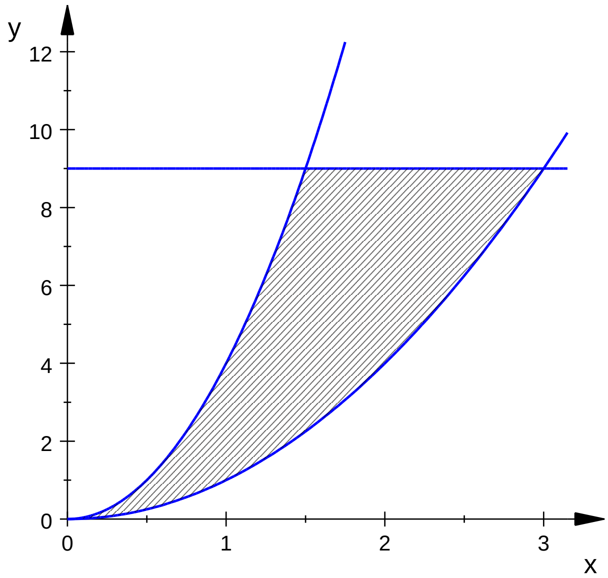
Càlcul d'àrees

Problema 1

Calculeu l'àrea de la regió del pla limitada en el primer quadrant per les gràfiques de les funcions $y = x^2$, $y = 4x^2$, y=9.

Pau's Catalunya 2014. Sèrie 3. Problema 4.



Solució:

El domini de les tres funcions és $x \geq 0$.

$4x^2 \geq x^2$.

Calculem els punts de tall de les tres funcions.

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 9 \end{cases}, \; x = 3.$$

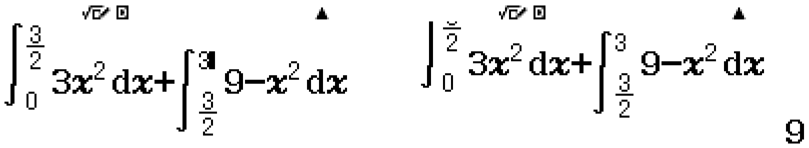
$$\begin{cases} y = 4x^2 \\ y = 9 \end{cases}, \; x = \frac{3}{2}.$$

L'àrea afitada per les tres corbes és:

$$S = \int_0^{3/2} \left(4x^2 - x^2\right)dx + \int_{3/2}^{3} \left(9 - x^2\right)dx.$$

$$S = \int_0^{3/2} 3x^2 dx + \int_{3/2}^{3} \left(9 - x^2\right)dx$$

Utilitzant la calculadora:

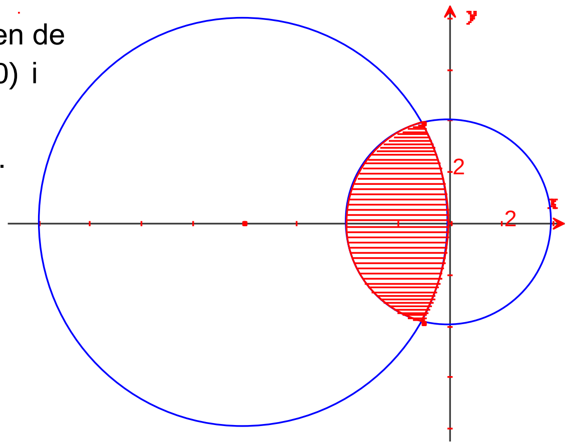


L'àrea afitada és $S = 9\ u^2$.

Problema 2

En la figura, la circumferència menuda té centre l'origen de coordenades i radi 4, la circumferència té centre $(-8, 0)$ i radi 8,

Determineu l'àrea comuna a les dues circumferències.

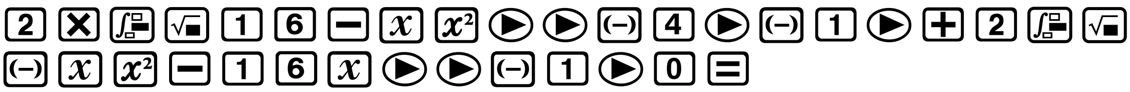


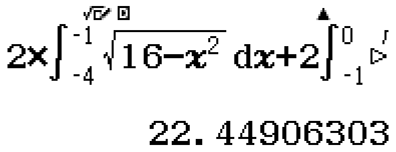
Solució:

L'equació de la circumferència menuda és:

$x^2 + y^2 = 4^2$.

L’equació de la circumferència gran és:
$(x-8)^2+y^2=8^2$.
La intersecció de les dues circumferències és:
$\begin{cases} x^2+y^2=16 \\ x^2+16x+y^2=0 \end{cases}$, $\begin{cases} x=-1 \\ y=\pm\sqrt{15} \end{cases}$.
L’àrea comuna a les dues circumferències és:
$S=2\left(\int_{-4}^{-1}\sqrt{16-x^2}\,dx+\int_{-1}^{0}\sqrt{-x^2-16x}\,dx\right)$.
Utilitzant la calculadora:





L’àrea ombrejada és: $S=2\left(\int_{-4}^{-1}\sqrt{16-x^2}\,dx+\int_{-1}^{0}\sqrt{-x^2-16x}\,dx\right)\approx 22.44906303\ u^2$.

Exercicis:

1.- Calculeu l’àrea limitada entre les rectes $y=0$, $x=e$, $x=e^2$, i la corba $f(x)=4x\cdot\ln x$.
Selectivitat juny 2012, Problema A3, apartat c).

2.- Donades les funcions $f(x)=x^3$ i $g(x)=2x^2-x$, es demana:
a) Obtindre raonadament els punts d’intersecció A i B de les corbes $y=f(x)$, $y=g(x)$.
b) Demostrar que $f(x)\geq g(x)$ quan $x\geq 0$.
c) Calcular raonadament l’àrea de la superfície limitada per les dues corbes entre els punts A i B.
Selectivitat setembre 2010, Problema B3

3.- Donades les funcions reals $f(x)=x^3-3x+8$ i $g(x)=-3x$, es demana:
Obteniu l’àrea del recinte limitat per la corba $y=f(x)$ i les rectes $y=g(x)$, $x=-3$, $x=0$.
Selectivitat setembre 2006, Problema 3.A.

4.- Donades les corbes $y=(x-1)^3$, $y=5-x^2$. Calculeu raonadament:
a) El punt de tall de les dues corbes.
b) L’àrea de la superfície limitada per les dues corbes i l’eix OY.
Selectivitat juny 2005, Problema 3.A.