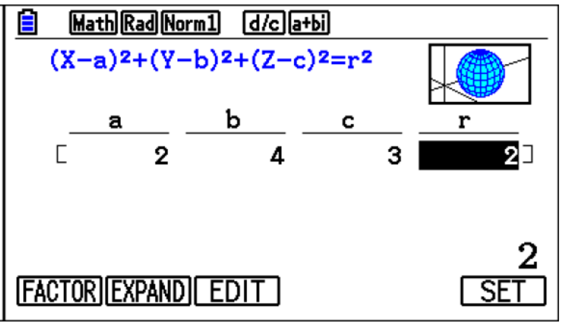
L'equació del plànol intersecció és:

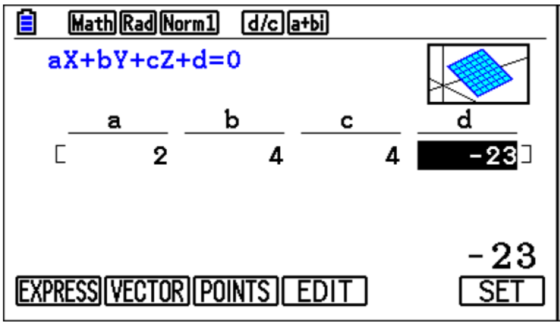
$\pi \equiv 2x+4y+4z-23=0$

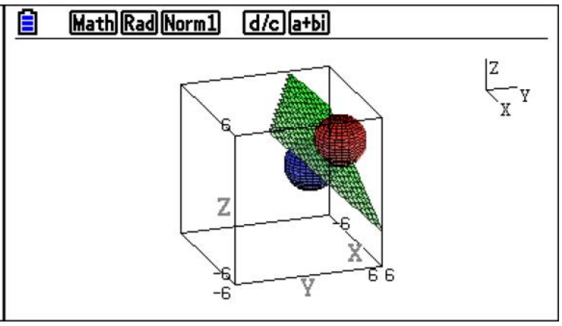
Obrim el *Menú Gráfico 3D*.

Definim i representem les dues esferes i el plànol intersecció:





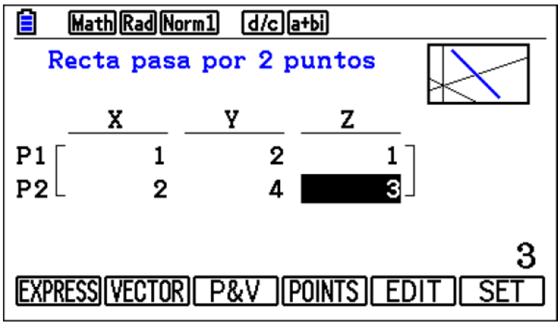


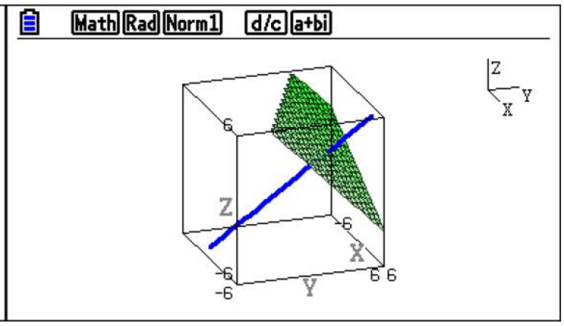


c)

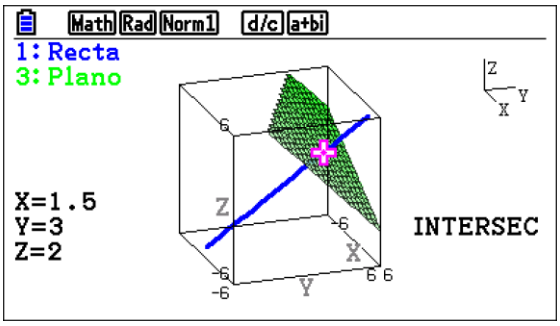
Per determinar el centre de la circumferència intersecció de les dues esferes calcularem la intersecció de la recta que passa pels dos centres i el plànol.

Definim i representem la recta que passa pels centres de les esferes





Amb la funció *G-Solv,* determinem la intersecció de la recta i el plànol.



El centre de la circumferència intersecció té centre el punt:
$O\left(\frac{3}{2},3,2\right)$. Notem que és el punt mig dels dos centres ja que les dues circumferències tenen el mateix radi.
Per calcular el radi de la circumferència apliquem el teorema de Pitàgores al triangle equilàter d’hipotenusa $R_1 = 2$ i catet $a = d(O_1, \pi) = \left|\frac{2\cdot 1+4\cdot 2+4\cdot 1-23}{\sqrt{4+16+16}}\right| = \frac{3}{2}$, la meitat de la distància entre els centres, ja que les dues esferes tenen el mateix radi.
El radi de la circumferència és:

$$r = \sqrt{2^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

d)
La intersecció de les dues esferes està formada per dos casquets iguals de radi $R_1 = 2$ i altura, $h = R_1 - a = \frac{1}{2}$

El volum d’un casquet esfèric és $V_{casquet} = \pi \cdot h^2 \left(R - \frac{h}{3}\right)$

El volum intersecció és:

$$V = 2\pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(2 - \frac{1}{6}\right) = \frac{11}{12}\pi$$

Problema 35

Donades les esferes d'equacions:

$E_1 \equiv (x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=4$, $E_2 \equiv (x-2)^2+(y-4)^2+(z-3)^2=9$.

a) Proveu que són secants.
b) Determineu el plànol intersecció de les dues esferes.
c) Calculeu el centre i el radi de la circumferència intersecció.
d) Calculeu el volum de la intersecció de les dues esferes.

Solució:

a)

L'esfera $E_1 \equiv (x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=4$ té centre $O_1(1,2,1)$ i radi $R_1=2$.

L'esfera $E_2 \equiv (x-2)^2+(y-4)^2+(z-3)^2=4$ té centre $O_2(2,4,3)$ i radi $R_2=3$.

$\overline{O_1O_2}=\left\|\overrightarrow{O_1O_2}\right\|=\|(1,2,2)\|=3.$

$|R_1-R_2|<\overline{O_1O_2}<R_1+R_2$

$1<3<5$

Les esferes són secants.

b)

$E_1 \equiv x^2+y^2+z^2-2x-4y-2z=4-1-4-1=-2$

$E_2 \equiv x^2+y^2+z^2-4x-8y-6z=9-4-16-9=-20$

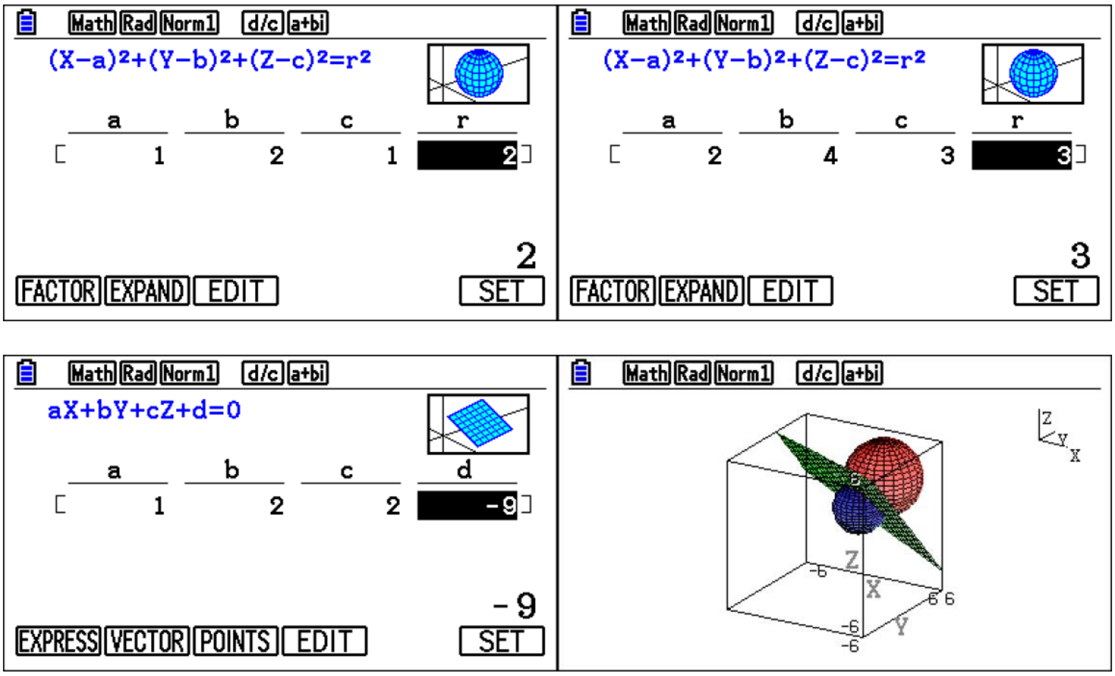
Per determinar el plànol intersecció restem les dues equacions:

L'equació del plànol intersecció és:

$\pi \equiv x+2y+2z-9=0$

Obrim el *Menú Gráfico 3D*.

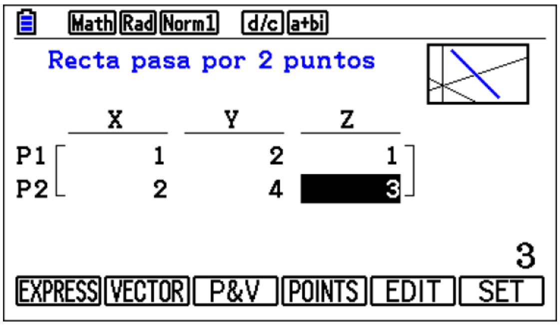
Definim i representem les dues esferes i el plànol intersecció:

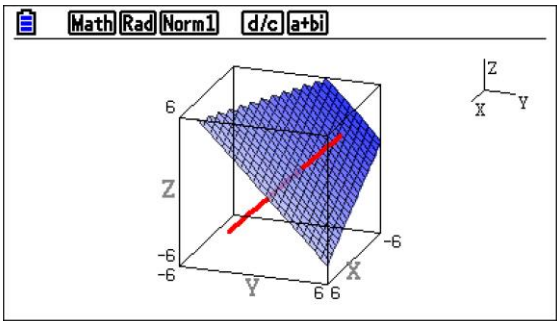


c)

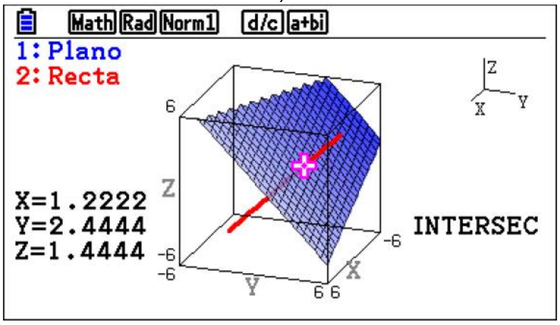
Per determinar el centre de la circumferència intersecció de les dues esferes calcularem la intersecció de la recta que passa pels dos centres i el plànol.

Definim i representem la recta que passa pels centres de les esferes





Amb la funció *G-Solv*, determinem la intersecció de la recta i el plànol.



El centre de la circumferència intersecció té centre el punt:

$O\left(\frac{11}{9},\frac{22}{9},\frac{13}{9}\right)$

Per calcular el radi de la circumferència apliquem el teorema de Pitàgores al triangle equilàter d'hipotenusa $R_1 = 2$ i catet $a = d(O_1, \pi) = \left|\frac{1\cdot 1+2\cdot 2+2\cdot 1-9}{\sqrt{1+4+4}}\right| = \frac{2}{3}$, la meitat de la distància entre els centres, ja que les dues esferes tenen el mateix radi.
El radi de la circumferència és:

$$r = \sqrt{2^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

d)
La intersecció de les dues esferes està format per dos casquets:
1.- Un casquet de radi $R_1 = 2$ i altura, $h_1 = R_1 - a = \frac{4}{3}$
2.- Un casquet de radi $R_2 = 3$ i altura, $h_2 = R_2 - (\overline{O_1O_2} - a) = \frac{2}{3}$

El volum d'un casquet esfèric és $V_{casquet} = \pi \cdot h^2\left(R - \frac{h}{3}\right)$

El volum intersecció és la suma dels volums dels dos casquets:

$$V = \pi \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2\left(2 - \frac{4}{9}\right) + \pi\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(3 - \frac{2}{9}\right) = 36\pi$$

Problema 36
Determineu l'equació de l'esfera que passe per l'origen de coordenades i per la circumferència d'equació $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=25 \\ 2x-3y+5z-5=0 \end{cases}$

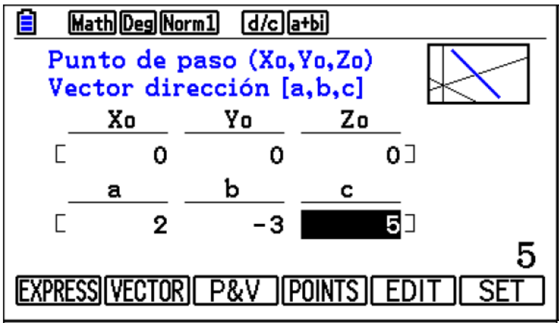
Solució.
El centre de l'esfera $x^2+y^2+z^2=25$ és l'origen de coordenades $O(0,0,0)$ el centre de l'esfera de l'esfera que cerquem pertany a la recta perpendicular al plànol $\pi \equiv 2x-3y+5z-5=0$ que passa pel centre de l'esfera $x^2+y^2+z^2=25$.
El vector director és el característic del plànol $v=(2,-3,5)$
L'equació de la recta és:
$$r \equiv \begin{cases} x=2\alpha \\ y=-3\alpha \\ z=5\alpha \end{cases}$$
El centre de la circumferència és la intersecció de la recta r i el plànol π
$$\begin{cases} 2x-3y+5z-5=0 \\ \begin{cases} x=2\alpha \\ y=-3\alpha \\ z=5\alpha \end{cases} \end{cases}$$
$$4\alpha+9\alpha+25\alpha-5=0$$
$$\alpha=\frac{5}{38}$$
El centre de la circumferència $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=25 \\ 2x-3y+5z-5=0 \end{cases}$ té coordenades:
$$P\left(\frac{5}{19},-\frac{15}{38},\frac{25}{38}\right)$$
$$\overline{OP}=d(O,r)=\left|\frac{-5}{\sqrt{38}}\right|=\frac{5}{\sqrt{38}}$$
Siga Q un punt qualsevol de la circumferència.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OPQ}$
$$\overline{PQ}=\sqrt{5^2-\left(\frac{5}{\sqrt{38}}\right)^2}=5\sqrt{\frac{37}{38}}$$

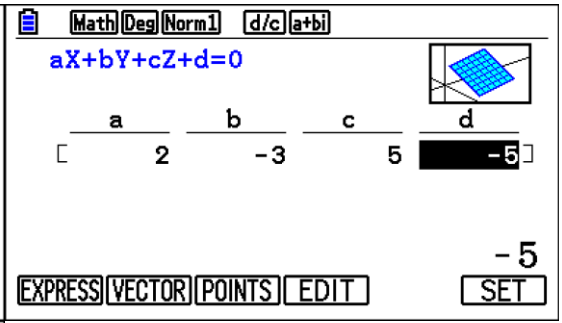
Siga $C(2\alpha,-3\alpha,5\alpha)$ el centre de l'esfera que cerquem.
$$\overline{OC}=\overline{OQ}=\sqrt{38\alpha^2}$$
$$\overline{PC}^2=\left(2\alpha-\frac{5}{19}\right)^2+\left(-3\alpha+\frac{15}{38}\right)^2+\left(5\alpha-\frac{25}{38}\right)^2$$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CPQ}$
$$38\alpha^2=\left(2\alpha-\frac{5}{19}\right)^2+\left(-3\alpha+\frac{15}{38}\right)^2+\left(5\alpha-\frac{25}{38}\right)^2+\left(5\sqrt{\frac{37}{38}}\right)^2$$
Simplificant:
$$\alpha=\frac{5}{2}$$
El centre de l'esfera és:
$$C\left(5,-\frac{15}{2},\frac{25}{2}\right)$$
El radi és :
$$\overline{OC}=\sqrt{38\frac{25}{4}}=\frac{5\sqrt{38}}{2}$$

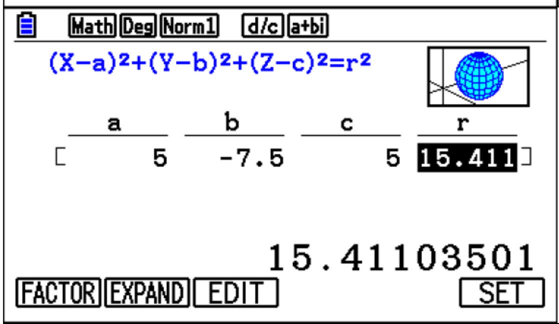
L'equació de l'esfera es:

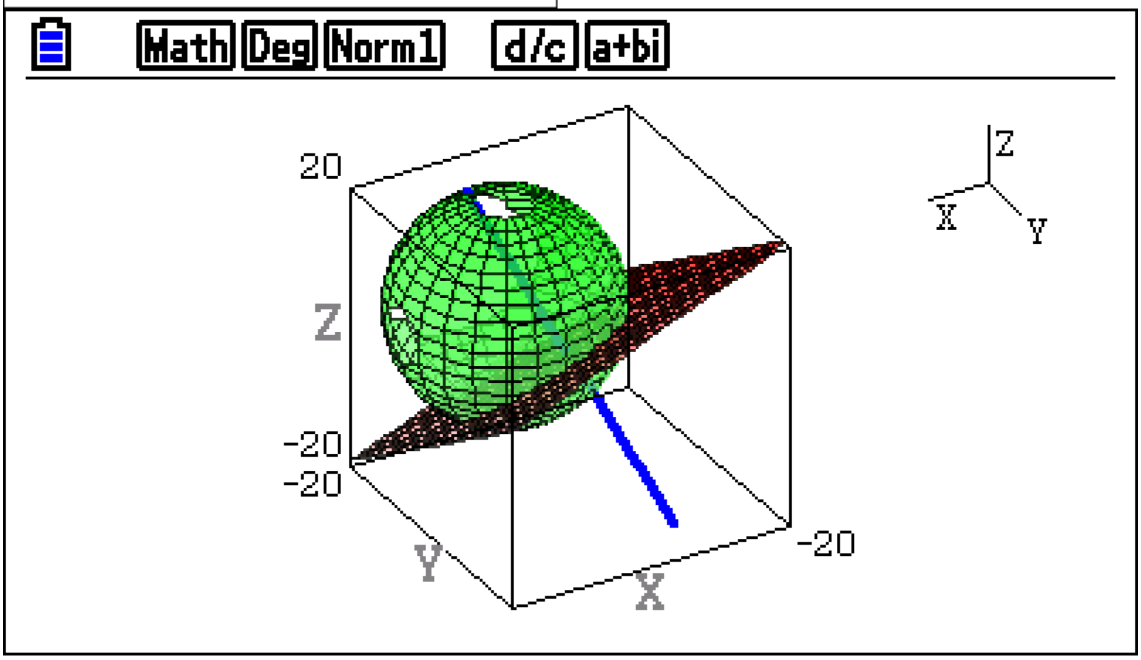
$$E \equiv (x-5)^2 + \left(y + \frac{15}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{25}{2}\right)^2 = \left(\frac{5\sqrt{38}}{2}\right)^2$$

Obrim el *Menú Gráfico 3D*
Definim i representem la recta r, el plànol π i l'esfera E.







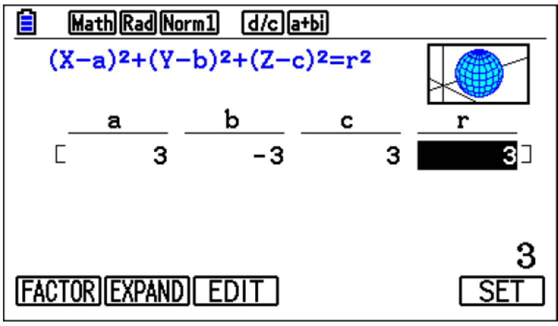


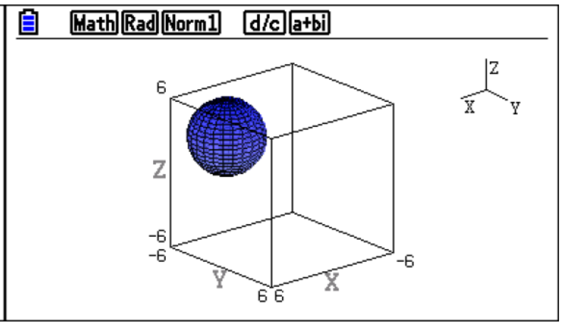
Problema 37
Determineu l’equació de l’esfera que passa pel punt $P(4,-1,-1)$ i és tangents als tres plànols coordenats.

Solució:
El punt P pertany a l’octant de l’espai $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \leq 0 \\ z \leq 0 \end{cases}$
El centre O de l’esfera equidista dels tres plànols coordenats aleshores les seues coordenades són:
$O(a,-a,-a), \qquad a > 0$
El radi de l’esfera és $r = a$

$d(O,P) = a$
Aleshores:
$(4-a)^2 + (1+a)^2 + (1-a)^2 = a^2$
Simplificant:
$a^2 - 6a + 9 = 0.$
Resolent l’equació:
$a = 3$

El centre és:
$O(3,-3,3)$
El radi és: $r = 3$
L’equació de l’esfera és:
$(x-3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = 3^2$
Obrim el *Menú Gràfico 3D*.
Definim i representem l’esfera:

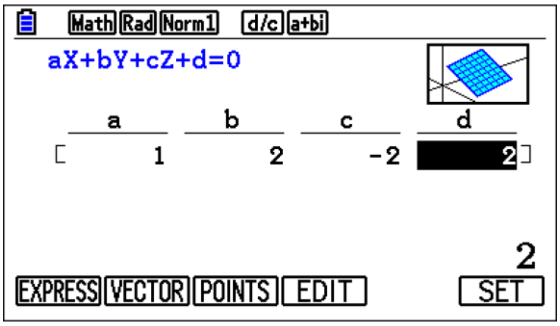


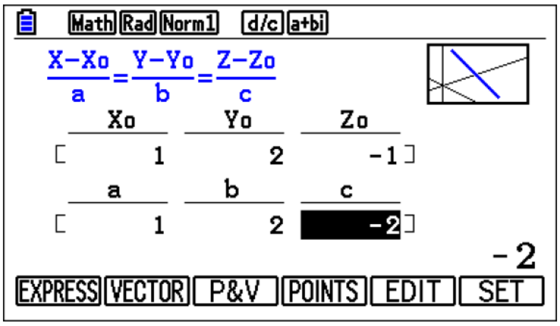


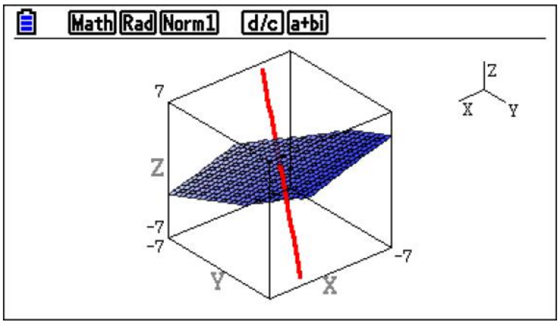
Problema 38
Donats el punt $P(1,2,-1)$ i el plànol $\pi \equiv x+2y-2z+2=0$, siga S l'esfera que és tangent al plànol π en un punt P' de forma que el segment $\overline{PP'}$ és un dels seus diàmetres.
Es demana.
Determinar les coordenades del punt de tangència P'
Determinar l'equació de l'esfera S

Solució:
Per ser $\overline{PP'}$ diàmetre el centre O és el punt mig.
Per ser P' punt de tangència $\overline{OP'}$ és perpendicular al plànol π.
Aleshores, la recta PP' és perpendicular al plànol π
P' és el punt projecció de P sobre el plànol π.
El vector director de la recta és el característic del plànol $a=(1,2,-2)$
La seua equació és:
$PP' \equiv (x,y,z)=(1,2,-1)+\beta(1,2,-2)$

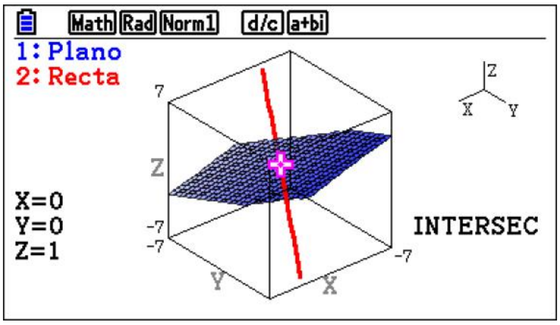
Obrim el *Menú Gráfico 3D*.
Definim i representem el plànol π i la recta PP'





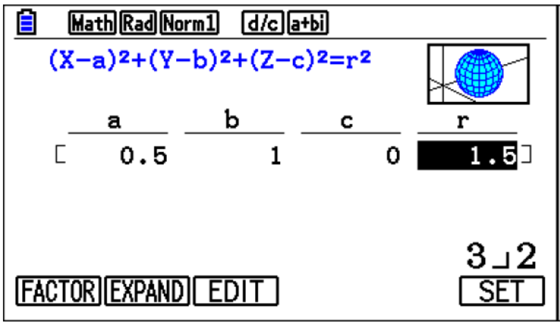


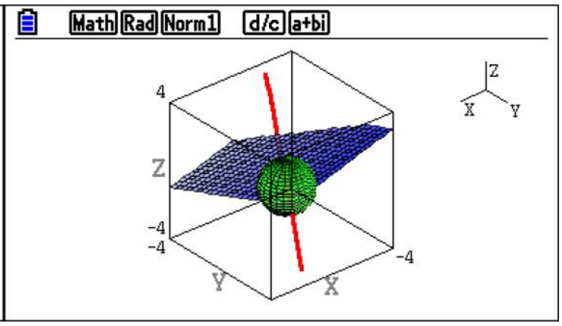
El punt projecció és la intersecció de la recta i el plànol.
Amb la funció *G-Solv*, determinem el punt intersecció.



Les coordenades del punt projecció són $P'(0,0,1)$
El centre O de l'esfera és el punt mig del segment $\overline{PP'}$
Les seues coordenades són:
$O\left(\frac{1}{2},1,0\right)$
El diàmetre de l'esfera és:
$\overline{PP'}=\sqrt{(0-1)^2+(0-2)^2+(1+1)^2}=3$
El radi és:
$r=\frac{3}{2}$
L'equació de l'esfera és:
$S\equiv\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2+z^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2$

Definim i representem l'esfera:

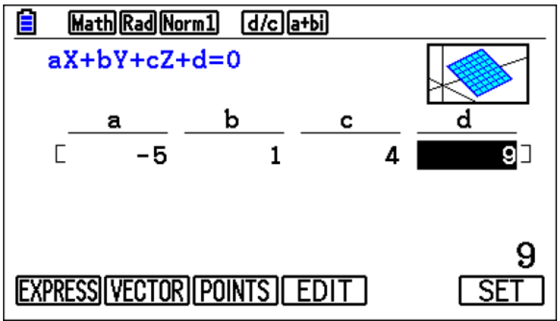


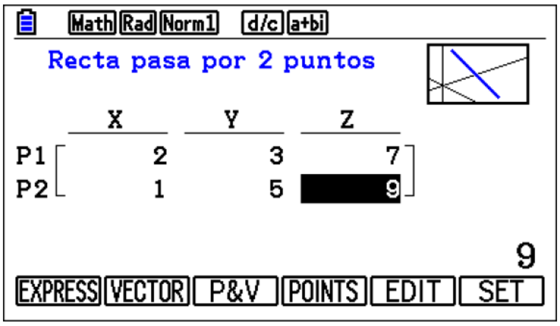


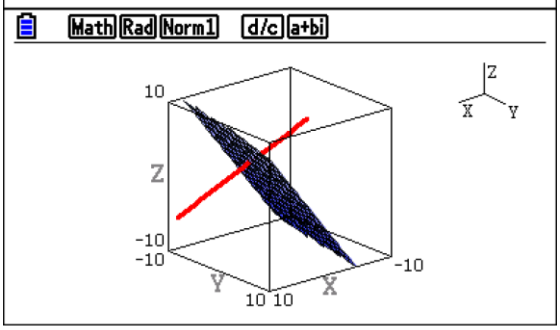
Problema 39
Determineu l'equació de l'esfera que passa pels punts $A(4,2,-3), B(-1,3,1)$ i té el centre en la recta que passa pels punts $C(2,3,7), D(1,5,9)$.

Solució:
El plànol mediador del segment $\overline{AB}$ passa pel punt mig M del segment i té vector característic el vector $\overrightarrow{AB}$.
Les coordenades del punt mig M són:
$M\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2},-1)\right)$
El vector característic té components:
$\overrightarrow{AB}=(-5,1,4)$
L'equació del plànol mediador és:
$\pi\equiv -5\left(x-\frac{3}{2}\right)+\left(y-\frac{5}{2}\right)+4(z+1)=0$
Simplificant:
$\pi\equiv -5x+y+4z+9=0$
La recta que passa pels punts C, D té vector director:
$\overrightarrow{CD}=(-1,2,2)$
La seua equació és:
$r_{CD}\equiv(x,y,z)=(2,3,7)+\alpha(-1,2,2)$

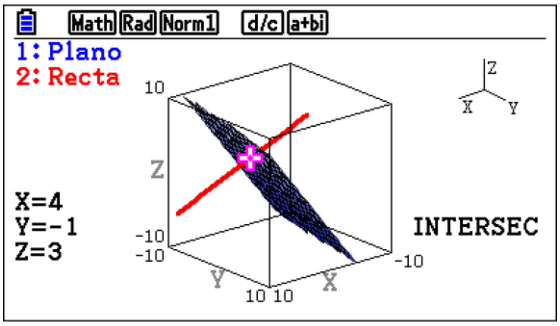
El centre de l'esfera és la intersecció del plànol mediador i la recta.
Obrim el *Menú Gráfico 3D*.
Definim i representem el plànol i la recta.







Amb la funció *G-Solv*, determinem la intersecció del plànol i la recta.

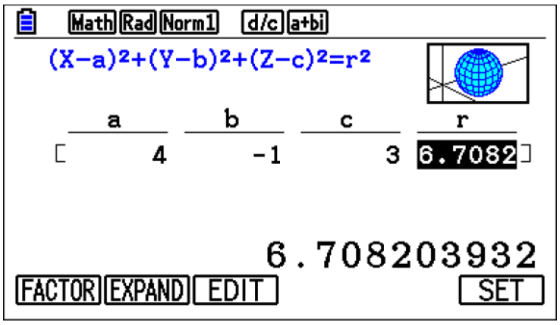


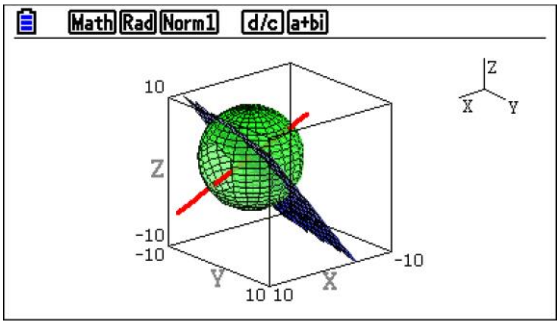
El centre de l'esfera té coordenades:
$O(4,-1,3)$

El radi de l'esfera és:
$r=d(O,A)=\sqrt{0^2+3^2+6^2}=3\sqrt{5}$

L'equació de l'esfera té equació:
$E\equiv(x-4)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=\left(3\sqrt{5}\right)^2$

Definim i representem l'esfera:





Problema 40
Siguen l'esfera $E \equiv x^2+y^2+z^2=9$ i els punts $A(3,0,6), B(3,5,1)$.
Determineu els plànols tangents a l'esfera E que contenen els punts A, B.

Solució:
L'esfera $E \equiv x^2+y^2+z^2=9$ té centre l'origen de coordenades $O(0,0,0)$ i radi $r=3$.

$\overrightarrow{AB}=(0,5,-5)$
L'equació de la recta que passa pels punts A, B té equació:
$r_{AB} \equiv (x,y,z)=(3,0,6)+\alpha(0,1,-1)$
L'equació implícita és:
$r_{AB} \equiv \begin{cases} x-3=0 \\ y+z-6=0 \end{cases}$

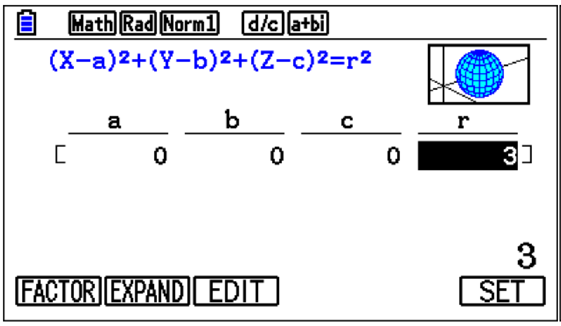
El feix de plànols que conté la recta r_{AB} és:
$\pi_\mu \equiv (x-3)+\mu(y+z-6)=0$

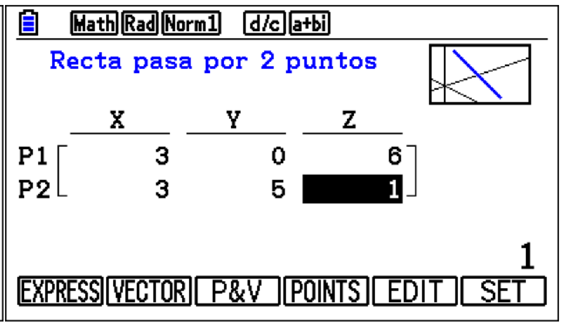
$\pi_\mu \equiv x+\mu y+\mu z-3-6\mu=0$

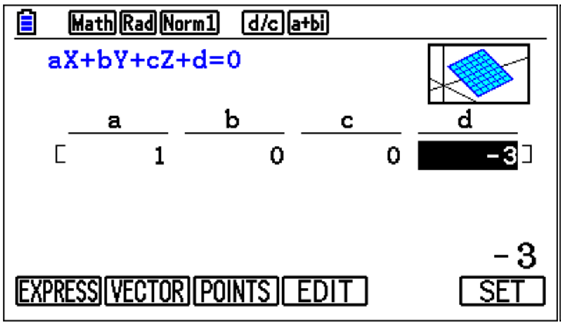
El plànol π_μ ha de ser tangent a l'esfera aleshores:
$d(O,\pi_\mu)=r=3$

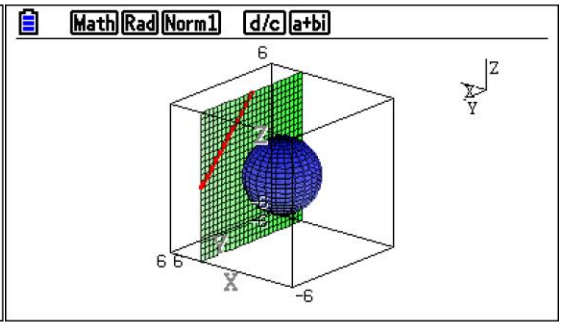
$\left|\dfrac{-3-3\mu}{\sqrt{1+\mu^2+\mu^2}}\right|=3$
Simplificant:
$|1+\mu|=\sqrt{1+2\mu^2}$.
Elevant al quadrat i simplificant:
$2\mu^2+4\mu=0$
Resolent l'equació:
$\mu=0,-2$
Els plànols que cerquem són:
$\pi_0 \equiv x-3=0$
$\pi_{-2} \equiv x-2y-2z+9=0$

Obrim el *Menú Gráfico 3D*.
Definim i representem l'esfera E, la recta r_{AB} i el plànol π_0

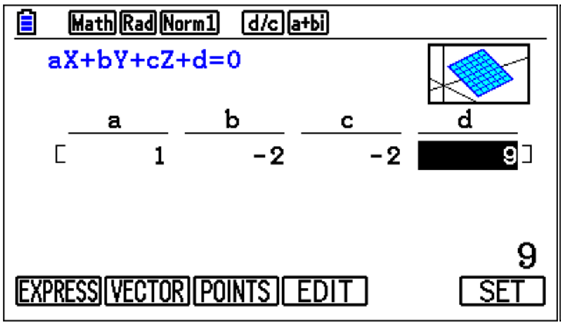


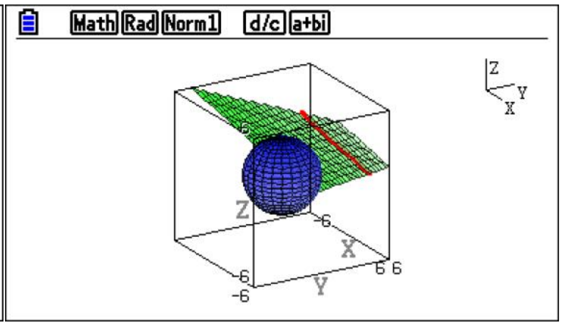






Definim i representem l’esfera E, la recta r_{AB} i el plànol π_{-2}





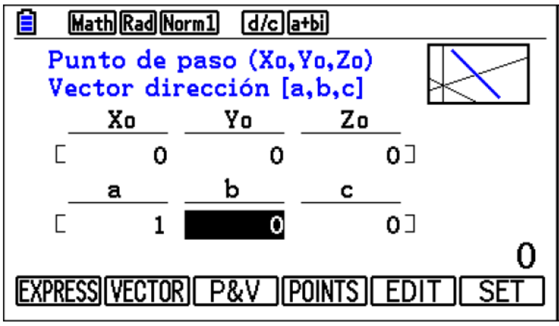
Problema 41
Determineu l’esfera de centre $A(6,3,-4)$ i tangent a l’eix O_x

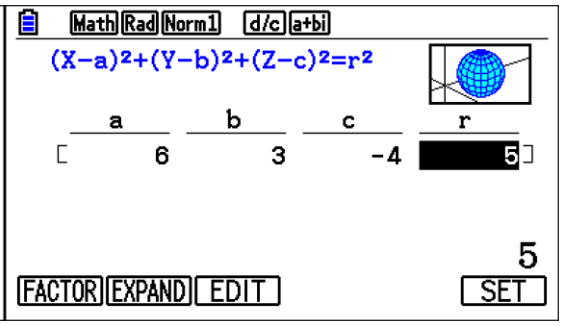
Solució:
La projecció del punt $A(6,3,4)$ sobre l’eix $O_x \equiv \begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$ és:
$A'(6,0,0)$

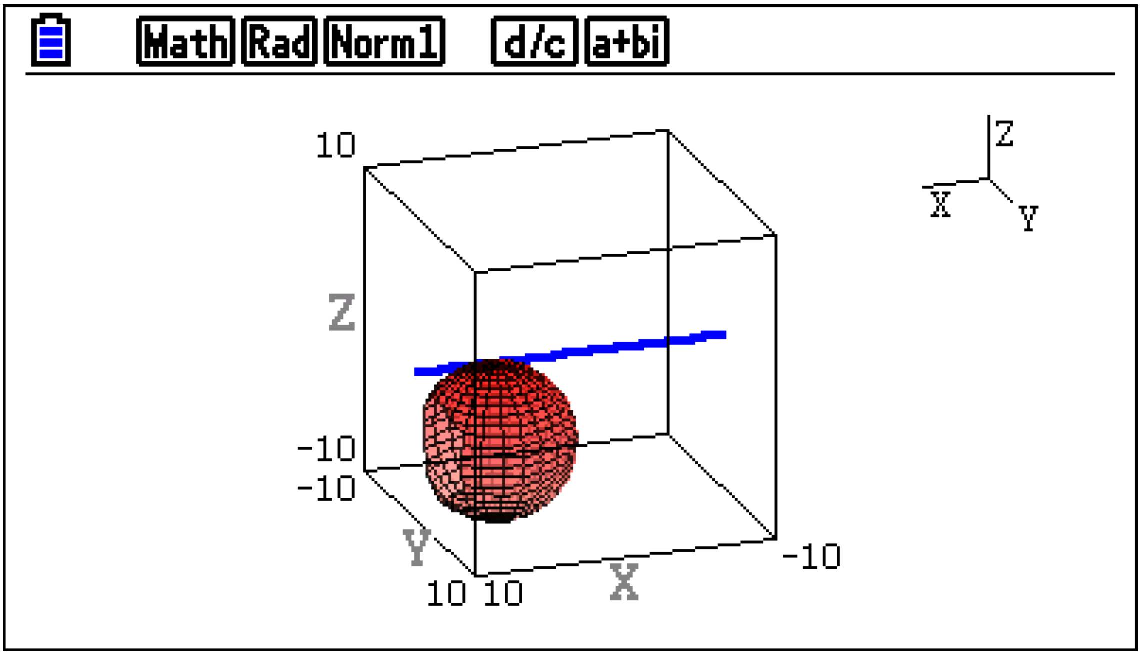
El radi de l’esfera és:
$r=\overline{AA'}=\sqrt{0^2+3^2+(-4)^2}=5$

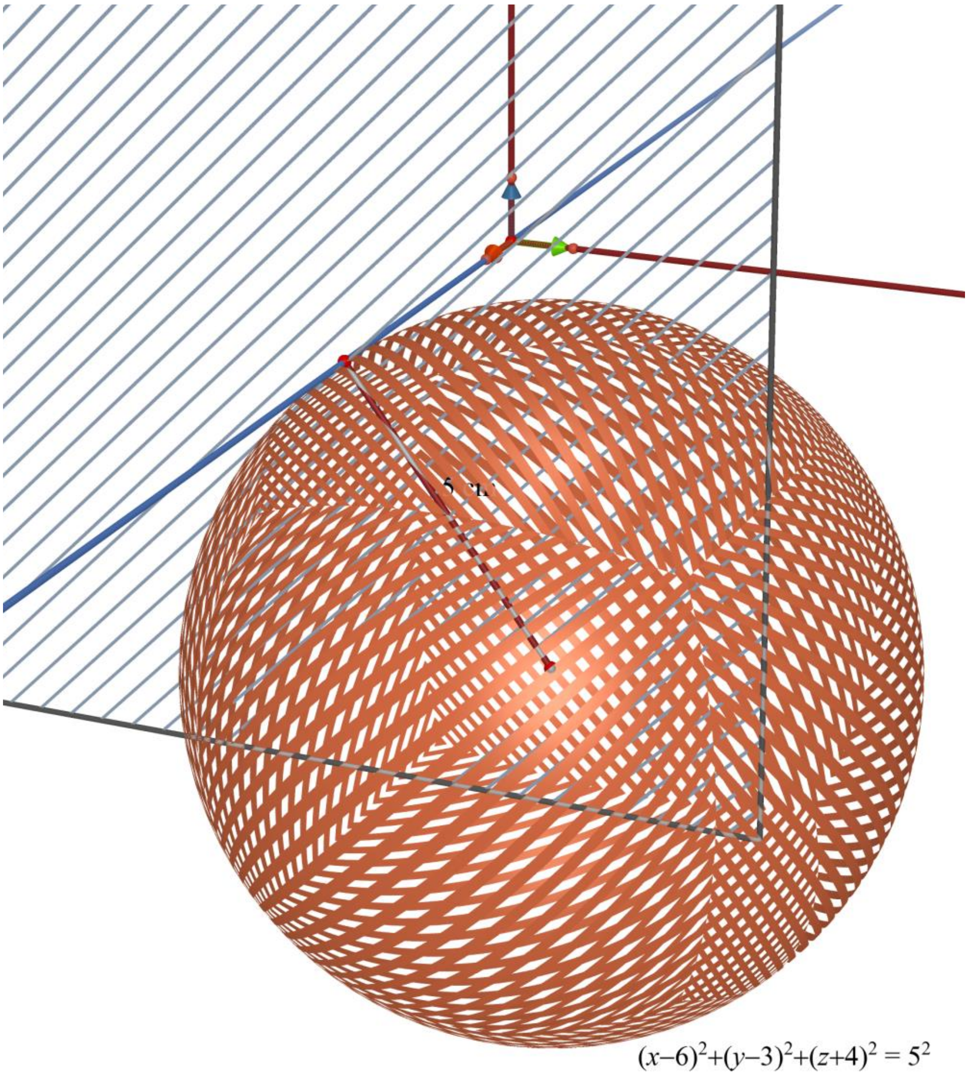
L’equació de l’esfera és:
$E \equiv (x-6)^2+(y-3)^2+(z+4)^2=5^2$

Obrim el *Menú Gràfico 3D.*
Definim i Representem l’esfera i l’eix O_x








$(x-6)^2+(y-3)^2+(z+4)^2 = 5^2$

Problema 42

Donats els punts $A(2,0,-1), B(-2,2,1)$, proveu que el lloc geomètric dels punts P de l'espai que compleixen $\overline{PA} = \sqrt{2} \cdot \overline{PB}$ és una esfera E.

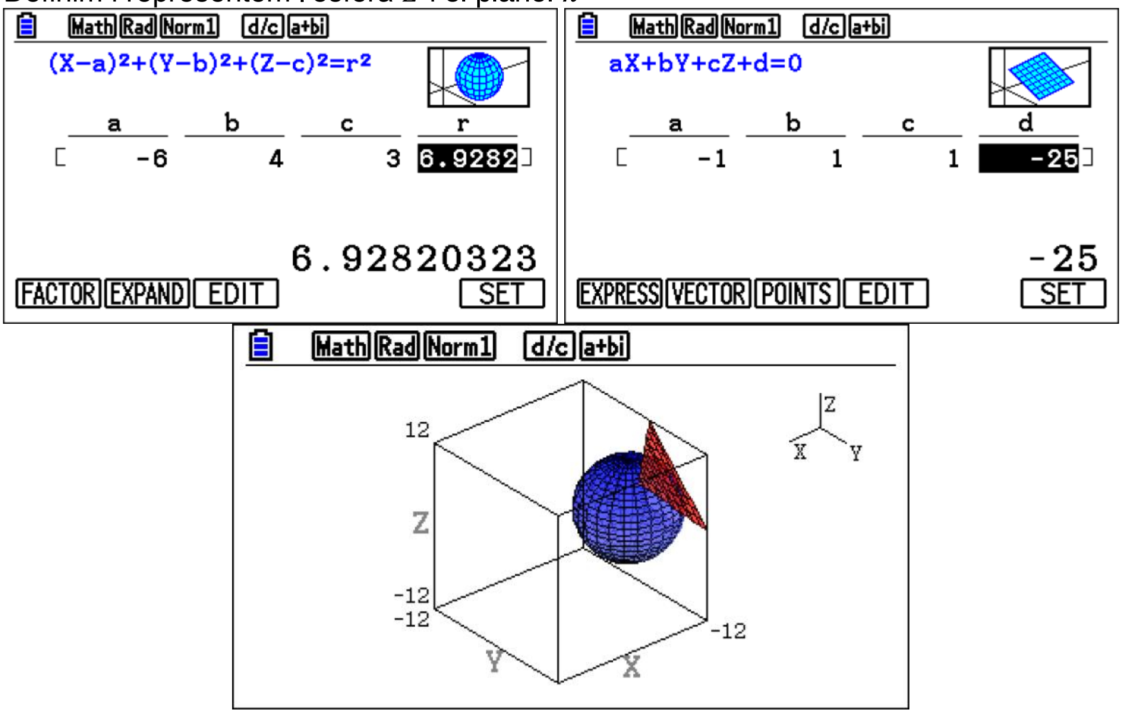
d) Escriviu l'equació reduïda de l'esfera E.
e) Proveu que el punt $T(-10,8,7)$ pertany a l'esfera E.
f) Determineu l'equació del plànol tangent a l'esfera E en el punt T.

Solució:
Siga $P(x,y,z)$ de l'espai que compleix $\overline{PA} = \sqrt{2} \cdot \overline{PB}$.
$\sqrt{(x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2} = \sqrt{2}\sqrt{(x+2)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2}$

Elevant al quadrat i simplificant:
$x^2 + y^2 + z^2 + 12x - 8y - 6z + 13 = 0$
L'equació és una esfera.
a)
Completant quadrats:
$E \equiv (x+6)^2 + (y-4)^2 + (z-3)^2 = -13 + 36 + 16 + 9$
$E \equiv (x+6)^2 + (y-4)^2 + (z-3)^2 = 48$
El centre de l'esfera és $O(-6,4,3)$ i el radi $r = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$

b)
Provem que el punt $T(-10,8,7)$ satisfà l'equació de l'esfera.
$(-10+6)^2 + (8-4)^2 + (7-3)^2 = 16 + 16 + 16 = 48$

c)
$\overrightarrow{OT} = (-4,4,4)$
El vector característic del plànol tangent a l'esfera és $a = (-1,1,1)$
L'equació del plànol tangent a l'esfera E en el punt $T(-10,8,7)$ és:
$-(x+10) + 1(y-8) + 1(z-7) = 0$
Simplificant:
$\pi \equiv -x + y + z - 25 = 0$
Obrim el *Menú Gráfico 3D*
Definim i representem l'esfera E i el plànol π



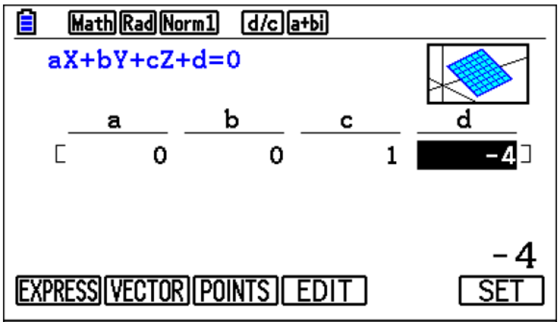
Problema 43
Determineu l'equació de l'esfera de centre en el plànol $z = 4$ tangent al plànol O_{xy} en el punt $T(2,3,0)$

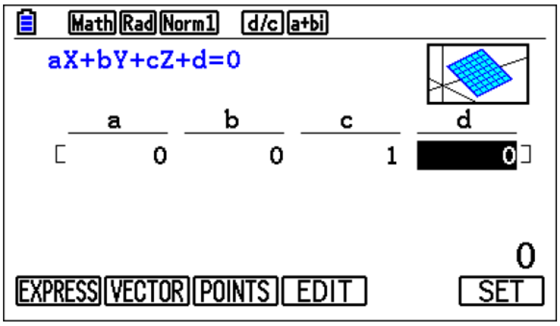
Solució:
El plànol O_{xy} té equació:
$z = 0$

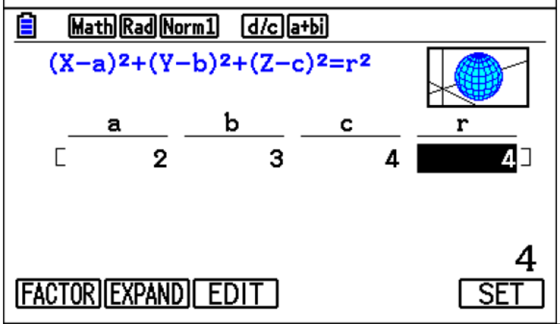
Els plànols O_{xy} $z = 4$ són paral·lels.
El radi de l'esfera és igual a la distància entre els dos plànols que és $r = 4$
El centre de l'esfera és igual a la projecció del punt $T(2,3,0)$ sobre el plànol $z = 4$.
El punt projecció té coordenades $O(2,3,4)$

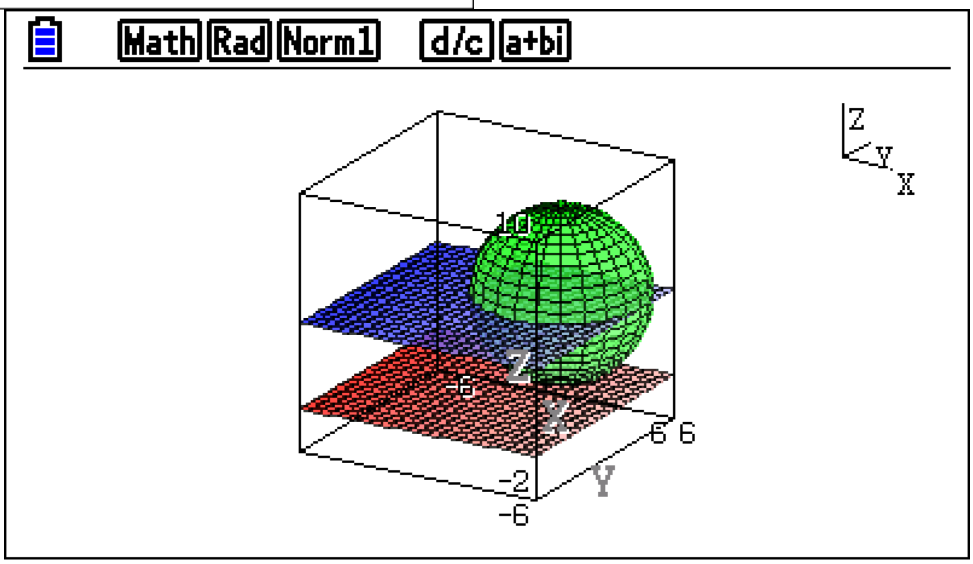
L'equació de l'esfera és:
$E \equiv (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 4^2$

Obrim el Menú *Gráfico 3D*.
Definim i representem els dos plànol i l'esfera.









Problema 44
Determineu l'equació de l'esfera que té el centre en el plànol $\pi_1 \equiv 2x + 2y - z + 2 = 0$ i és tangent al plànol $\pi_2 \equiv 2x + 2y - z - 4 = 0$ en el punt $T(3, 0, 2)$

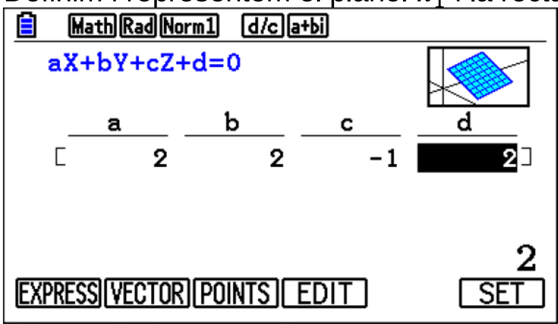
Solució:
Els dos plànols són paral·lels.
El radi de l'esfera és igual a la distància del punt $T(3, 0, 2)$ al plànol
$\pi_1 \equiv 2x + 2y - z + 2 = 0$

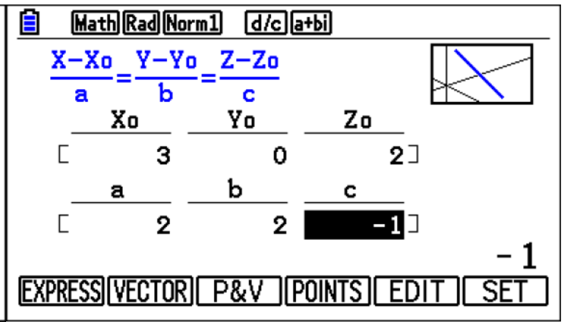
$$r = \left| \frac{2 \cdot 3 + 2 \cdot 0 - 2 + 2}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} \right| = 2$$

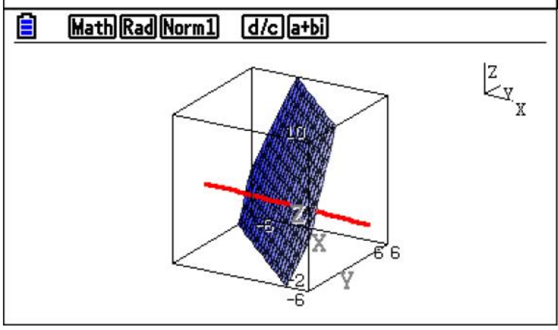
El centre és igual a la intersecció de la recta perpendicular al plànol $\pi_2 \equiv 2x + 2y - z - 4 = 0$ que passa pel punt de tangència $T(3, 0, 2)$

El vector característic del plànol $\pi_2 \equiv 2x + 2y - z - 4 = 0$ és $v = (2, 2, -1)$
La recta perpendicular té equació:
$r \equiv = (x, y, x) = (3, 0, 2) + \alpha(2, 2, -1)$

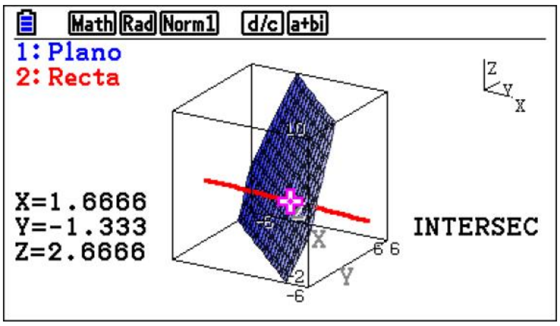
Obrim el *Menú Gràfico 3D*.
Definim i representem el plànol π_1 i la recta r







Amb la funció G-Solv, determinem la intersecció.

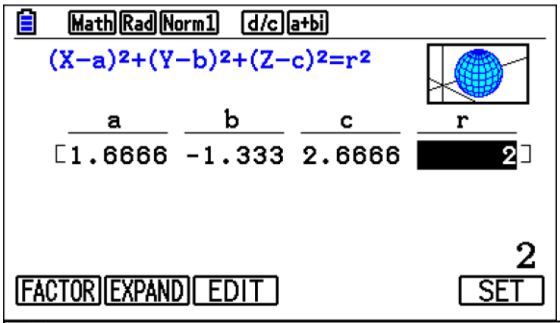


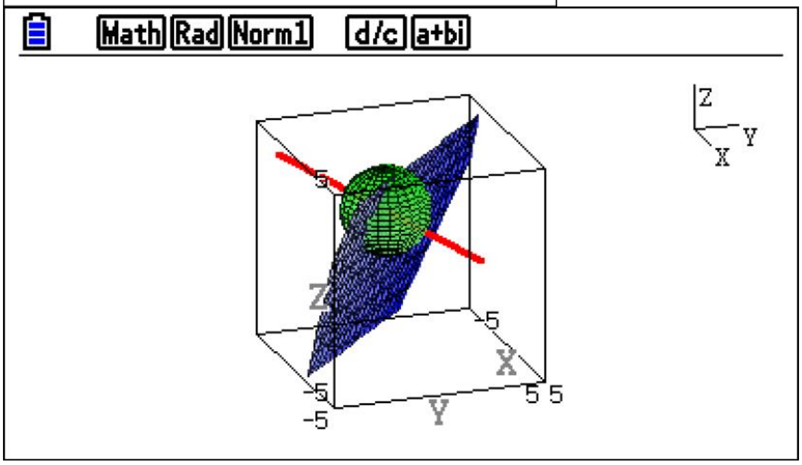
El centre de l'esfera és $O\left(\frac{5}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right)$

L’equació de l’esfera és:

$$E \equiv \left(x-\frac{5}{3}\right)^2+\left(y+\frac{4}{3}\right)^2+\left(z-\frac{8}{3}\right)^2=2^2$$

Definim i representem l’esfera.



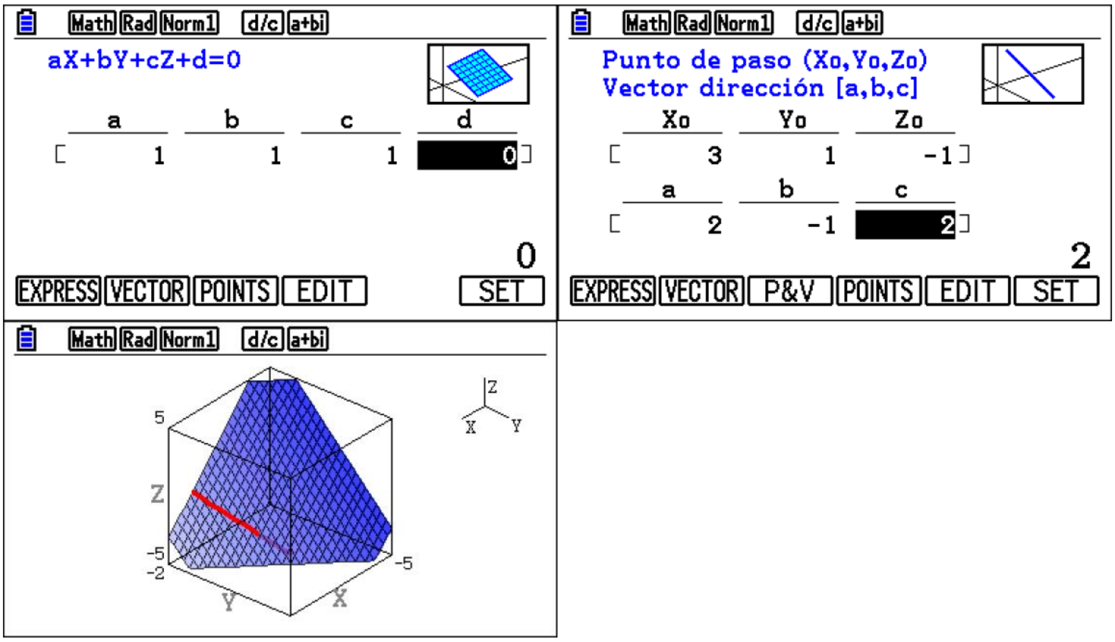


Problema 45
Determineu l'equació de l'esfera que té el centre en el plànol $\pi_1 \equiv x + y + z = 0$ i és tangent al plànol $\pi_2 \equiv 2x - y + 2z - 3 = 0$ en el punt $T(3, 1, -1)$

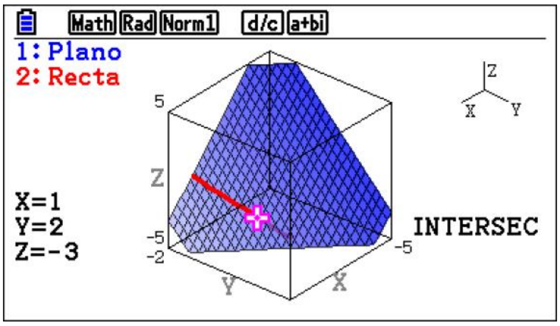
Solució:
El centre s'obté a la intersecció de la recta perpendicular al plànol $\pi_2 \equiv 2x - y + 2z + 3 = 0$ que passa pel punt de tangència $T(3, 0, 2)$ i el plànol $\pi_1 \equiv x + y + z = 0$

El vector característic del plànol $\pi_2 \equiv 2x - y + 2z - 3 = 0$ és $v = (2, -1, 2)$
La recta perpendicular té equació:
$r \equiv= (x, y, x) = (3, 1, -1) + \alpha(2, -1, 2)$

Obrim el *Menú Gráfico 3D*.
Definim i representem el plànol π_1 i la recta r



Amb la funció *G-Solv*, determinem la intersecció.

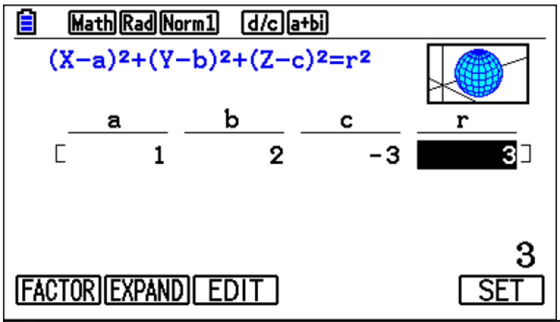


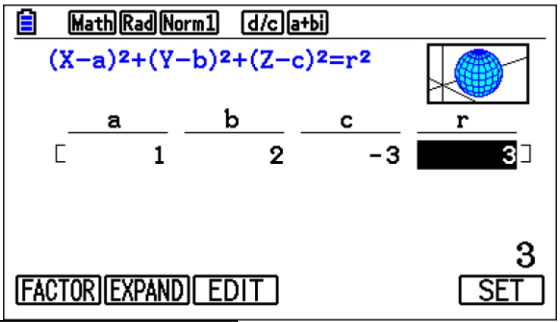
El centre de l'esfera té coordenades:
$O(1, 2, -3)$

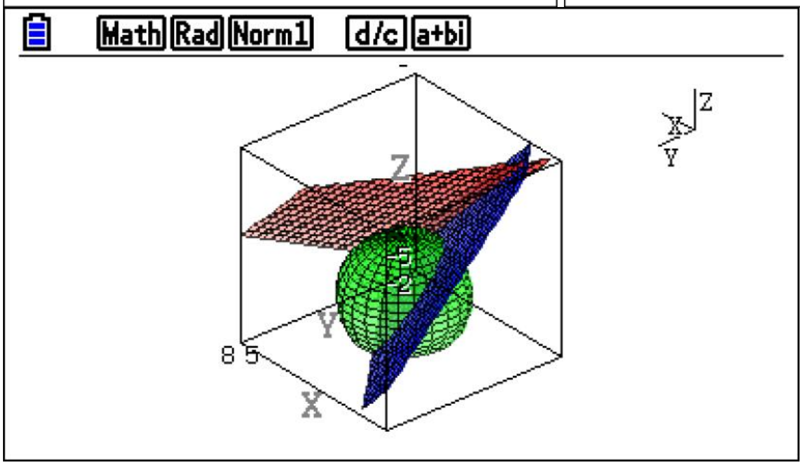
El radi de l'esfera és igual a la distància del centre O al punt de tangència T.
$R = \sqrt{(3-1)^2 + (1-2)^2 + (-1+3)^2} = 3$

L’equació de l’esfera és:
$E \equiv (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 3^2$

Definim i representem l’esfera i el plànol $\pi_2 \equiv 2x - y + 2z - 3 = 0$







Problema 46
Determineu l'equació de l'esfera de radi 2 que té el centre en l'eix O_y que és tangent a l'esfera $E \equiv (x-4)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 9$.
Determineu el punt de tangència.

Solució:
El centre de l'esfera que cerquem té centre:
$C(0, a, 0)$

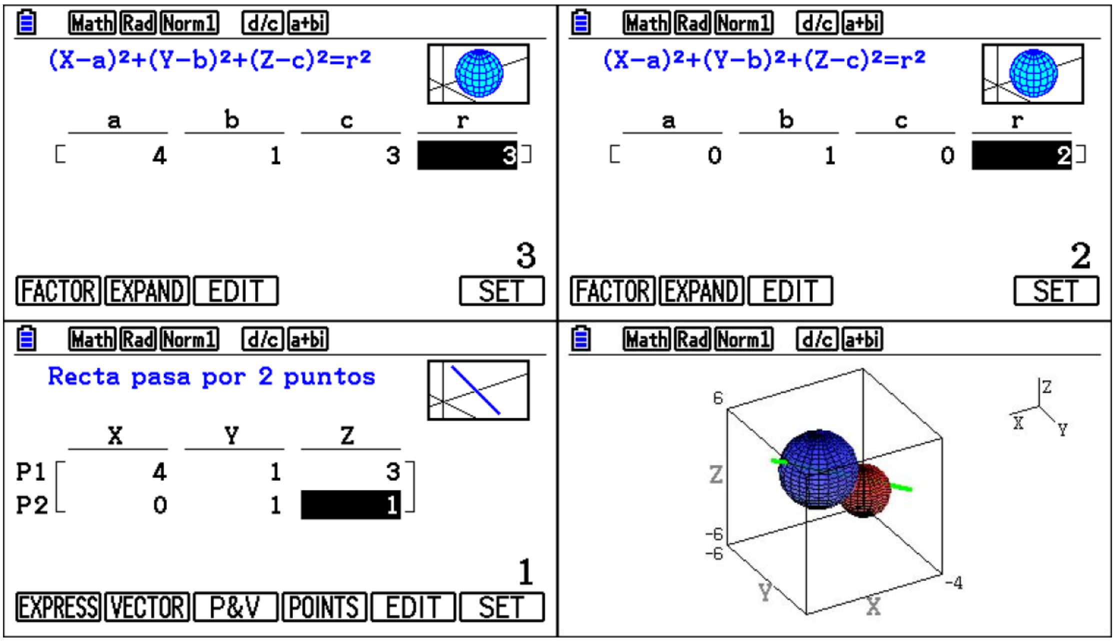
L'esfera $E \equiv (x-4)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 9$ té centre $O(4,1,3)$ i radi $R = 3$
Con les dues esferes són tangents la distància entre és centres és igual a la suma dels dos radis:
$\overline{OC} = 3 + 2 = 5$
$\sqrt{4^2 + (a-1)^2 + 3^2} = 5$
Elevant al quadrat:
$a = 1$

L'esfera que cerquem té centre $(0,1,0)$ i radi 2.

El punt T de tangència es troba en el segment $\overline{CO}$ i el divideix en dos parts que estan en proporció 2:3, des de C.
Siga $T(x, y, z)$
$\frac{3}{2}(x-0, y-1, z-0) = (4-0, 1-1, 3-0)$

Aleshores, $T\left(\frac{8}{3}, 0, 2\right)$

Obrim el *Menú Gráfico 3D*
Definim i representem les dues esferes i la recta que passa pels centres.

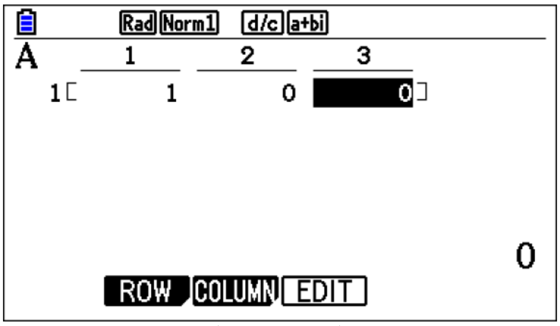


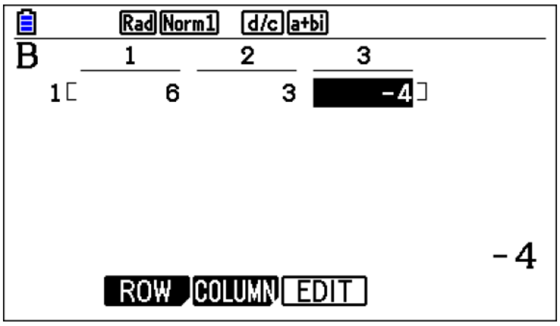
Problema 47
Determineu l'equació de l'esfera de centre $C(6,3,-4)$ tangent a l'eix O_x

Solució:
L'eix O_x té equació vectorial:
$O_x \equiv (x,y,z) = (0,0,0) + \alpha(1,0,0)$
Siga $O(0,0,0)$, $v = (1,0,0)$
El radi de l'esfera és igual a la distància del centre $C(6,3,-4)$ a l'eix O_x

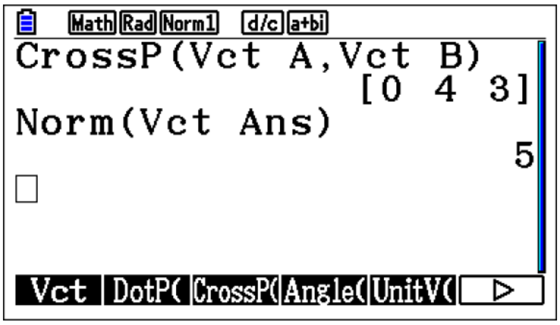
$$r = d(C, O_x) = \frac{\left\|v \times \overrightarrow{OC}\right\|}{\|v\|}$$

Obrim el *Menú Ejec-Mat*.
Definim els vectors v, $\overrightarrow{OC} = (6,3,-4)$.





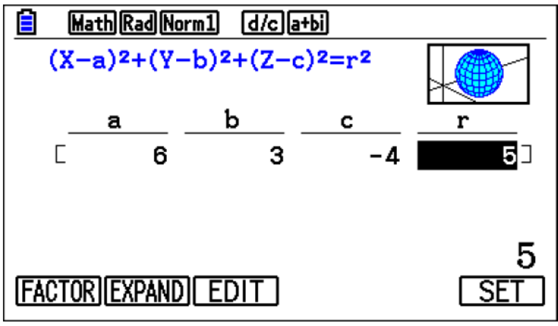
Calculem $v \times \overrightarrow{OC}$, $\left\|v \times \overrightarrow{OC}\right\|$

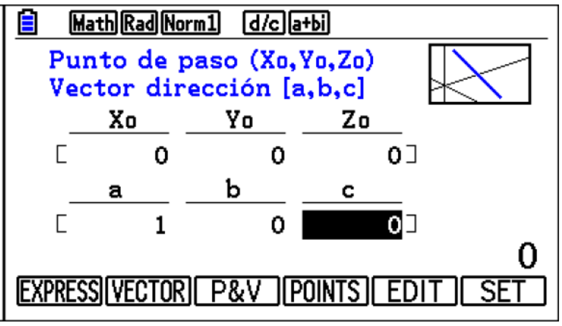


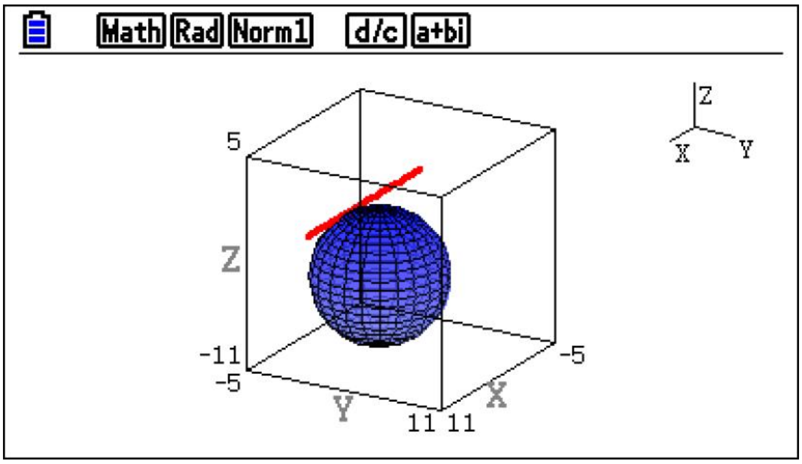
El radi de l'esfera és:

$$r = \frac{\left\|v \times \overrightarrow{OC}\right\|}{\|v\|} = \frac{5}{1} = 5$$

L'equació de l'esfera és:
$E \equiv (x-6)^2 + (y-3)^2 + (z+4)^2 = 5^2$
Obrim el *Menú Gráfico 3D*.
Definim i representem l'esfera i l'eix O_x






Math Rad Norm1 d/c a+bi
5
Z
-11
-5
Y
11 11
X
-5
Z
X
Y

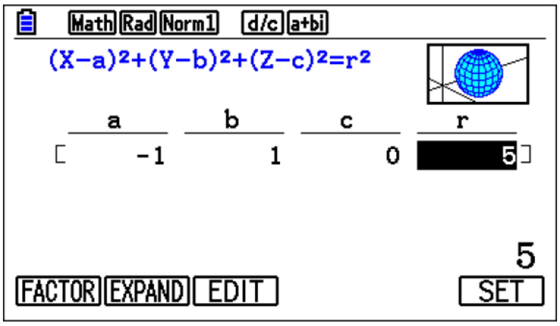
Problema 48
Determineu el lloc geomètric dels punts de l'espai que la suma dels quadrats de les distàncies als punts $A(-2,2,4), B(0,0,-4)$ és 80.
Determineu els seues elements.

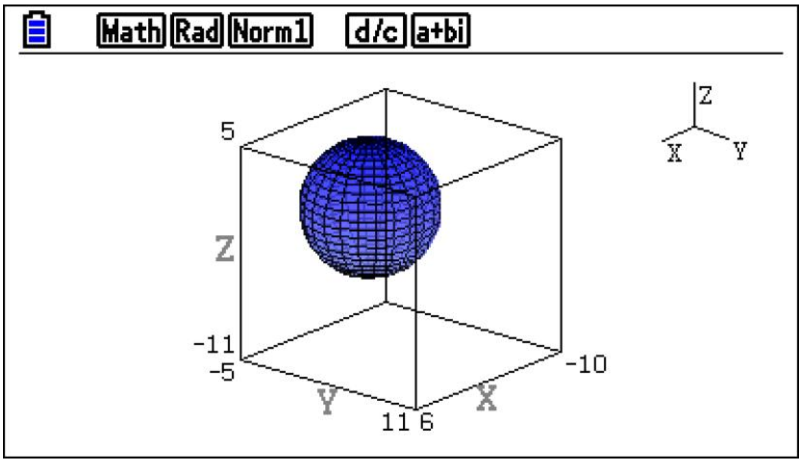
Solució:
Siga $P(x,y,z)$
$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=80$
$(x+2)^2+(y-2)^2+(z-4)^2+x^2+y^2+(z+4)^2=80$

$2x^2+4x+4+2y^2-4y+4+2z^2+32=80$
Simplificant:
$x^2+2x+y^2-2y+z^2=20$
Completant quadrats.
$(x+1)^2+(y-1)^2+z^2=5^2$

El lloc geomètric és una esfera de centre:
$O(-1,1,0)$ i radi $r=5$

Obrim el *Menú Gráfico 3D*.
Definim i representem l'esfera.





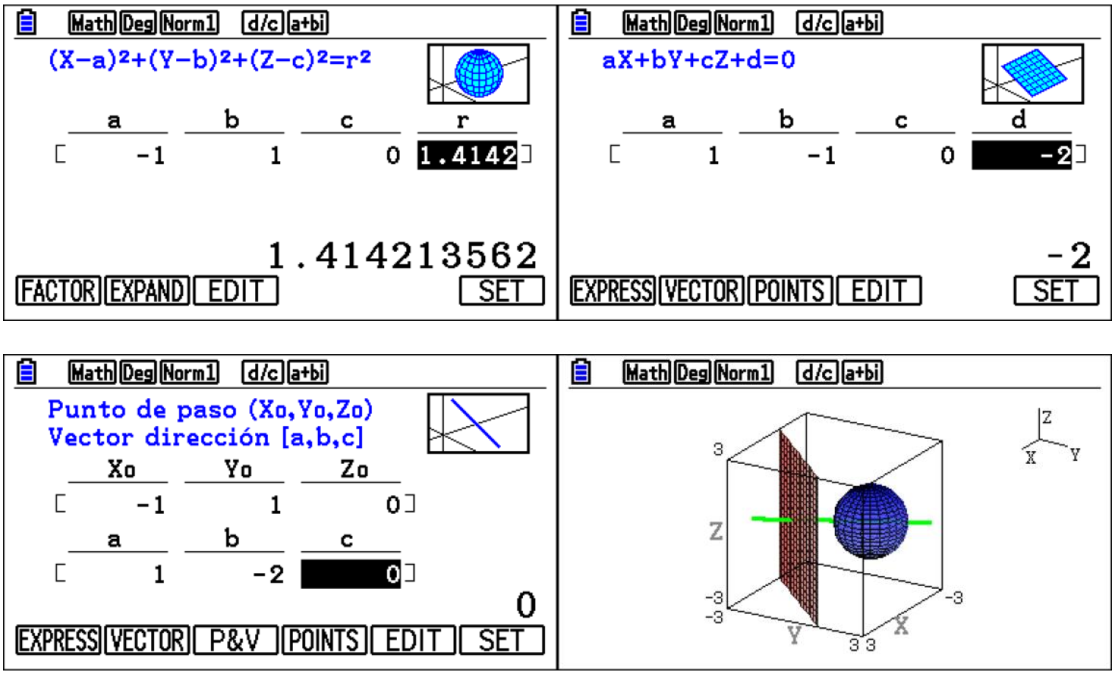
Problema 49
Determineu la recta perpendicular al plànol $\pi \equiv x - y - 2 = 0$ i siga un diàmetre de l'esfera $E \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y = 0$
Calculeu els extrems del diàmetre.

Solució:
Completant quadrats determinem el centre i el radi de l'esfera
$E \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y = 0$
$E \equiv (x+1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 2$
El centre és el punt $O(-1, 1, 0)$ i el radi és $R = \sqrt{2}$

La recta perpendicular al plànol $\pi \equiv x - y - 2 = 0$ que és diàmetre de l'esfera, té vector director el característic del plànol $v = (1, -1, 0)$ i passa pel centre de l'esfera $O(-1, 1, 0)$
La seua equació és:
$r \equiv (x, y, z) = (-1, 1, 0) + \alpha(1, -1, 0)$

Els extrems del diàmetre es calculen efectuant la intersecció de la recta r i l'esfera E:
$$\begin{cases} (x, y, z) = (-1 + \alpha, -1\alpha, 0) \\ (x+1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 2 \end{cases}$$
$\alpha^2 + \alpha^2 = 2$
Resolent l'equació:
$\alpha = 1, -1$
Els punts extrems del diàmetre són:
$A(0, 0, 0), B(-2, 2, 0)$

Definim i representem l'esfera, la recta i el plànol.



Problema 50

Determineu el lloc geomètric dels punts X tal que $\overrightarrow{MX}$ i $\overrightarrow{NX}$ són ortogonals essent $M(1,1,0), N(0,1,0)$

Solució:

Siga $X(x,y,z)$

$\overrightarrow{MX} = (x-1, y-1, z), \overrightarrow{NX} = (x, y-1, z)$

$\overrightarrow{MX} \cdot \overrightarrow{NX} = 0$

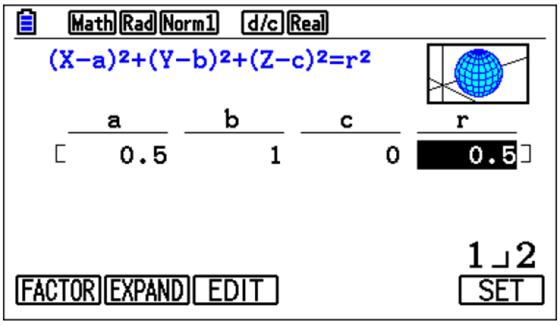
$(x-1, y-1, z) \cdot (x, y-1, z) = 0$

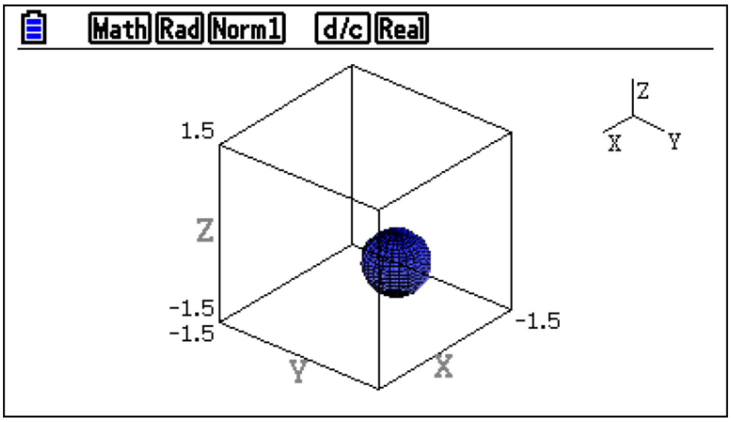
$x^2 - x + y^2 - 2y + 1 + z^2 = 0$

Completant quadrants:

$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2 + z^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$

El lloc geomètric és una esfera de centre $O\left(\frac{1}{2}, 1, 0\right)$ i radi $R = \frac{1}{2}$

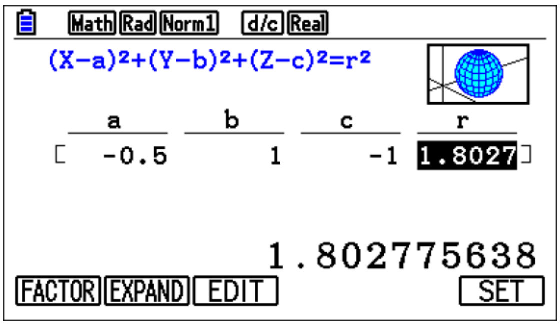


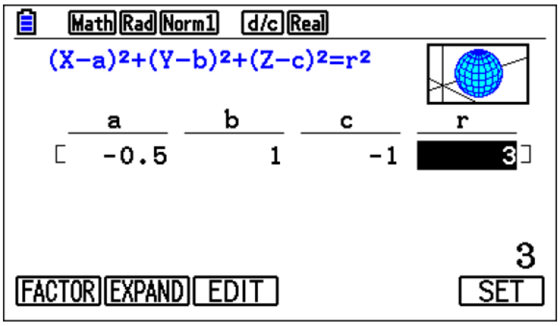


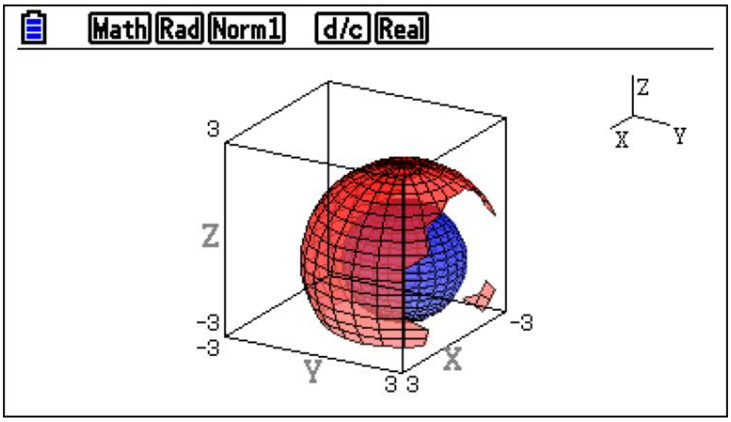
Problema 51
Determineu l’equació de l’esfera concèntrica a l’esfera
$E \equiv x^2 + y^2 + z^2 + x + 2y - 2z - 1 = 0$, que passa pel punt $P\left(-\frac{1}{2}, -1, 1\right)$

Solució:
Completant quadrats determinem el centre i el radi de l’esfera:
$E \equiv x^2 + y^2 + z^2 + x + 2y - 2z - 1 = 0$
$E \equiv \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y + 1)^2 + (z - 1)^2 = 1 + \frac{1}{4} + 1 + 1 = \left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2$
El centre és $O\left(-\frac{1}{2}, -1, 1\right)$ i el radi $r = \frac{\sqrt{13}}{2}$

El radi de l’esfera concèntrica que passa per $P\left(-\frac{1}{2}, -1, 1\right)$ és:
$R = d(P, C) = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3$
Notem que $R > r$







Problema 52

Determineu l’equació de l’esfera que passa pels punts $A(6,-1,3), B(0,7,5)$ i té el centre en la recta $r \equiv \begin{cases} x-2z+3=0 \\ y-z+1=0 \end{cases}$

Solució:

Determinem l’equació paramètrica de la recta r

$$r \equiv \begin{cases} x=-3+2\mu \\ y=-1+\mu \\ z=\mu \end{cases}$$

Les coordenades del centre són:

$O(-3+2\mu,-1+\mu,\mu)$

$d(O,A)=d(O,B)$

$\sqrt{(-9+2\mu)^2+\mu^2+(-3+\mu)^2}=\sqrt{(-3+2\mu)^2+(\mu-8)^2+(-5+\mu)^2}$

Simplificant:

$-4\mu=8$

$\mu=-2$

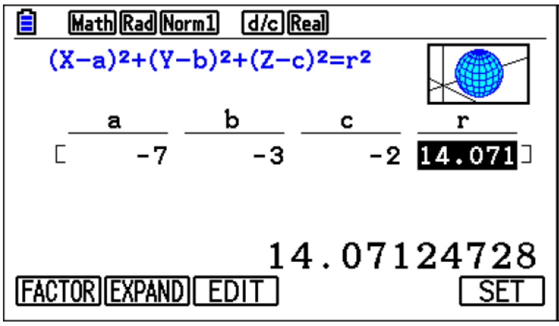
Les coordenades del centre són:

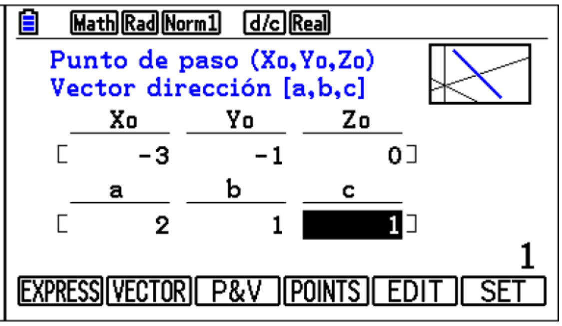
$O(-7,-3,-2)$

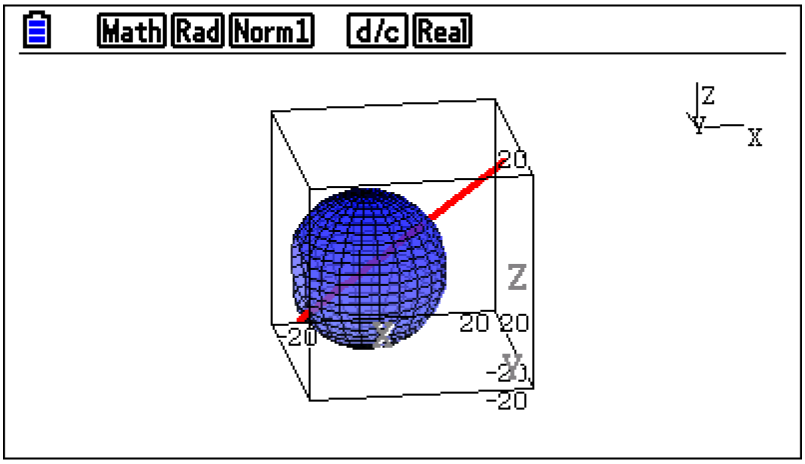
El radi és $\sqrt{(-13)^2+(-2)^2+(-5)^2}=\sqrt{198}$

L’equació de l’esfera és:

$E \equiv (x+7)^2+(y+3)^2+(z+2)^2=198$



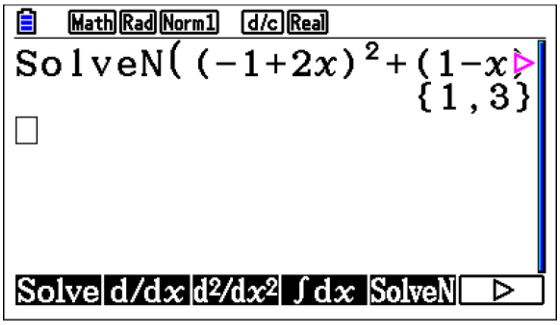




Problema 53
Determineu els plànols tangents a l'esfera d'equació
$E \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 8z + 10 = 0$
En els punts d'intersecció de la recta $r \equiv \begin{cases} x - 2z = -1 \\ y + z = 1 \end{cases}$ i l'esfera.

Solució:
Per determinar el centre i el radi de l'esfera, completem quadrats en la seua equació:
$E \equiv (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-4)^2 = 11$
El centre és el punt $O(2,-1,4)$ i el radi $r = \sqrt{11}$.

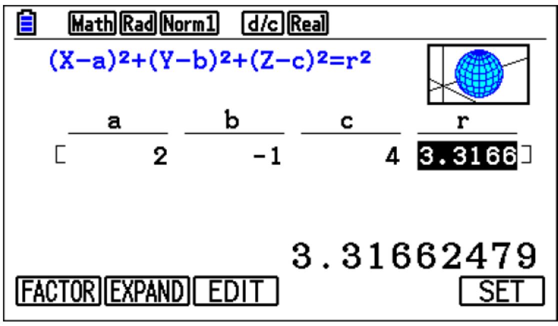
L'equació paramètrica de la recta r és:
$r \equiv \begin{cases} x = -1 + 2\alpha \\ y = 1 - \alpha \\ z = \alpha \end{cases}$
Determinem la intersecció de la recta i la circumferència
$(-1+2\alpha)^2 + (1-\alpha)^2 + \alpha^2 - 4(-1+2\alpha) + 2(1-\alpha) - 8\alpha + 10 = 0$

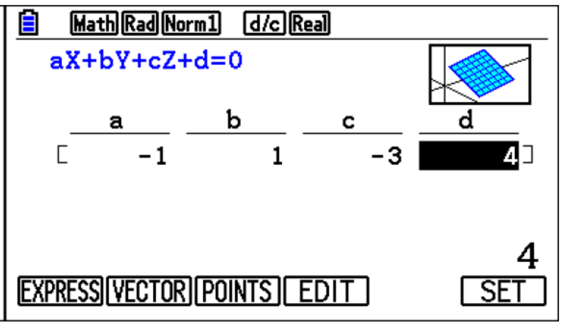


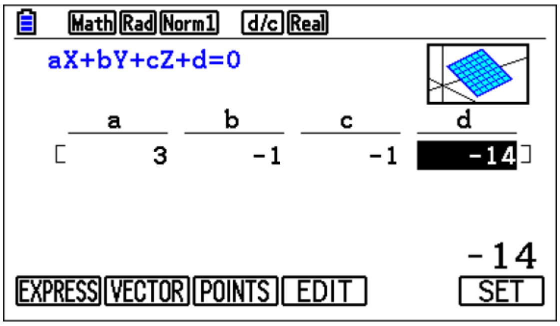
Resolent l'equació:
$\alpha = 1, 3$
Els punts de tangència són:
$A(1,0,1), B(5,-2,3)$
Un dels plànols tangent a l'esfera té vector característic :
$\overrightarrow{OA} = (-1,1,-3)$
Les equació dels dos plànols són:
$\pi_1 \equiv -(x-1) + (y-0) - 3(z-1) = 0$
$\pi_1 \equiv -x + y - 3z + 4 = 0$

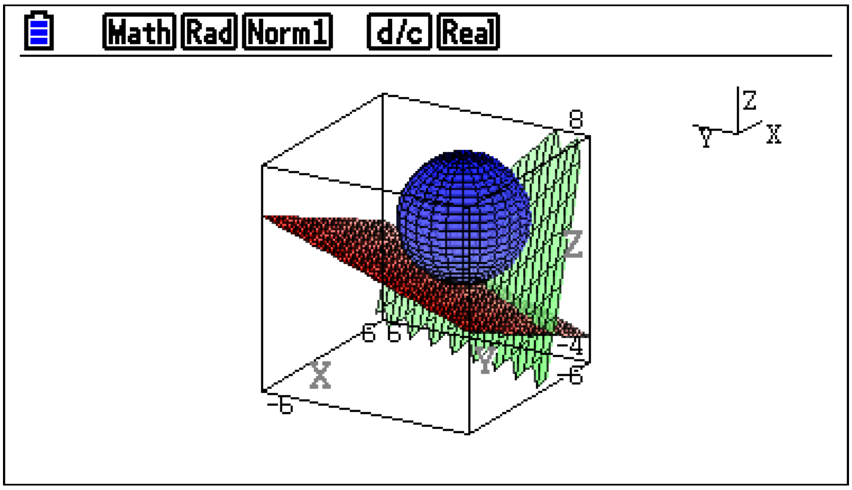
L'altre plànol tangent
$\overrightarrow{OB} = (3,-1,-1)$
Les equació dels dos plànols són:

$\pi_2 \equiv 3(x-5) - (y+2) - (z-3) = 0$
$\pi_2 \equiv 3x - y - z - 14 = 0$






Math Rad Norm1 d/c Real
aX+bY+cZ+d=0
a b c d
[3 -1 -1 -14]
-14
EXPRESS VECTOR POINTS EDIT SET


Math Rad Norm1 d/c Real
Z
Y X
8
Z
6 6
X
Y
-4
-6
-6

Problema 54

Determineu el lloc geomètric dels punts tals que la proporció entre les distàncies a dos punts fixos $A(1,1,-2), B(-2,3,2)$ és $1:3$.

Solució:

Si $P(x,y,z)$ pertany al lloc geomètric, aleshores:

$$\frac{d(A,P)}{d(B,P)} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2}}{\sqrt{(x+2)^2+(y-3)^2+(z-2)^2}} = \frac{1}{3}$$

Elevant al quadrat:

$$\frac{x^2-2x+1+y^2-2y+1+z^2+4z+4}{x^2+4x+4+y^2-6y+9+z^2-4z+4} = \frac{1}{9}$$

Simplificant:

$$8x^2-22x+8y^2-12y+8z^2+40z+37=0$$

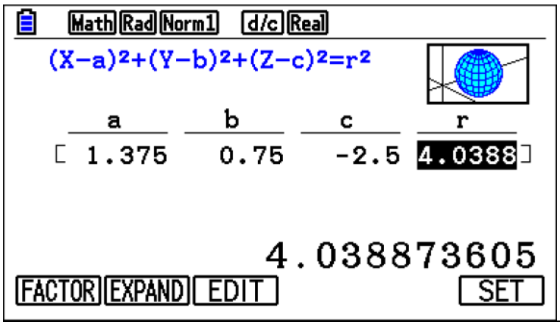
Dividint l'expressió per 8:

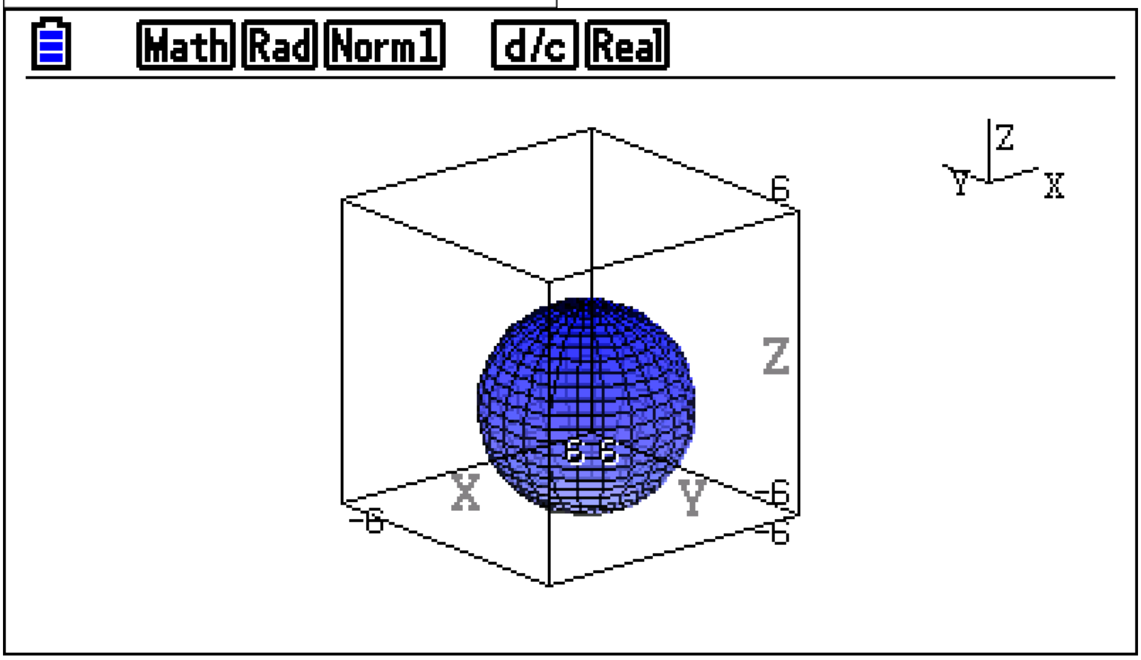
$$x^2-\frac{11}{4}x+y^2-\frac{3}{2}y+z^2+5z+\frac{37}{8}=0$$

Completant quadrats:

$$\left(x-\frac{11}{8}\right)^2+\left(y-\frac{3}{4}\right)^2+\left(z+\frac{5}{2}\right)^2 = -\frac{37}{8}+\left(\frac{11}{8}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{261}{84} = \left(\frac{\sqrt{261}}{8}\right)^2$$

El lloc geomètric és una esfera de centre $O\left(\frac{11}{8},\frac{3}{4},-\frac{5}{2}\right)$ i radi $R=\frac{\sqrt{261}}{8}$





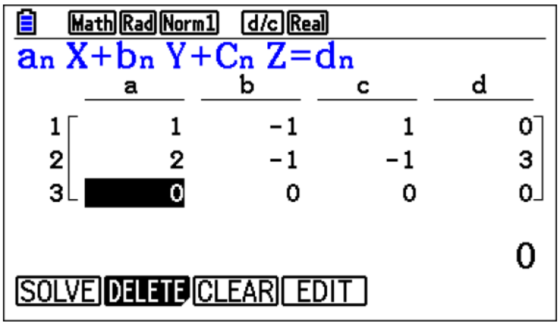
Problema 55

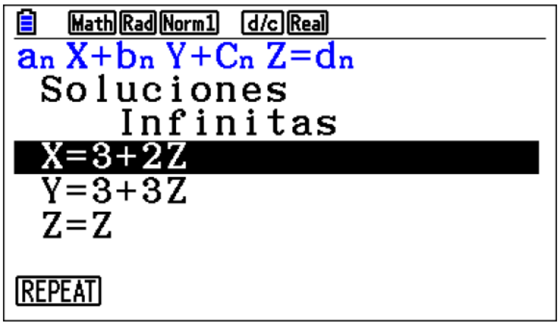
Determineu l'equació de l'esfera tangent a la recta intersecció dels plànols $\pi_1 \equiv x - y + z = 0, \pi_2 \equiv 2x - y - z = 3$ i concèntrica a l'esfera d'equació $E \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 6y - 8z + 16 = 0$

Solució:

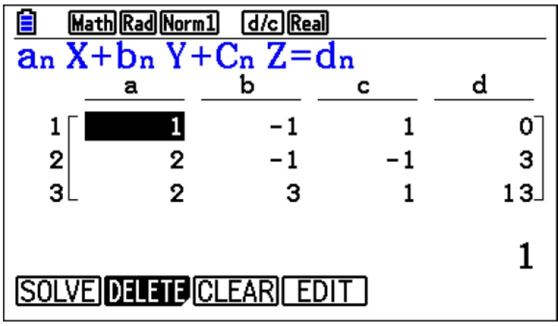
Determinem el centre i el radi de l'esfera E completant quadrats:
$x^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = -16 + 9 + 16 = 3^2$
El centre de l'esfera és $O(0,3,4)$ i el radi $r = 3$

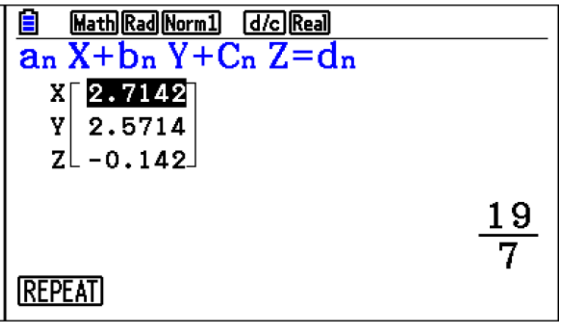
El punt de tangència de l'esfera que cerquem és la projecció del centre $O(0,3,4)$ sobre la recta $r \equiv \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x - y - z = 3 \end{cases}$ intersecció dels dos plànol.
Resolent el sistema determinem l'equació paramètrica de la recta r:





L'equació paramètrica és:
$$r \equiv \begin{cases} x = 3 + 2\alpha \\ y = 3 + 3\alpha \\ z = \alpha \end{cases}$$
El plànol perpendicular a la recta r que passa pel centre O té vector característic el vector director de la recta r. La seua equació és:
$\pi \equiv 2x + 3(y-3) + z - 4 = 0$
Simplificant,
$\pi \equiv 2x + 3y + z = 13$
El punt de tangència és igual a la intersecció dels tres plànols
Resolem el sistema format pels tres plànols:
$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x - y - z = 3 \\ 2x + 3y + z = 13 \end{cases}$$





Les coordenades són:
$T\left(\frac{19}{7}, \frac{18}{7}, -\frac{1}{7}\right)$

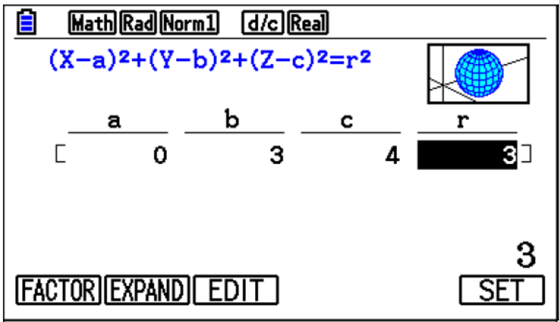
El radi de l'esfera concèntrica és:

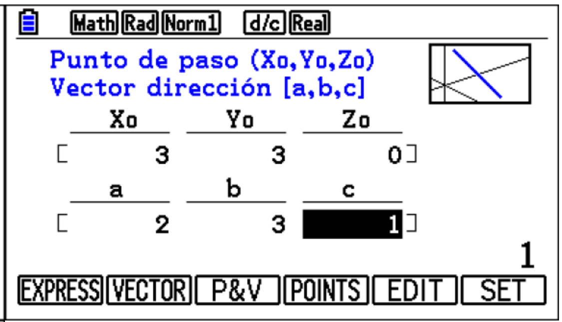
$$R = d(O,T) = \sqrt{\left(\frac{19}{7}-0\right)^2+\left(\frac{18}{7}-3\right)^2+\left(-\frac{1}{7}-4\right)^2} = \frac{\sqrt{1211}}{7}$$

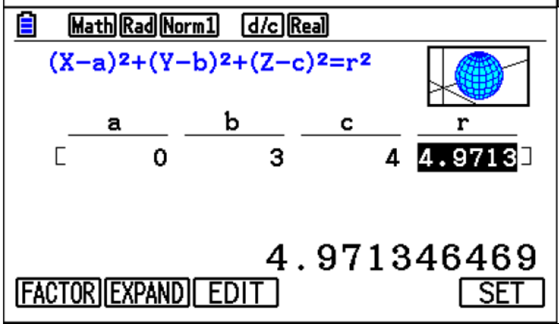
L'equació de l'esfera és:

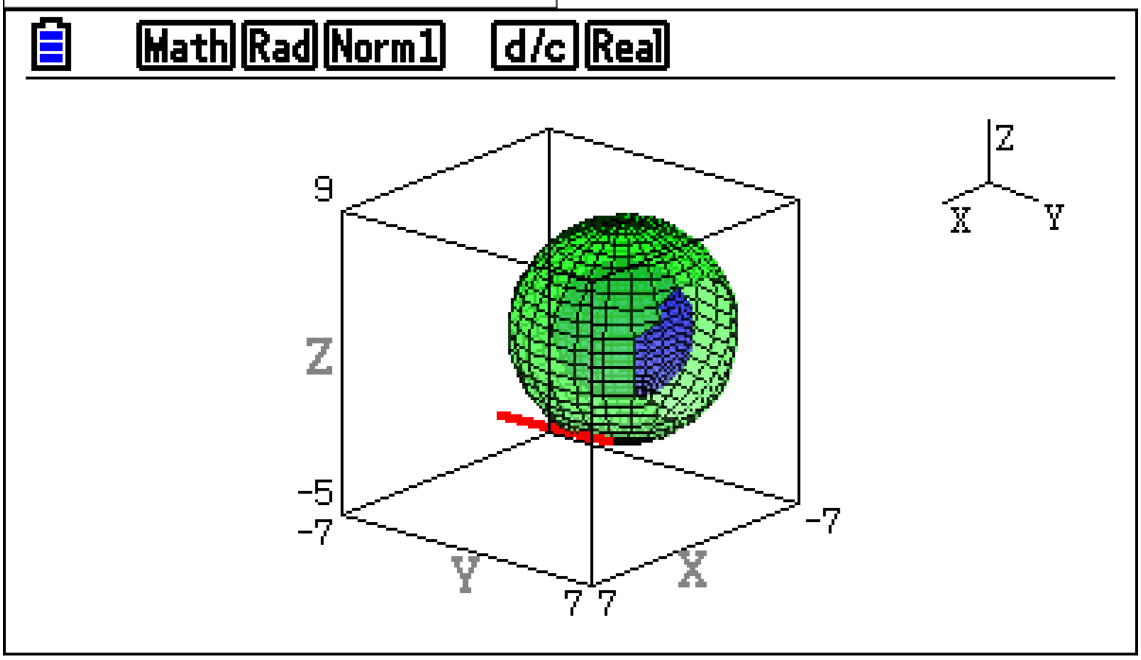
$$E_1 \equiv x^2+(y-3)^2+(z-4)^2 = -16+9+16 = \left(\frac{\sqrt{1211}}{7}\right)^2$$

Representem la recta i les dues esferes.









Problema 56
Determineu les equacions de les esferes els centres de les quals pertanyen al plànol $\pi \equiv 3x + 2y - z - 8 = 0$ i són tangents als plànols coordenats.

Solució:
Els plànols coordenats són:
$\pi_{yz} \equiv x = 0, \pi_{xz} \equiv y = 0, \pi_{xy} \equiv z = 0$
Determinem l'equació paramètrica del plànol $\pi \equiv 3x + 2y - z - 8 = 0$
$z = 3x + 2y - 8$

$$\pi \equiv \begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = -8 + 3\alpha + 2\beta \end{cases}$$

Les coordenades del centre de l'esfera són:
$O(\alpha, \beta, -8 + 3\alpha + 2\beta)$

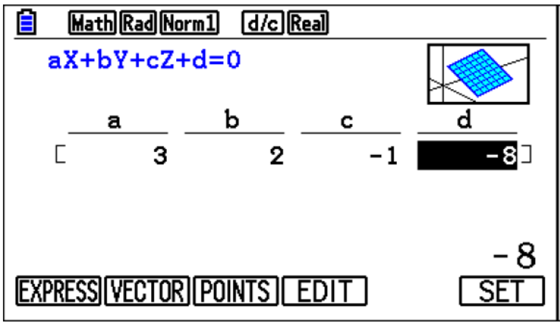
Les dels distàncies del centre als plànols coordenats són iguals:
$d(O, \pi_{yz}) = d(O, \pi_{xz}) = d(O, \pi_{xy})$
$|\alpha| = |\beta| = |-8 + 3\alpha + 2\beta|$

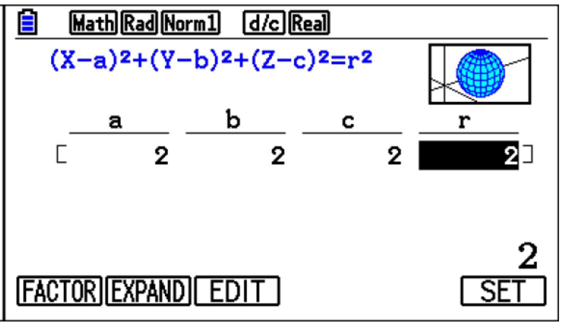
$$\begin{cases} \alpha = \beta \\ \alpha = -8 + 3\alpha + 2\beta \end{cases}, \begin{cases} \alpha = \beta \\ \alpha = 8 - 3\alpha - 2\beta \end{cases}, \begin{cases} \alpha = -\beta \\ \alpha = -8 + 3\alpha + 2\beta \end{cases}, \begin{cases} \alpha = -\beta \\ \alpha = 8 - 3\alpha - 2\beta \end{cases}$$

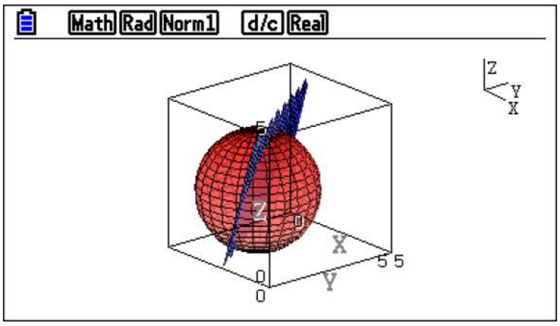
Les solucions són (el tercer sistema no tè solució):

$$\begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 2 \end{cases}, \begin{cases} \alpha = \frac{4}{3} \\ \beta = \frac{4}{3} \end{cases}, \begin{cases} \alpha = 4 \\ \beta = -4 \end{cases}$$

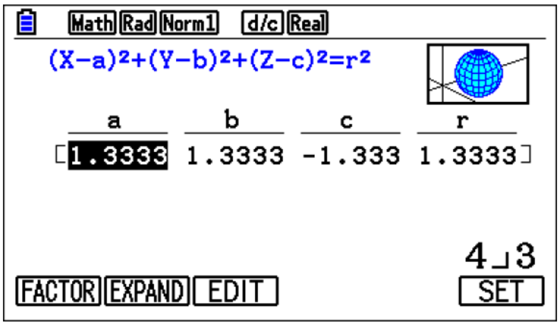
Primera solució:
Centre $O_1(2, 2, 2)$ i radi $r_1 = 2$

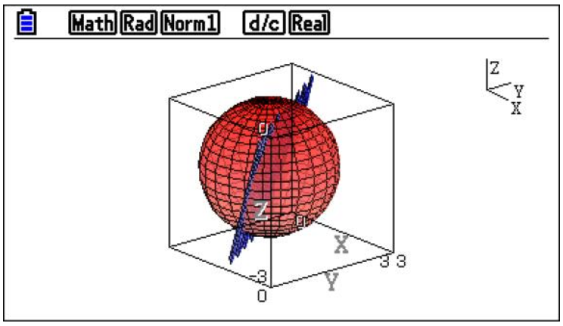




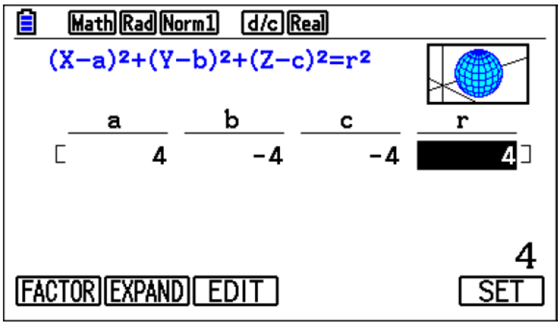


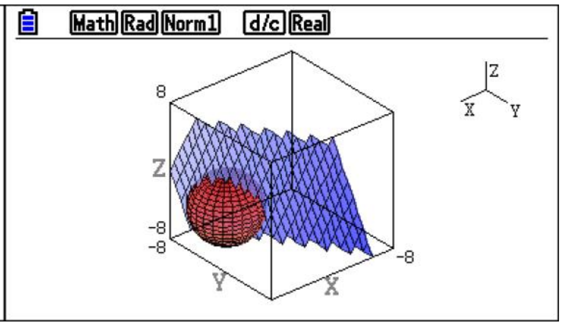
Segona solució:
Centre $O_2\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3},-\frac{4}{3}\right)$ i radi $r_2=\frac{4}{3}$





Tercera solució:
Centre $O_3(4,-4,-4)$ i radi $r_3=4$





Problema 57
Determineu la màxima esfera de centre $O(5,4,9)$ continguda en el primer octant.

Solució:
Notem que el centre $O(5,4,9)$ pertany al primer octant.
El radi és $R = mín\{5,4,9\} = 4$
L'equació és:
$E \equiv (x-5)^2 + (y-4)^2 + (z-9)^2 = 4^2$