

# Frisos

# Frisos

## Isometries

Anomenem isometria del plànol a qualsevol bijecció del plànol que deixa invariants les distàncies. Les isometries són les simetries, les translacions, les rotacions i les simetries desplaçades.

## Les simetries

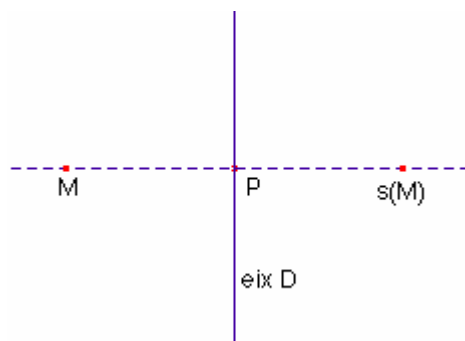
Siga una recta  $D$  del plànol (anomenada eix).

Siga un punt  $M$  del plànol. Considerem la recta  $r$  perpendicular a la recta  $D$  que passa pel punt  $M$ .

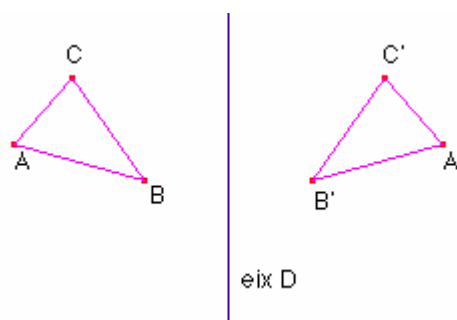
Siga el punt  $P$  intersecció de les rectes  $D$ ,  $r$ .

Anomenem simetria d'eix  $D$  a la bijecció  $s_D$  del plànol definida per:

$$\forall M \quad \overrightarrow{Ps_D(M)} = -\overrightarrow{PM}$$



La imatge d'un triangle per la simetria  $s_D$



## Les translacions

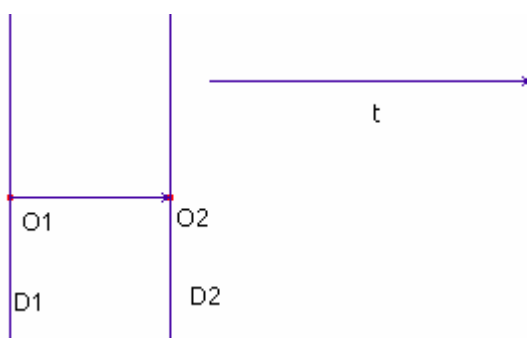
Les translacions són les bijeccions del plànel obtingudes amb la composició de dues simetries paral·leles.

Siguem els punts  $O_1, O_2$ ,

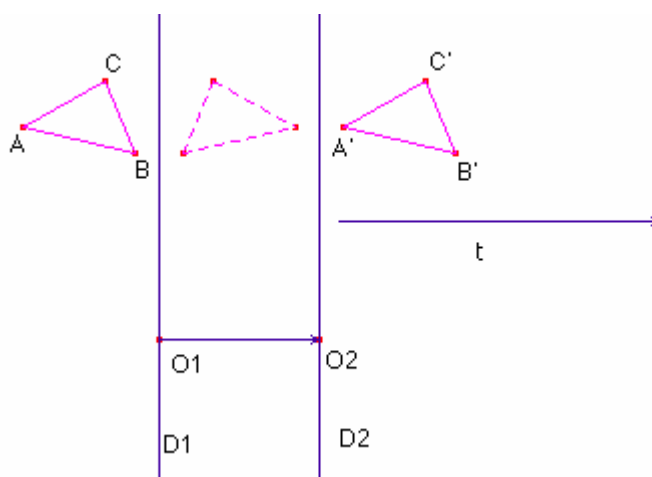
Considerem el vector  $\vec{t} = 2 \cdot \overrightarrow{O_1O_2}$

Siguem les rectes  $D_1, D_2$  paral·leles, de direcció orthogonal al vector  $\vec{t}$

Definim translació de vector  $\vec{t}$  a la bijecció del plànel (denotada per  $t$ ) definida per  $t = s_{D_2} \circ s_{D_1}$  on  $s_{D_1}, s_{D_2}$  són simetries d'eixos  $D_1, D_2$  respectivament



La imatge d'un triangle  $\triangle ABC$  per la translació  $t$  és:



El programa Cabri Géomètre fa la translació directament donant-li el vector translació.

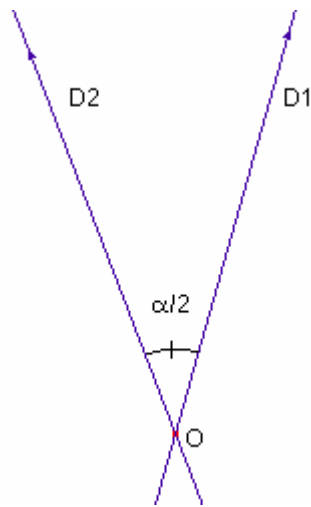
## Les rotacions.

Les rotacions són les bijeccions del plànol obtingudes fent la composició de dues simetries d'eixos concurrents en un punt anomenat centre.

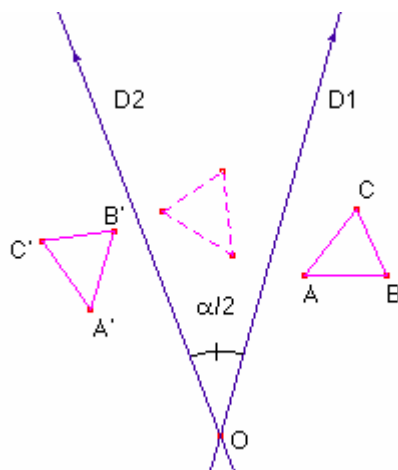
Siguen  $D_1, D_2$  dues rectes orientades les quals es tallen en un punt  $O$ .

Siga l'angle orientat  $\angle(D_1, D_2) = \frac{\alpha}{2}$

Definim rotació de centre  $O$  i angle  $\alpha$  a la bijecció del plànol (denotada per  $r_{O,\alpha}$ ) definida per  $r_{O,\alpha} = s_{D_2} \circ s_{D_1}$  on  $s_{D_1}, s_{D_2}$  són simetries d'eixos  $D_1, D_2$  respectivament.



La imatge d'un triangle  $\triangle ABC$  per la rotació  $r_{O,\alpha}$  de centre  $O$  i angle  $\alpha$  és:



El programa Cabri Géomètre fa la rotació directament donant-li l'angle en edició numèrica i el centre de rotació .

## Les simetries amb desplaçament

Les simetries amb desplaçament són les bijeccions del plànol obtingudes amb la composició d'una translació i una simetria on l'eix de simetria i el vector translació són paral·lels.

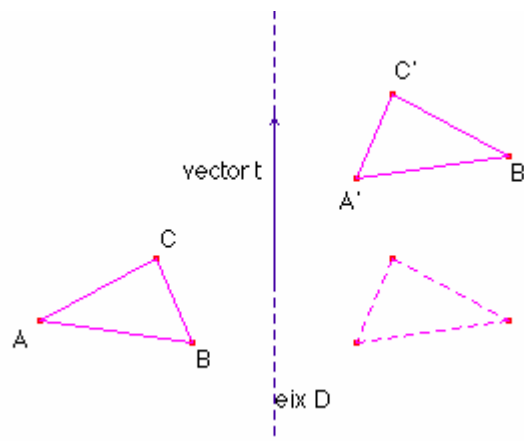
Siga el vector  $\vec{t}$  (vector de translació).

Siga una recta  $D$  de direcció  $\vec{t}$ .

Anomenem simetria de desplaçament de vector  $\vec{t}$  i d'eix  $D$  a la bijecció del plànol (denotada per  $u_{D,t}$ ) definida per  $u_{D,t} = t \circ s_D$  on  $s_D$  és una simetria d'eix  $D$  i  $t$  és una translació de vector  $\vec{t}$ .



La imatge d'un triangle  $\triangle ABC$  per la simetria desplaçada  $u_{D,t}$  de vector  $\vec{t}$  i eix  $D$ :



## Cobriments del plànol.

Donada una regió del plànol  $R$  anomenem cobriment de la regió  $R$  del plànol a un conjunt de figures geomètriques que es puguin col·locar de manera que tot punt de la regió  $R$  pertanyi a una i només a una de dites figures.

## Fris

Anomenem fris al cobriment d'una regió del plànol limitada per dues rectes paral·leles

Els frisos són cobriments de regions de longitud infinita però amplària finita. Les úniques isometries que poden formar part dels frisos són:

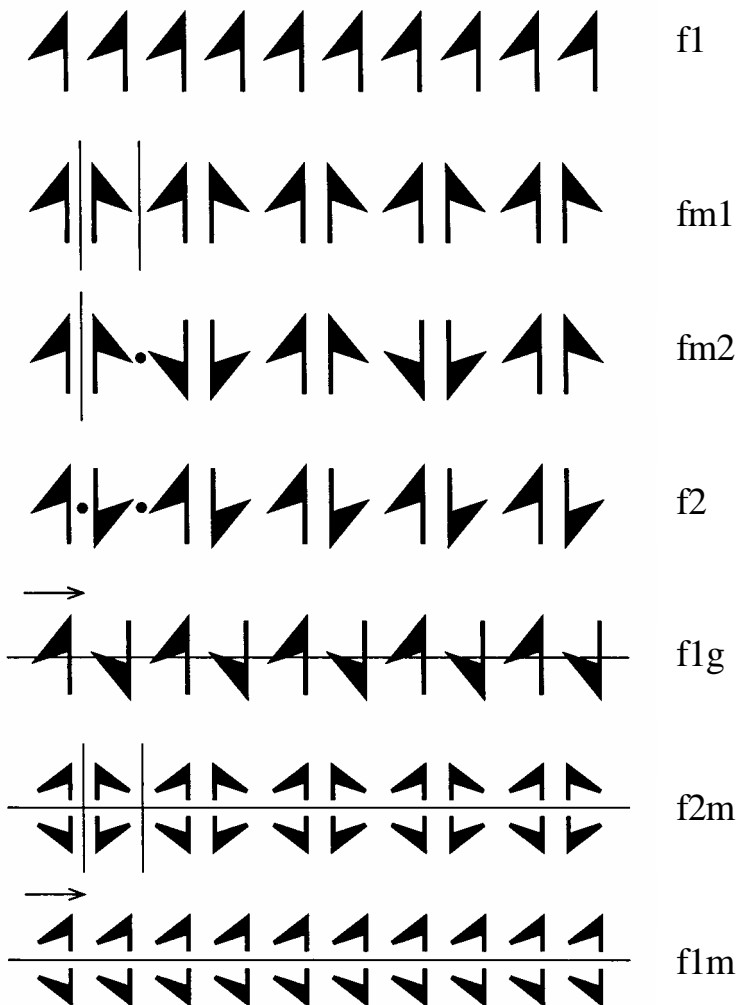
Translació d'un vector paral·lel a les vores de la regió.

Els girs de  $180^\circ$  el centre dels quals equidista dels costats de la regió.

La simetria els eixos de la qual és la recta que equidista de les vores de la regió.

La simetria desplaçada l'eix del qual és la recta que equidista de les vores de la regió.

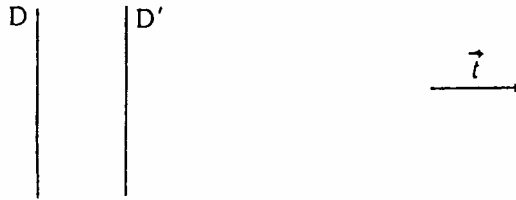
Analitzant les possibles combinacions d'aquests moviments, hi ha 7 frisos diferents:



## Construcció dels frisos

## Construcció dels frisos f1

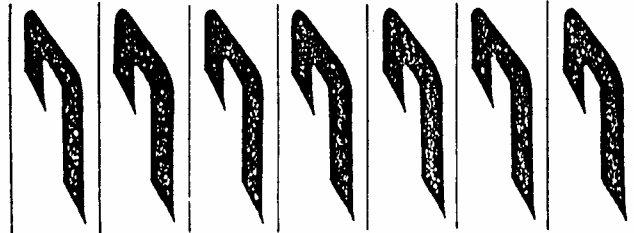
- Dibuixeu dues rectes paral·leles  $D, D'$ .
- Dibuixeu el vector de translació  $\vec{t}$  ortogonal a la recta  $D$  tal que  $\vec{t}$  transforma la recta  $D$  en  $D'$ .



- A l'interior de la banda definida per les rectes  $D, D'$  definiu el motiu:



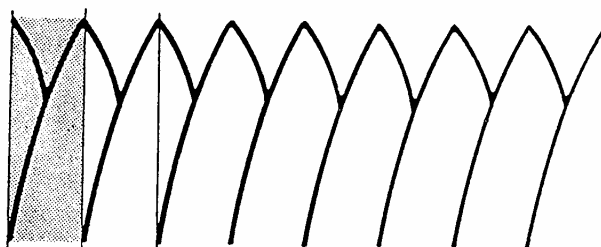
- Adjunteu a la figura precedent les seues transformacions mitjançant les translacions de vector  $\vec{t}$ .



- Suprimiu la trama per obtenir la figura.



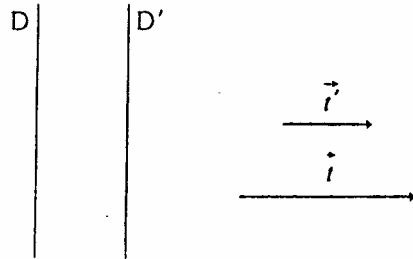
Un exemple:





## Construcció dels frisos fm1

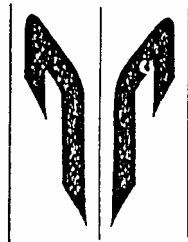
- Dibuixeu dues rectes paral·leles  $D, D'$ .
- Dibuixeu els vectors de translació  $\vec{t}'$ ,  $\vec{t}$  ortogonals a la recta  $D$ , tal que  $\vec{t}'$  transforma la recta  $D$  en  $D'$  i a més a més  $\vec{t} = 2 \cdot \vec{t}'$ .



- A l'interior de la banda definida per les rectes  $D, D'$  definiu el motiu:



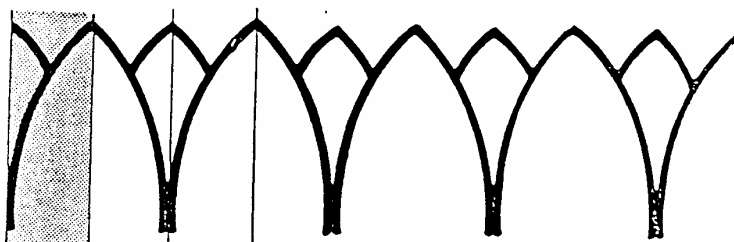
- Adjunteu a la figura precedent la simètrica respecte de la recta  $D'$ .



- Adjunteu a la figura anterior les transformacions mitjançant la translació de vector  $\vec{t}$ . Tot seguit, suprimiu la trama.

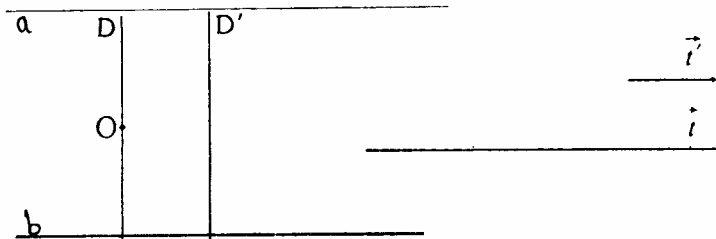


Un exemple:

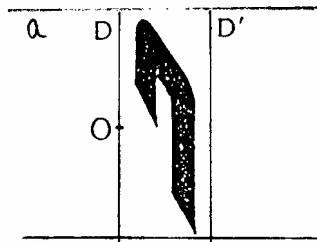


## Construcció dels frisos fm2

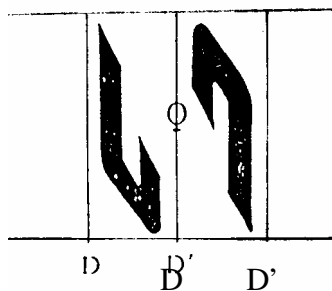
- Dibuixeu les rectes paral·leles a, b (vores del fris).
- Dibuixeu dues rectes paral·leles D, D', perpendiculars a les anteriors.
- Dibuixeu els vectors de translació  $\vec{t}'$ ,  $\vec{t}$  ortogonals a la recta D, tal que  $\vec{t}'$  transforma la recta D en D' i a més a més  $\vec{t} = 4 \cdot \vec{t}'$ .
- Dibuixeu el punt O de la recta D que equidista de les rectes a, b.



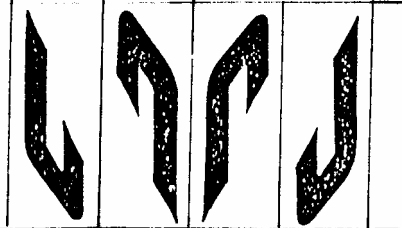
- A l'interior del rectangle definit per les rectes a, b, D, D' dibuixeu un motiu.



- A la figura anterior adjunteu-li una rotació de centre O i angle 180°.



- Les dues figures anteriors transformeu-les mitjançant una simetria d'eix D'.

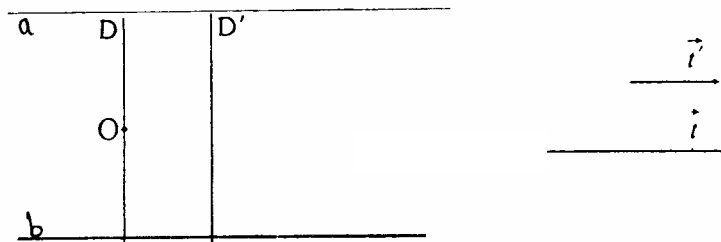


- Adjunteu a les 4 figures anteriors les seues transformades mitjançant una translació de vector  $\vec{t}$ . Suprimiu, tot seguit, les trames.

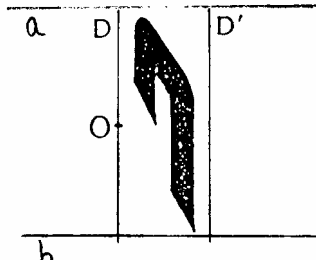


## Construcció dels frisos f2

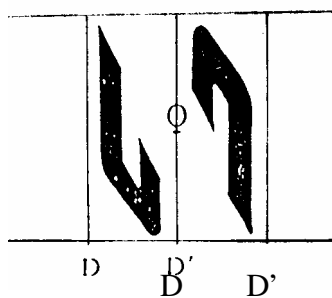
- Dibuixeu les rectes paral·leles a, b (vores del fris).
- Dibuixeu dues rectes paral·leles D, D', perpendiculars a les anteriors.
- Dibuixeu els vectors de translació  $\vec{t}'$ ,  $\vec{t}$  ortogonals a la recta D, tal que  $\vec{t}$  transforma la recta D en D' i a més a més  $\vec{t} = 2 \cdot \vec{t}'$ .
- Dibuixeu el punt O de la recta D que equidista de les rectes a, b.



- A l'interior del rectangle definit per les rectes a, b, D, D' dibuixeu un motiu.



- A la figura anterior adjunteu-li una rotació de centre O i angle 180°.

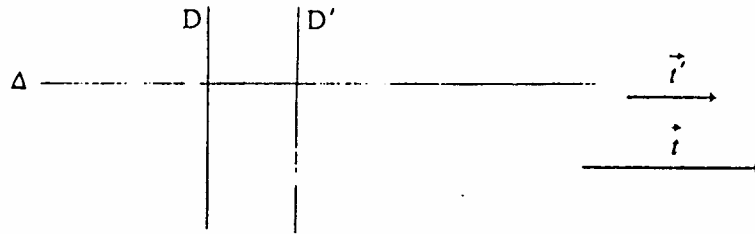


- A la dues figures anteriors adjunteu-li una translació de vector  $\vec{t}$ . Suprimiu, tot seguit, les trames.

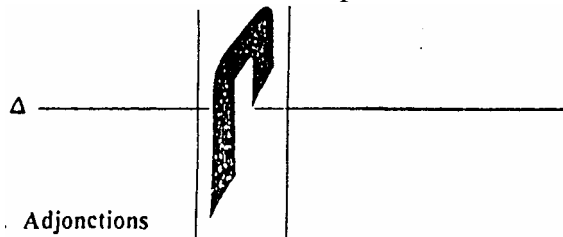


## Construcció dels frisos f1g

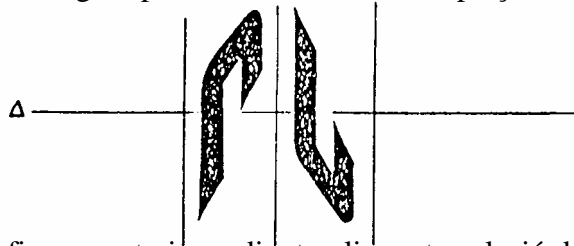
- Dibuixeu dues rectes paral·leles  $D, D'$ .
- Dibuixeu els vectors de translació  $\vec{t}'$ ,  $\vec{t}$  ortogonals a la recta  $D$ , tal que  $\vec{t}'$  transforma la recta  $D$  en  $D'$  i a més a més  $\vec{t} = 2 \cdot \vec{t}'$ .
- Dibuixeu l'eix  $\Delta$  perpendicular a la recta  $D$ .



- A l'interior de la banda definida per les rectes  $D, D'$  definiu el motiu:



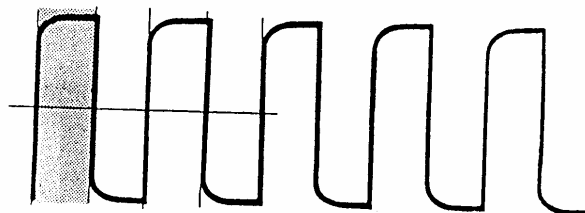
- Adjunteu a la figura precedent la simetria desplaçada d'eix  $\Delta$  i de vector de  $\vec{t}$ .



- A la dues figures anteriors adjunteu-li una translació de vector  $\vec{t}$ . Suprimiu, tot seguit, les trames.

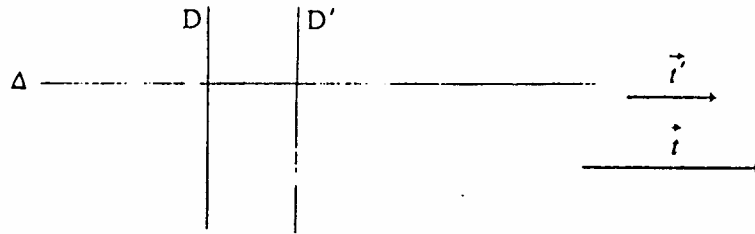


Un exemple:

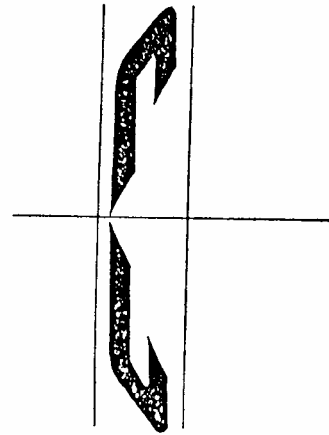
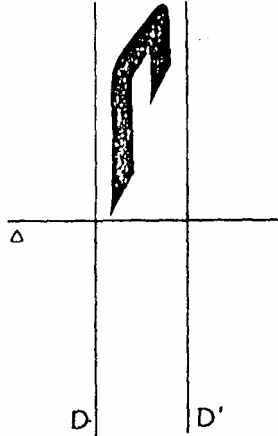


## Construcció dels frisos f2m

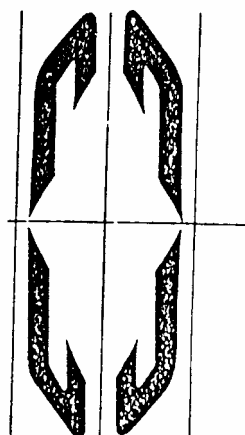
- Dibuixeu dues rectes paral·leles  $D, D'$ .
- Dibuixeu els vectors de translació  $\vec{t}', \vec{t}$  ortogonals a la recta  $D$ , tal que  $\vec{t}'$  transforma la recta  $D$  en  $D'$  i a més a més  $\vec{t} = 2 \cdot \vec{t}'$ .
- Dibuixeu l'eix  $\Delta$  perpendicular a la recta  $D$ .



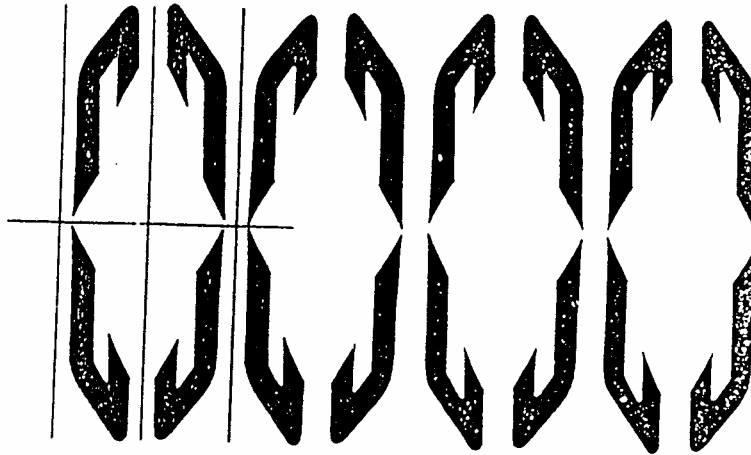
- A l'interior de la banda superior definida per les rectes  $D, D', \Delta$  definiu el motiu:
- Adjunteu a la figura precedent la simetria d'eix  $\Delta$ .



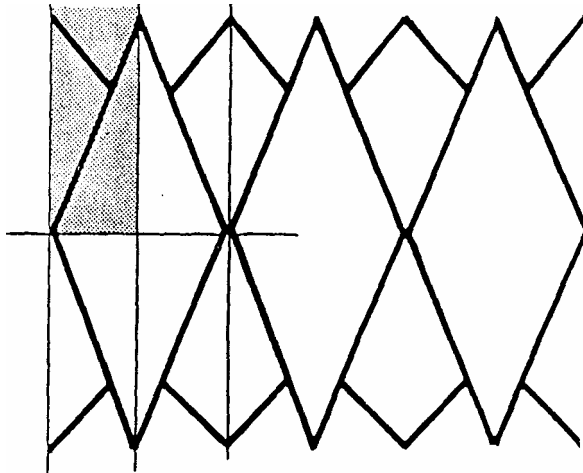
- A les dues figures anteriors adjunteu-li una simetria d'eix  $D'$ .



- g) Adjunteu a les 4 figures anteriors les seues transformades mitjançant una translació de vector  $\vec{t}$ . Suprimiu, tot seguit, les trames.

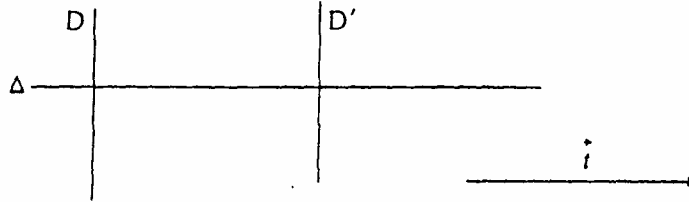


Un exemple:

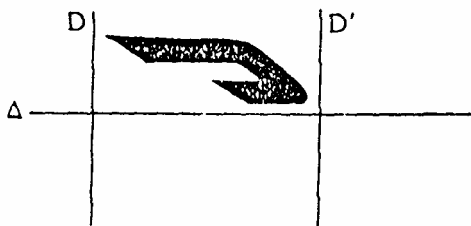


## Construcció dels frisos f1m

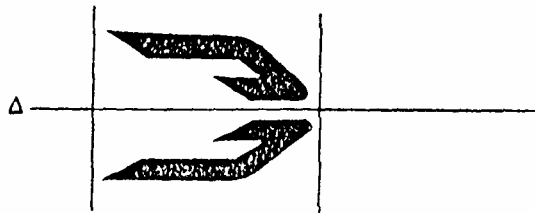
- Dibuixeu dues rectes paral·leles  $D, D'$ .
- Dibuixeu el vector de translació  $\vec{t}$  orthogonal a la recta  $D$ , tal que  $\vec{t}$  transforma la recta  $D$  en  $D'$ .
- Dibuixeu l'eix  $\Delta$  perpendicular a la recta  $D$ .



- A l'interior de la banda superior definida per les rectes  $D, D', \Delta$  definiu el motiu:



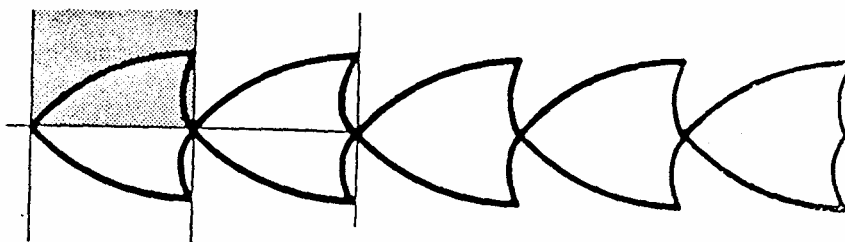
- Adjunteu a la figura precedent la simetria d'eix  $\Delta$ .



- Adjunteu a les 2 figures anteriors les seues transformades mitjançant una translació de vector  $\vec{t}$ . Suprimiu, tot seguit, les trames.

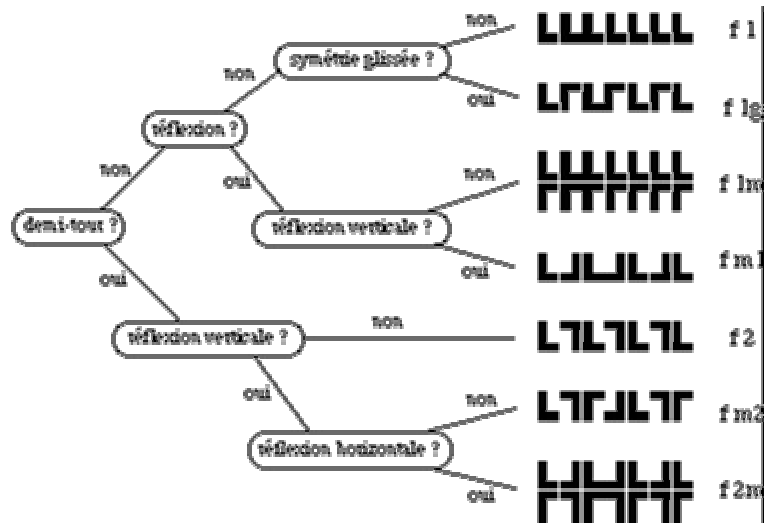


Un exemple:



Tot seguit donem un esquema per deduir el tipus de fris.

L'autor és Dominique Tournès  
 La Reunion (Frància).



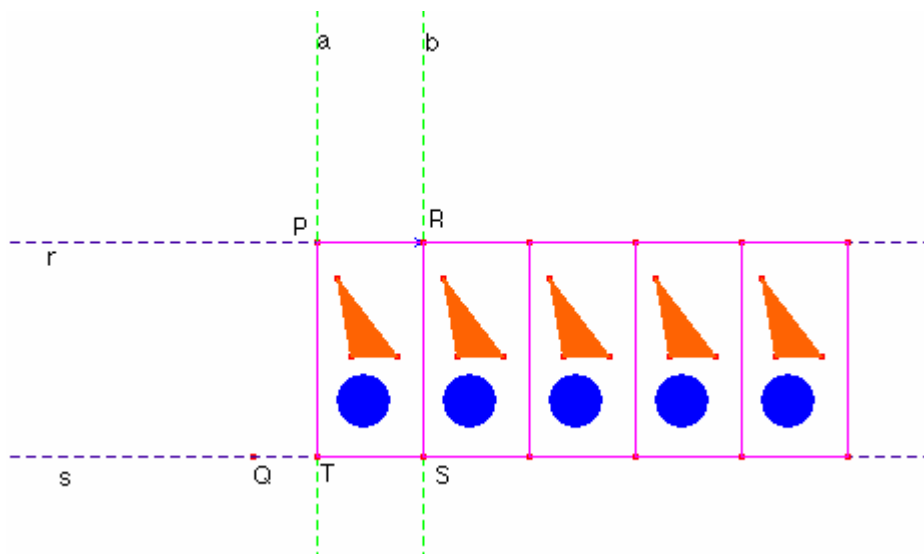


## Construcció dels frisos amb Cabri.

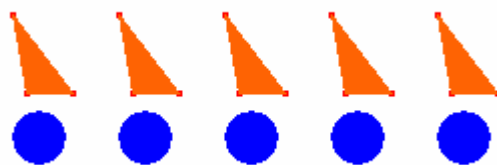
## Construcció dels frisos f1

Fem una construcció del fris dels tipus f1.

- Dibuixeu el punt P. Dibuixeu la recta r que passa pel punt P.
- Dibuixeu el punt Q.
- Dibuixeu la recta s paral·lela a la recta r que passa pel punt Q.
- Les rectes r i s són les vores del fris.
- Dibuixeu el punt R de la recta r.
- Dibuixeu el vector  $\overline{PR}$  vector translació.
- Dibuixeu la recta a perpendicular a la recta r que passa pel punt P.
- Dibuixeu la recta b perpendicular a la recta r que passa pel punt R.
- Feu la intersecció de les rectes a, s. Anomeneu el punt T.
- Feu la intersecció de les rectes b, s. Anomeneu el punt S.
- Dibuixeu el rectangle PRST. Dins d'aquest recinte dibuixeu qualsevol figura, per exemple un triangle i un cercle (motiu inicial).
- Traslladeu el rectangle PRST i el motiu segons el vector  $\overline{PR}$ .
- Creeu una macroconstrucció que els objectes inicials siguin el rectangle PRST i el motiu inicial i els objectes finals siguin els objectes traslladats. Apliqueu la macro diverses vegades.



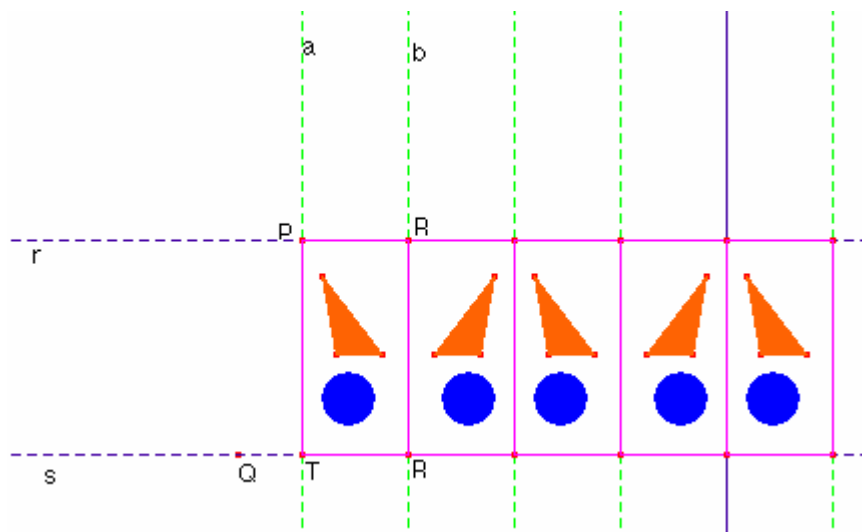
Ocultant allò innecessari quedaria:



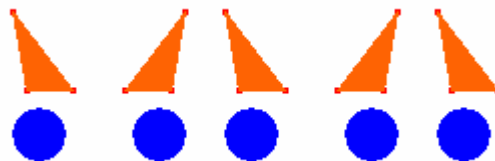
## Construcció dels frisos fm1

Fem una construcció del fris dels tipus fm1.

- Dibuixeu el punt P. Dibuixeu la recta r que passa pel punt P.
- Dibuixeu el punt Q.
- Dibuixeu la recta s paral·lela a la recta r que passa pel punt Q.
- Les rectes r i s són les vores del fris.
- Dibuixeu el punt R de la recta r.
- Dibuixeu la recta a perpendicular a la recta r que passa pel punt P.
- Dibuixeu la recta b perpendicular a la recta r que passa pel punt R.
- Feu la intersecció de les rectes a, s. Anomeneu el punt T.
- Feu la intersecció de les rectes b, s. Anomeneu el punt S.
- Dibuixeu el rectangle PRST. Dins d'aquest recinte dibuixeu qualsevol figura, per exemple un triangle i un cercle.
- Efectueu les simetries del rectangle PRST de la recta b i el motiu respecte de la recta b.
- Creeu una macroconstrucció que els objectes inicials siguin el rectangle PRST, les rectes a, b i el motiu inicial i els objectes finals siguin els objectes simètrics. Apliqueu la macro diverses vegades.



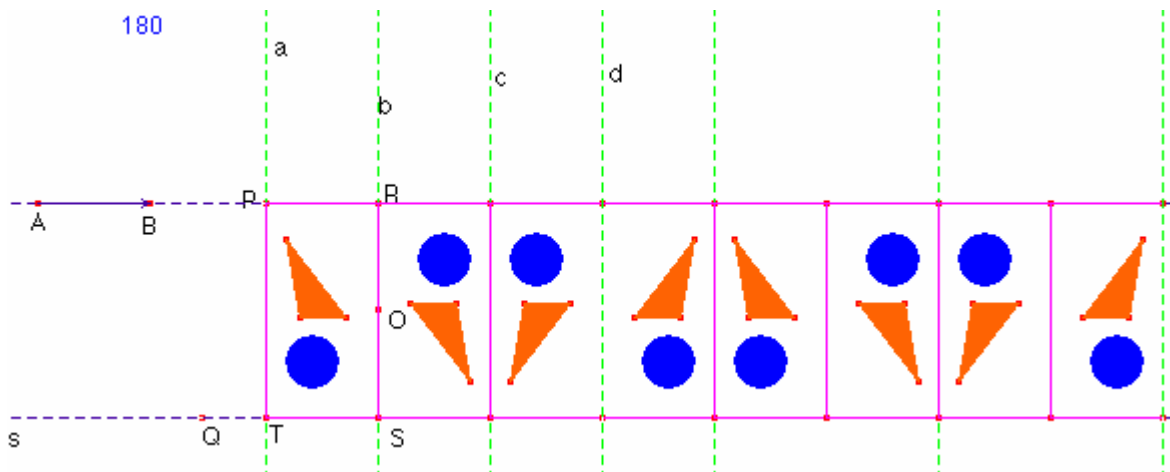
Ocultant allò innecessari quedaria:



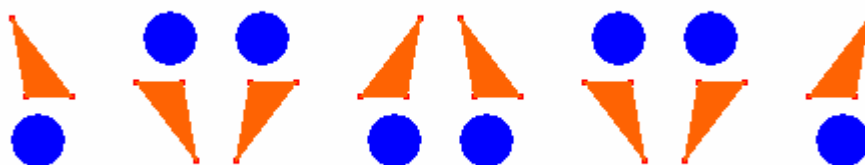
## Construcció dels frisos fm2

Fem una construcció del fris dels tipus fm2.

- Dibuixeu el punt P. Dibuixeu la recta r que passa pel punt P.
- Dibuixeu el punt Q. Dibuixeu la recta s paral·lela a la recta r que passa pel punt Q.
- Dibuixeu els punts A, B sobre la recta r. dibuixeu el vector  $\overrightarrow{AB}$ .
- Les rectes r i s són les vores del fris.
- Dibuixeu el punt R traslladat del punt P segons el vector  $\overrightarrow{AB}$ .
- Dibuixeu la recta a perpendicular a la recta r que passa pel punt P.
- Dibuixeu la recta b perpendicular a la recta r que passa pel punt R.
- Feu la intersecció de les rectes a, s. Anomeneu el punt T.
- Feu la intersecció de les rectes b, s. Anomeneu el punt S.
- Dibuixeu el punt mig O del segment  $\overline{RS}$ .
- Dibuixeu el rectangle PRST.
- Dins d'aquest recinte dibuixeu qualsevol figura, per exemple un triangle i un cercle.
- Definiu l'angle  $180^\circ$ .
- Efectueu les rotacions de centre O del motiu (triangle, cercle).
- Trasladeu el rectangle PRST, segons el vector el  $\overrightarrow{AB}$ .
- Dibuixeu la recta c traslladada de la recta b segons el vector  $\overrightarrow{AB}$ .
- Dibuixeu la recta d traslladada de la recta c segons el vector  $\overrightarrow{AB}$ .
- Creeu una macroconstrucció que els objectes inicials siguin el rectangle PRST, el vector  $\overrightarrow{AB}$ , el rectangle PRTS, les rectes a, c, l'angle  $180^\circ$  i el motiu inicial i els objectes finals siguin el 3r i 4t rectangles traslladats i els 2 motius dels rectangles anteriors. Apliqueu la macro diverses vegades.



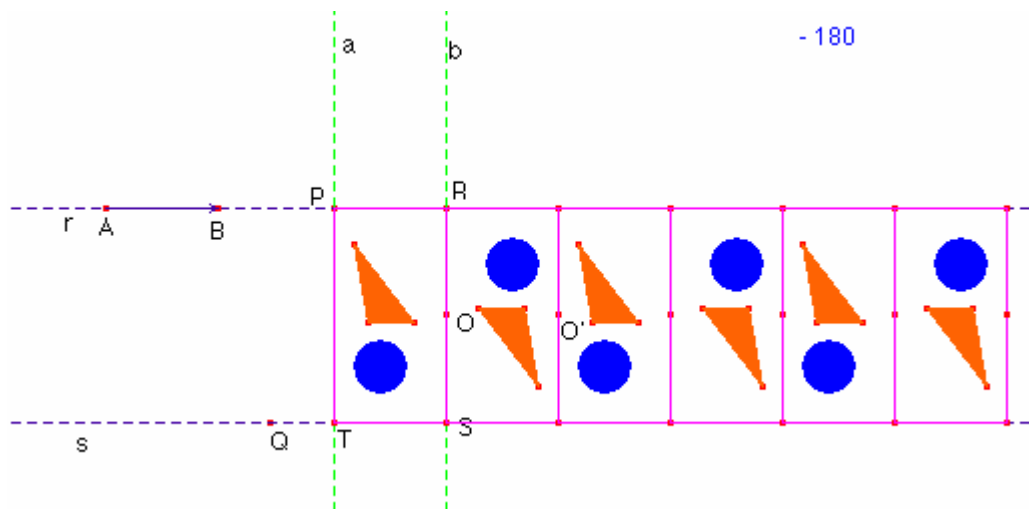
Ocultant allò innecessari:



## Construcció dels frisos f2

Fem una construcció del fris dels tipus f2.

- Dibuixeu el punt P. Dibuixeu la recta r que passa pel punt P.
- Dibuixeu el punt Q. Dibuixeu la recta s paral·lela a la recta r que passa pel punt Q.
- Dibuixeu els punts A, B sobre la recta r. dibuixeu el vector  $\overrightarrow{AB}$ .
- Les rectes r i s són les vores del fris.
- Dibuixeu el punt R traslladat del punt P segons el vector  $\overrightarrow{AB}$ .
- Dibuixeu la recta a perpendicular a la recta r que passa pel punt P.
- Dibuixeu la recta b perpendicular a la recta r que passa pel punt R.
- Feu la intersecció de les rectes a, s. Anomeneu el punt T.
- Feu la intersecció de les rectes b, s. Anomeneu el punt S.
- Dibuixeu el punt mig O del segment  $\overline{RS}$ .
- Dibuixeu el rectangle PRST.
- Dins d'aquest recinte dibuixeu qualsevol figura, per exemple un triangle i un cercle.
- Definiu l'angle  $-180^\circ$
- Efectueu les rotacions de centre O del motiu (triangle, cercle).
- Trasladeu el rectangle PRST, segons el vector el  $\overrightarrow{AB}$
- Creeu una macroconstrucció que els objectes inicials siguin el rectangle PRST, el vector  $\overrightarrow{AB}$ , el centre O, l'angle  $-180^\circ$  i el motiu inicial i els objectes finals siguin el rectangle traslladat i el motiu rotat i el punt O'. Apliqueu la macro diverses vegades.



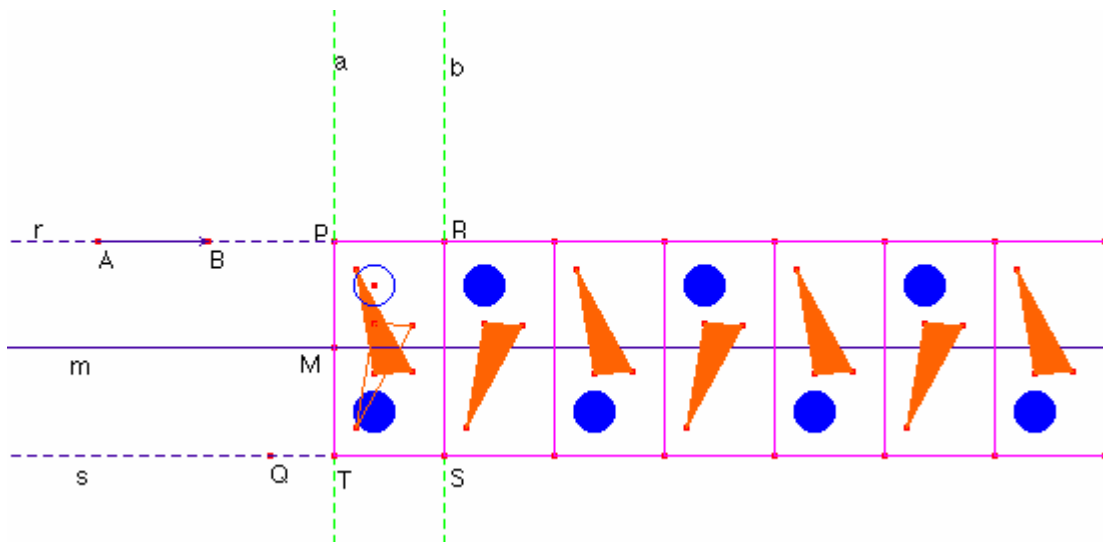
Ocultant allò innecessari quedaria:



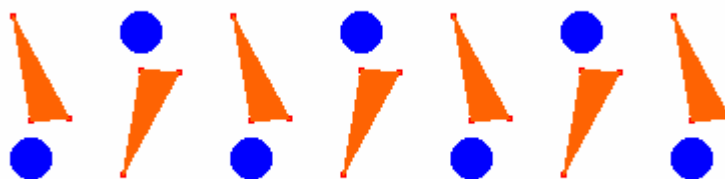
## Construcció dels frisos f1g

Fem una construcció del fris dels tipus f1g.

- Dibuixeu el punt P. Dibuixeu la recta r que passa pel punt P.
- Dibuixeu el punt Q. Dibuixeu la recta s paral·lela a la recta r que passa pel punt Q.
- Dibuixeu els punts A, B sobre la recta r. dibuixeu el vector  $\overrightarrow{AB}$ .
- Les rectes r i s són les vores del fris.
- Dibuixeu el punt R traslladat del punt P segons el vector  $\overrightarrow{AB}$ .
- Dibuixeu la recta a perpendicular a la recta r que passa pel punt P.
- Dibuixeu la recta b perpendicular a la recta r que passa pel punt R.
- Feu la intersecció de les rectes a, s. Anomeneu el punt T.
- Feu la intersecció de les rectes b, s. Anomeneu el punt S.
- Dibuixeu el rectangle PRST.
- Dins d'aquest recinte dibuixeu qualsevol figura, per exemple un triangle i un cercle.
- Dibuixeu el punt mig M del segment  $\overline{PT}$ .
- Dibuixeu la recta m paral·lela a la recta r que passa pel punt M.
- Feu la simetria del motiu inicial (triangle, cercle) respecte la recta m.
- Traslladeu els objectes simètrics anteriors, el rectangle PRTS amb el vector  $\overrightarrow{AB}$ .
- Creueu una macroconstrucció que els objectes inicials siguin el rectangle PRST, el vector  $\overrightarrow{AB}$ , la recta m i el motiu inicial i els objectes finals siguin el rectangle traslladat i el motiu final. Apliqueu la macro diverses vegades.



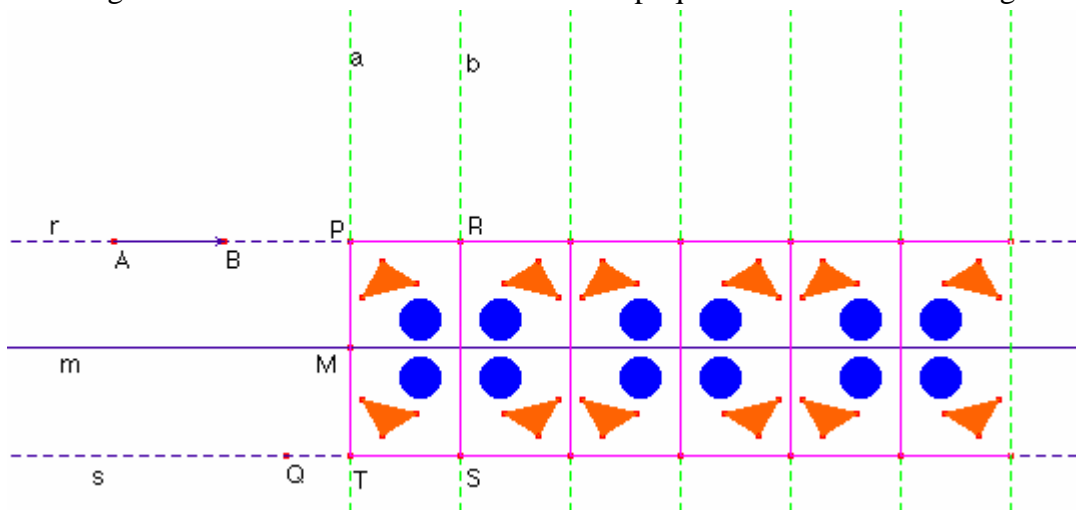
Ocultant allò innecessari quedaria:



## Construcció dels frisos f2m

Fem una construcció del fris dels tipus f2m.

- Dibuixeu el punt P. Dibuixeu la recta r que passa pel punt P.
- Dibuixeu el punt Q. Dibuixeu la recta s paral·lela a la recta r que passa pel punt Q.
- Dibuixeu els punts A, B sobre la recta r. dibuixeu el vector  $\overrightarrow{AB}$ .
- Les rectes r i s són les vores del fris.
- Dibuixeu el punt R traslladat del punt P segons el vector  $\overrightarrow{AB}$ .
- Dibuixeu la recta a perpendicular a la recta r que passa pel punt P.
- Dibuixeu la recta b perpendicular a la recta r que passa pel punt R.
- Feu la intersecció de les rectes a, s. Anomeneu el punt T.
- Feu la intersecció de les rectes b, s. Anomeneu el punt S.
- Dibuixeu el rectangle PRST.
- Dibuixeu el punt mig M del segment  $\overline{PT}$ .
- Dibuixeu la recta m paral·lela a la recta r que passa pel punt M.
- Dins d'aquest recinte superior del rectangle PRST dibuixeu qualsevol figura, per exemple un triangle i un cercle.
- Efectueu les simetries del motiu (triangle, cercle) respecte de la recta m.
- Traslladeu el rectangle PRST, segons el vector el  $\overrightarrow{AB}$
- Dibuixeu els objectes simètrics del motiu inicial i de les simetries horitzontals respecte de la recta b.
- Dibuixeu la recta c simètrica de la recta a respecte de b.
- Creeu una macroconstrucció que els objectes inicials siguin el rectangle PRST, el vector  $\overrightarrow{AB}$ , les rectes a, b, m i el motiu inicial i els objectes finals siguin el rectangle traslladat i els 2 motius i la recta c. Apliqueu la macro diverses vegades.



Ocultant allò innecessari quedaria:

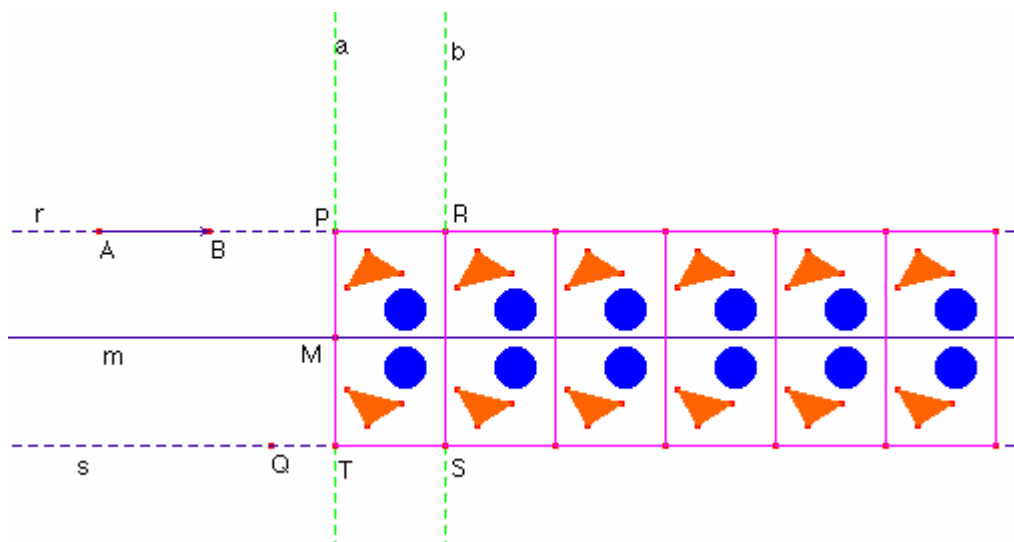


Noteu que la construcció f2m és la mateixa que fm1 considerant el motiu inicial els 2 triangles i els dos cercles.

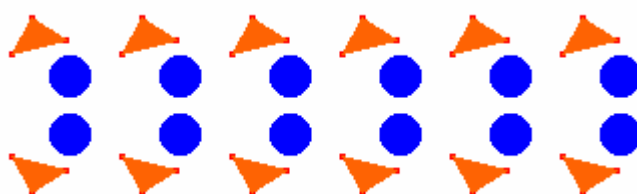
## Construcció dels frisos f1m

Fem una construcció del fris dels tipus f1m.

- Dibuixeu el punt P. Dibuixeu la recta r que passa pel punt P.
- Dibuixeu el punt Q.
- Dibuixeu la recta s paral·lela a la recta r que passa pel punt Q.
- Dibuixeu els punts A, B sobre la recta r. Dibuixeu el vector  $\overrightarrow{AB}$ .
- Les rectes r i s són les vores del fris.
- Dibuixeu el punt R traslladat del punt P segons el vector  $\overrightarrow{AB}$ .
- Dibuixeu la recta a perpendicular a la recta r que passa pel punt P.
- Dibuixeu la recta b perpendicular a la recta r que passa pel punt R.
- Feu la intersecció de les rectes a, s. Anomeneu el punt T.
- Feu la intersecció de les rectes b, s. Anomeneu el punt S.
- Dibuixeu el rectangle PRST.
- Dibuixeu el punt mig M del segment  $\overline{PT}$ .
- Dibuixeu la recta m paral·lela a la recta r que passa pel punt M.
- Dins d'aquest recinte superior del rectangle PRST dibuixeu qualsevol figura, per exemple un triangle i un cercle.
- Efectueu les simetries del motiu (triangle, cercle) respecte de la recta m.
- Trasladeu el rectangle PRST, els 2 motius segons el vector el  $\overrightarrow{AB}$
- Creeu una macroconstrucció que els objectes inicials siguin el rectangle PRST, el vector  $\overrightarrow{AB}$ , la recta m i el motiu inicial i els objectes finals siguin els objectes traslladats. Apliqueu la macro diverses vegades.



Ocultant allò innecessari quedaria:



Noteu que la construcció f1m és la mateixa que f1 canviant el motiu inicial.



## Bibliografia:

Bossard, Yvon. “Rosaces, frises et pavages. Volume 1: Étude pratique”. DEDIC, Paris 1997.

Jaime Pastor, Adela i Gutiérrez Rodríguez, Ángel. “El Grupo de la Isometrías del Plano”. Editorial Síntesis. Madrid 1996.

Ranucci, E.R. i Teeters, J.L. “Creating Escher-Type drawings”. Ed. Dale Seymour. CREATIVE PUBLICACIONES. Palo Alto, CA 94303.

AA. VV. “La Alhambra”. Asociación de Profesores de Matemáticas de Andalucía. Granada 1987.

Proyecto Sur. “Mosaicos 1”. Granada. ISBN 84-87387-47-0.

Proyecto Sur. “Mosaicos 2”. Granada. ISBN 84-87387-47-0.