Problema 1

Calculeu l'àrea limitada entre les rectes $y=0$, $x=e$, $x=e^2$, i la corba $f(x)=4x\cdot\ln x$.

Selectivitat juny 2012, Problema A3, apartat c).

Solució:

$f'(x)=4\ln x+4$.

$f'(x)>0$.

$\ln x>-1,\ x>\dfrac{1}{e}$.

La funció f(x) és monòtona estrictament creixent en $\left]\dfrac{1}{e},+\infty\right[$.

$f(1)=0$.

La funció $f(x)\geq 0$ quan $]1,+\infty[$.

Calculem la integral indefinida de la funció f(x), per parts:

$\int 4x\cdot\ln x\,dx$.

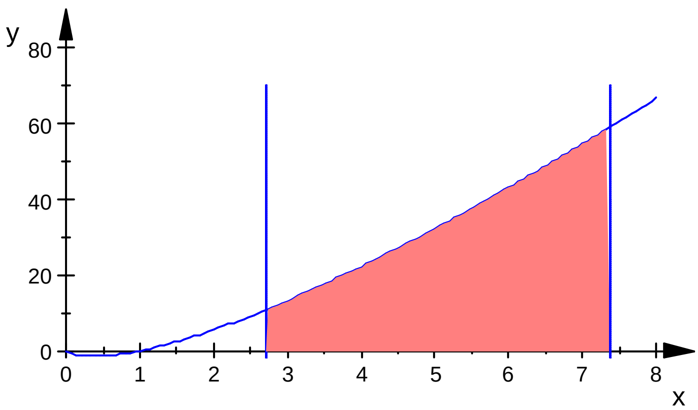
$u=\ln x$, $du=\dfrac{1}{x}dx$.

$dv=4x\,dx$, $v=\int 4x\,dx=2x^2$

$\int 4x\cdot\ln x\,dx=2x^2\ln x-\int 2x\,dx=2x^2\ln x-x^2+C$.

L'àrea de la funció f(x) definida positiva entre $]e,e^2[$ és:

$\int_e^{e^2}4x\ln x\,dx=\left(2x^2\ln x-x^2\right)\Big]_e^{e^2}=3e^2-e^2\approx 156'41\,u^2$.



Problema 2

Siga $f(x)=\dfrac{x}{x^2-3x+2}$.

Calculeu la integral $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-3x+2}dx$.

Selectivitat juny 2011, Problema A3 apartat c).

Solució:
Calculem els zeros del denominador.

$x^2-3x+2=0$.

$x=1,2$. Té dues arrels reals simples:

$$\frac{x}{x^2-3x+2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}$$

$$\frac{x}{x^2-3x+2}=\frac{A(x-2)+B(x-1)}{(x-1)(x-2)}$$

Igualant els numeradors:

$x=A(x-2)+B(x-1)$.

Si $x=1$, aleshores, $1=-A$, per tant, $A=-1$.
Si $x=2$, aleshores, $2=B$.

$$\int \frac{x}{x^2-3x+2}dx=\int \frac{-1}{x-1}dx+\int \frac{2}{x-2}dx=-\ln|x-1|+2\ln|x-2|+C=\ln\left|\frac{(x-2)^2}{x-1}\right|+C.$$

Problema 3

Donades les funcions $f(x) = x^3$ i $g(x) = 2x^2 - x$, es demana:

a) Obtindre raonadament els punts d'intersecció A i B de les corbes $y = f(x)$, $y = g(x)$.

b) Demostrar que $f(x) \geq g(x)$ quan $x \geq 0$.

c) Calcular raonadament l'àrea de la superfície limitada per les dues corbes entre els punts A i B.

Selectivitat setembre 2010, Problema B3

Solució:

a)

Per trobar els punts d'intersecció resoldrem el sistema format per ambdues corbes:

$\begin{cases} y = x^3 \\ y = 2x^2 - x \end{cases}$. Resolent el sistema:

$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$. Aleshores, els punts d'intersecció són $A(0, 0)$, $B(1, 1)$.

b)

Resolent la inequació $f(x) \geq g(x)$.

$x^3 \geq 2x^2 - x$.

$x^3 - 2x^2 + x \geq 0$.

Els zeros del polinomi $x^3 - 2x^2 + x$ són $x = 0, 1$.

Estudiant els signe del polinomi en cadascun dels tres intervals que determinen els zeros, la solució de la inequació és $x \in [0, +\infty[$.

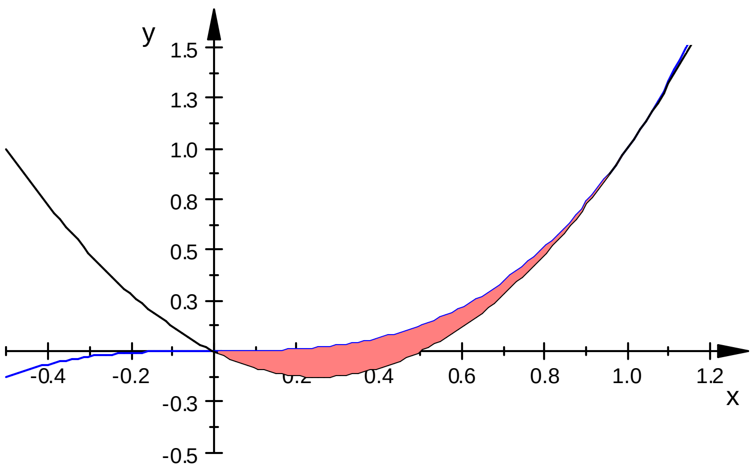
Aleshores, $f(x) \geq g(x)$ quan $x \in [0, +\infty[$.

c)

L'àrea limitada per les dues corbes entre A i B és:

$\int_0^1 (f(x) - g(x))\, dx$.

$$\int_0^1 \left(x^3 - 2x^2 + x\right)dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right)\Bigg]_0^1 = \frac{1}{12}u^2.$$



Problema 4

Considerem les funcions reals $f(x)=2x^2+12x-6$, $g(x)=(x-2)(x^2+9)$.

Obteniu raonadament:

a) Les equacions de les asímptotes a la gràfica de la funció $\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

b) La funció $H(x)=\int \dfrac{f(x)}{g(x)}dx$ que compleix $H(3)=\dfrac{\pi}{3}$.

Selectivitat setembre 2009, Problema 3.1

Solució:

a)

El domini de la funció $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ és:

$D=\{x\in R\ /\ g(x)\neq 0\}=R\sim\{2\}$. A més a més $f(2)=26\neq 0$.

Aleshores, $x=2$ és una asímptota vertical. La seua tendència és:

$\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{f(x)}{g(x)}=-\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+12x-6}{x^3-2x^2+9x-18}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3\left(\frac{2}{x}+\frac{12}{x^2}-\frac{6}{x^3}\right)}{x^3\left(1-\frac{2}{x}+\frac{9}{x^2}-\frac{18}{x^3}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{2}{x}+\frac{12}{x^2}-\frac{6}{x^3}\right)}{\left(1-\frac{2}{x}+\frac{9}{x^2}-\frac{18}{x^3}\right)}=\frac{0}{1}=0$$

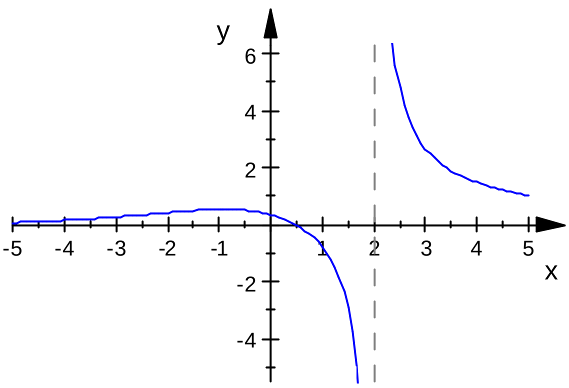
Aleshores, $y=0$ és una asímptota horitzontal quan $x\to+\infty$.

La funció va per damunt de la asímptota.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2+12x-6}{x^3-2x^2+9x-18}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3\left(\frac{2}{x}+\frac{12}{x^2}-\frac{6}{x^3}\right)}{x^3\left(1-\frac{2}{x}+\frac{9}{x^2}-\frac{18}{x^3}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\frac{2}{x}+\frac{12}{x^2}-\frac{6}{x^3}\right)}{\left(1-\frac{2}{x}+\frac{9}{x^2}-\frac{18}{x^3}\right)}=\frac{0}{1}=0$$

Aleshores, $y=0$ és una asímptota horitzontal quan $x\to-\infty$.

La funció va per damunt de la asímptota.



b)

El denominador g(x) té una arrel real $x=2$, i dues complexes simples $x=\pm i\sqrt{3}$.

Calculem la integral indefinida de la funció $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$

$\displaystyle\int\frac{2x^2+12x-6}{(x-2)(x^2+9)}dx$.

$\dfrac{2x^2+12x-6}{(x-2)(x^2+9)}=\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{Mx+N}{x^2+9}$.

$\dfrac{2x^2+12x-6}{(x-2)(x^2+9)}=\dfrac{A(x^2+9)+(x-2)(Mx+N)}{(x-2)(x^2+9)}$.

$2x^2+12x-6=(A+M)x^2+(N-M)x+9A-2N$. Igualant els coeficients del polinomi:

$\begin{cases} A + M = 2 \\ -M + N = 12 \\ 9A - 2N = -6 \end{cases}$, la solució del sistema és: $\begin{cases} A = 2 \\ M = 0 \\ N = 12 \end{cases}$.

$$\int \frac{2x^2 + 12x - 6}{(x-2)(x^2+9)}dx = \int \frac{2}{x-2}dx + \int \frac{12}{x^2+9}dx = 2\ln|x-2| + 4\int \frac{\frac{1}{3}}{\left(\frac{x}{3}\right)^2 + 1}dx = 2\ln|x-2| + 4\operatorname{arctg}\frac{x}{3} + C$$

Determinem la funció $H(x) = \int \frac{f(x)}{g(x)}dx$ que compleix $H(3) = \frac{\pi}{3}$.

$H(3) = 2\ln(1) + 4\operatorname{arctg}1 + C = \frac{\pi}{3}$

$4\frac{\pi}{4} + C = \frac{\pi}{3}$. Resolent l'equació:

$C = \frac{-2\pi}{3}$.

$H(x) = 2\ln|x-2| + 4\operatorname{arctg}\frac{x}{3} + C = 2\ln|x-2| + 4\operatorname{arctg}\frac{x}{3} - \frac{2\pi}{3}$.

Problema 5

a) Determinar, raonadament, el domini i els intervals de creixement i decreixement de la funció: $f(x)=\dfrac{1}{(3-x)(3+x)}$.

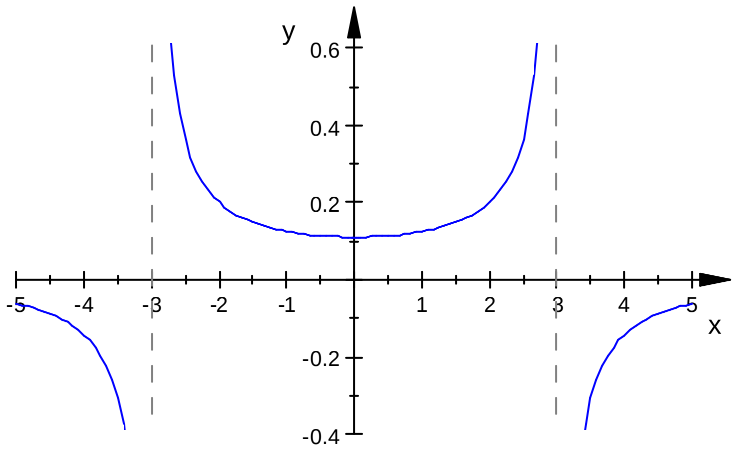
b) Obtindre, raonadament, els valors A, B tals que $\dfrac{1}{(3-x)(3+x)}=\dfrac{A}{3-x}+\dfrac{B}{3+x}$

c) Calcular, raonadament, l'àrea de la superfície limitada per la corba $f(x)=\dfrac{1}{(3-x)(3+x)}$, l'eix OX i les rectes $x=-2$, $x=2$

Selectivitat juny 2009, Problema 3.1

Solució:

a)



El domini de la funció $f(x)=\dfrac{1}{(3-x)(3+x)}$ és:

$D=\{x\in R\,/\,(3-x)(3+x)\neq 0\}=R\sim\{-3,3\}$.

$f'(x)=\dfrac{2x}{(3-x)^2(3+x)^2}$.

$f'(x)>0$.

Els zeros del numerador i denominador són $x=-3,0,3$.

Estudiant el signe de la primera derivada en els 4 intervals que determinen els zeros, la funció és estrictament creixent en:

$]0,+\infty[\sim\{3\}$.

La funció és estrictament decreixent en:

$]-\infty,0[\sim\{-3\}$.

b)

$$\frac{1}{(3-x)(3+x)}=\frac{A}{3-x}+\frac{B}{3+x}=\frac{A(3+x)+B(3-x)}{(3-x)(3+x)}.$$

Igualant els numeradors:

$1=A(3+x)+B(3-x)$. Calculant els valors del polinomi per a $x=-3,3$

$\begin{cases}6B=1\\6A=1\end{cases}$. Resolent el sistema: $\begin{cases}A=\dfrac{1}{6}\\[2mm] B=\dfrac{1}{6}\end{cases}$.

c)
La funció és contínua en $x \in [-2, 2]$.

$f(0) = \dfrac{1}{(3-1)(3+1)} = \dfrac{1}{8}$.

Com que la funció és decreixent en $[-2, 0[$ i creixent en $]0, 2]$.

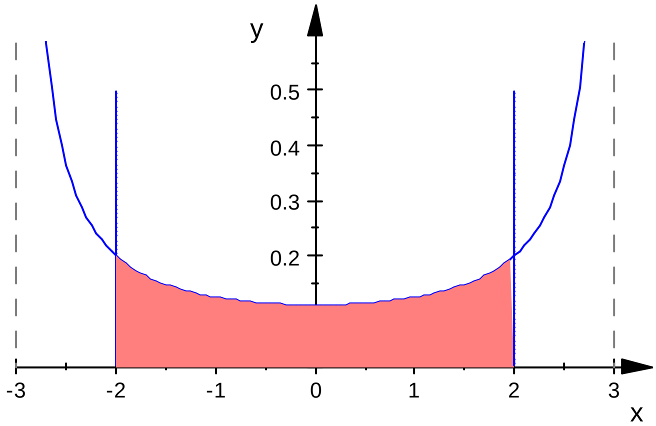
$f(x) > 0$ quan $x \in [-2, 2]$.

L'àrea de la superfície limitada per la corba $f(x) = \dfrac{1}{(3-x)(3+x)}$, l'eix OX i les rectes $x = -2$, $x = 2$ és:

$$\int_{-2}^{2} \frac{1}{(3-x)(3+x)} dx .$$

$$\int \frac{1}{(3-x)(3+x)} = \int \frac{\frac{1}{6}}{3-x} dx + \int \frac{\frac{1}{6}}{3+x} dx = \frac{-1}{6} \ln|3-x| + \frac{1}{6} \ln|3+x| + C$$

$$\int_{-2}^{2} \frac{1}{(3-x)(3+x)} dx = \left[\left(\frac{-1}{6} \ln|3-x| + \frac{1}{6} \ln|3+x| \right) \right]_{-2}^{2} = \frac{1}{6} \ln 5 + \frac{1}{6} \ln 5 = \frac{1}{3} \ln 5 \approx 0'54 \text{ u}^2 .$$



Problema 6
Atesa la funció $f(t)=at+b$ (amb ai b constants reals).

Es defineix $F(x)=x\int_1^{x+1} f(t)dt$. Obteniu raonadament:

a) $\int_1^{x+1} f(t)dt$.

b) L'expressió de la derivada $F'(x)$ de la funció de F(x).

c) La relació entre els valors a i b per als quals es verifica: $F''(0)=0$.

Selectivitat setembre 2008, Problema 3.1

Solució:

a)

$$\int_1^{x+1} f(t)dt=\int_1^{x+1}(at+b)\,dt=\left(\frac{a}{2}t^2+bt\right)\Big]_1^{x+1}=\frac{a}{2}(x+1)^2+b(x+1)-\frac{a}{2}-b.$$

b)

$$F(x)=x\int_1^{x+1} f(t)dt=x\left(\frac{a}{2}(x+1)^2+b(x+1)-\frac{a}{2}-b\right)=\frac{a}{2}x^3+(a+b)x^2.$$

$$F'(x)=\frac{3a}{2}x^2+2(a+b)x.$$

c)

$F''(x)=3ax+2(a+b)$.

Per a que $F''(0)=0$:

$3a\cdot 0+2(a+b)=0$. Simplificant:

$a+b=0$.

Problema 7

Per a cada nombre real α , es considera la funció $g(x) = x^2 + \alpha$.
Es demana que calculeu raonadament:
a) L'àrea de la regió limitada per l'eix OX, l'eix OY, la recta $x = \sqrt{6}$ i la corba $y = g(x)$.
b) El valor α per al qual la corba $g(x) = x^2 + \alpha$ divideix el rectangle de vèrtexs $(0, 0)$, $\left(\sqrt{6}, 0\right)$, $\left(\sqrt{6}, 6+\alpha\right)$, $(0, 6+\alpha)$ en dues regions d'igual àrea.
Selectivitat setembre 2008, Problema 3.2

Solució:
a)
La funció $y = g(x)$ és contínua en $\left[0, \sqrt{6}\right]$.
L'àrea que cerquem és:

$$S = \int_0^{\sqrt{6}} \left(x^2 + \alpha\right) dx = \left[\left(\frac{x^3}{3} + \alpha x\right)\right]_0^{\sqrt{6}} = (2+\alpha)\sqrt{6} .$$

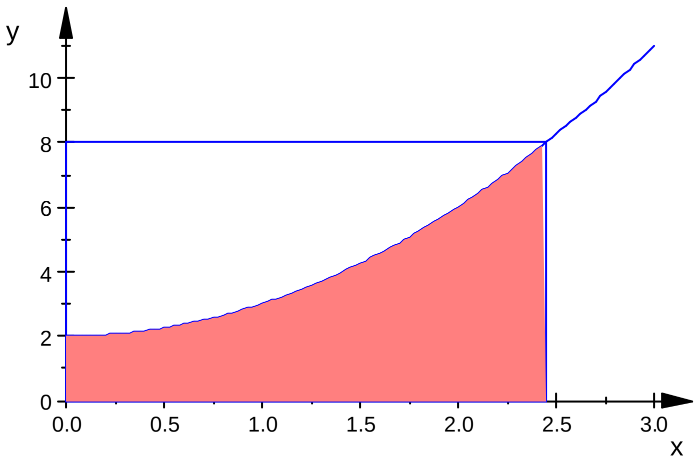
b)
L'àrea del rectangle de vèrtexs $A(0, 0)$, $B\left(\sqrt{6}, 0\right)$, $C\left(\sqrt{6}, 6+\alpha\right)$, $D(0, 6+\alpha)$ és:

$$S_{ABCD} = \overline{AB} \cdot \overline{AC} = \sqrt{6}(6+\alpha).$$

$$S = \frac{1}{2} S_{ABCD} .$$

$$(2+\alpha)\sqrt{6} = \frac{1}{2}\sqrt{6}(6+\alpha) .$$

Resolent l'equació:
$\alpha = 2$.



Problema 8

Es considera, en el primer quadrant la regió R del plànol limitada per l'eix OX, l'eix OY, la recta $x = 2$ i la corba $y = \frac{1}{4+x^2}$.

a) Calculeu raonadament l'àrea de la regió R.

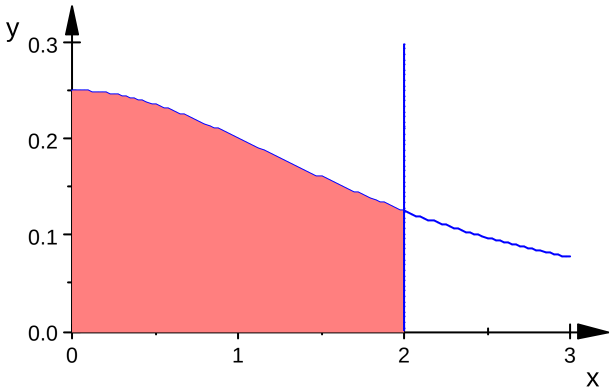
b) Trobeu el valor α perquè la recta $x = \alpha$ dividesca la regió R en dues parts A (esquerra) i B (dreta) tals que l'àrea de A siga el doble que la de B.

Selectivitat juny 2008, Problema 3.1

Solució:

a)

$$S = \int_0^2 \frac{1}{4+x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{\frac{1}{2}}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}dx = \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)\Bigg]_0^2 = \frac{\pi}{8}.$$



b)

La superfície de A és la tercera part de S.

$$\int_0^\alpha \frac{1}{4+x^2}dx = \frac{1}{3}\frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{24}.$$

$$\int_0^\alpha \frac{1}{4+x^2}dx = \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)\Bigg]_0^\alpha = \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{\alpha}{2}.$$

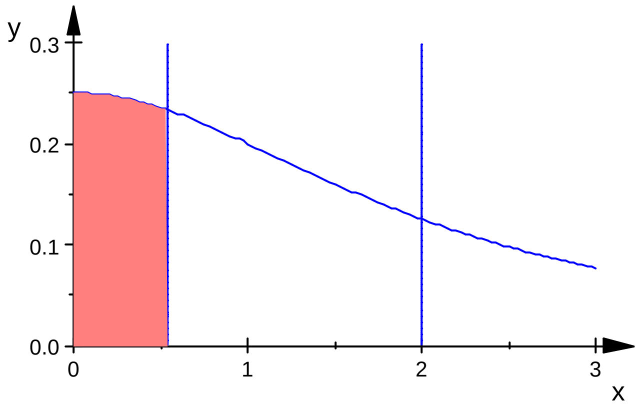
$$\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{24}.$$

$$\mathrm{arctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{12}.$$

$$\frac{\alpha}{2} = \mathrm{tg}\frac{\pi}{12}.$$

$$\alpha = 2\cdot\mathrm{tg}\frac{\pi}{12}$$

$$\alpha \approx 0'54.$$



Problema 9

Ateses les funcions reals $f(x)=4x^2+2x+10$ i $g(x)=x^3+x^2+5x+5$, es demana el següent:

a) Determineu les equacions de les asímptotes a la gràfica de la funció $\frac{f(x)}{g(x)}$.

b) Calculeu la funció $H(x)=\int\frac{f(x)}{g(x)}dx$ que compleix que $H(0)=0$.

Selectivitat setembre 2007, Problema 3.1

Solució:

$x^3+x^2+5x+5=0$.

La solució és: $x=-1$, $g(x)=x^3+x^2+5x+5=(x+1)(x^2+5)$.

El domini de la funció $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ és:

$D=\{x\in R\,/\,g(x)\neq 0\}=R\sim\{-1\}$. A més a més $f(-1)=12\neq 0$.

Aleshores, $x=-1$ és una asímptota vertical. La seua tendència és:

$$\lim_{x\to -1^+}\frac{f(x)}{g(x)}=+\infty,\quad \lim_{x\to -1^-}\frac{f(x)}{g(x)}=-\infty.$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2+2x+10}{x^3+x^2+5x+5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3\left(\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{10}{x^3}\right)}{x^3\left(1+\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}+\frac{58}{x^3}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{10}{x^3}\right)}{\left(1+\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}+\frac{5}{x^3}\right)}=\frac{0}{1}=0$$

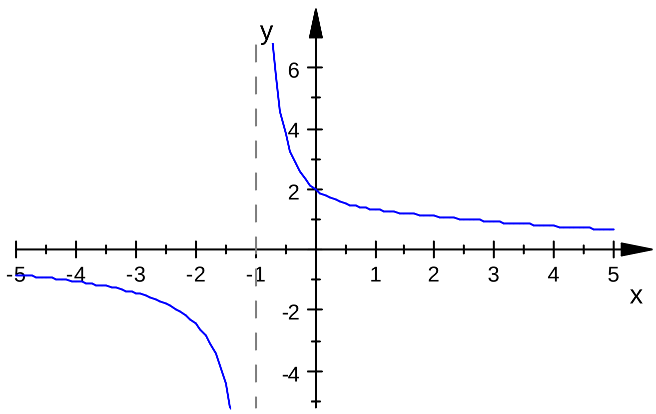
Aleshores, $y=0$ és una asímptota horitzontal quan $x\to+\infty$.

La funció va per damunt de la asímptota.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2+2x+10}{x^3+x^2+5x+5}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3\left(\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{10}{x^3}\right)}{x^3\left(1+\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}+\frac{58}{x^3}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{10}{x^3}\right)}{\left(1+\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}+\frac{5}{x^3}\right)}=\frac{0}{1}=0$$

Aleshores, $y=0$ és una asímptota horitzontal quan $x\to-\infty$.

La funció va sota la asímptota.



b)

El denominador g(x) té una arrel real $x=-1$. I dues complexes simples $x=\pm i\sqrt{5}$.

Calculem la integral indefinida de la funció $y=\frac{f(x)}{g(x)}$

$$\int\frac{4x^2+2x+10}{(x+1)(x^2+5)}dx$$

$$\frac{4x^2+2x+10}{(x+1)(x^2+5)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Mx+N}{x^2+5}$$

$$\frac{4x^2+2x+10}{(x+1)(x^2+5)}=\frac{A(x^2+5)+(x+1)(Mx+N)}{(x+1)(x^2+5)}$$

$4x^2 + 2x + 10 = (A + M)x^2 + (N + M)x + 5A + N$. Igualant els coeficients del polinomi:

$\begin{cases} A + M = 4 \\ M + N = 2 \\ 5A + N = -6 \end{cases}$, la solució del sistema és: $\begin{cases} A = 2 \\ M = 2 \\ N = 0 \end{cases}$.

$$\int \frac{4x^2 + 2x + 10}{(x+1)(x^2+5)} dx = \int \frac{2}{x+1} dx + \int \frac{2x}{x^2+5} dx = 2\ln|x+1| + \ln|x^2+5| + C.$$

Determinem la funció $H(x) = \int \frac{f(x)}{g(x)} dx$ que compleix $H(0) = 0$.

$H(0) = 2\ln(1) + \ln(5) + C = 0$

$C = -\ln 5$.

$H(x) = 2\ln|x+1| + \ln|x^2+5| - \ln 5$.

Problema 10

Es consideren les funcions reals $f(x)=12x^3-8x^2+9x-5$ i $g(x)=6x^2-7x+2$, es demana el següent:

a) Determineu les equacions de les asímptotes a la gràfica de la funció $\frac{f(x)}{g(x)}$.

b) Calculeu la funció $H(x)=\int\frac{f(x)}{g(x)}dx$ que compleix que $H(1)=1$.

Selectivitat setembre 2007, Problema 3.1

Solució:

$6x^2-7x+2=0$.

Les solucions són: $x=\frac{1}{2},\frac{2}{3}$, $g(x)=6x^2-7x+2=6\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)=(2x-1)(3x-2)$.

El domini de la funció $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ és:

$D=\{x\in R\,/\,g(x)\neq 0\}=R\sim\left\{\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right\}$.

A més a més $f\left(\frac{1}{2}\right)=-1\neq 0$, $f\left(\frac{2}{3}\right)=-1\neq 0$

$x=\frac{1}{2}$ és una asímptota vertical. La seua tendència és:

$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+}\frac{f(x)}{g(x)}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-}\frac{f(x)}{g(x)}=-\infty$.

Aleshores, $x=\frac{2}{3}$ és una asímptota vertical la seua tendència és:

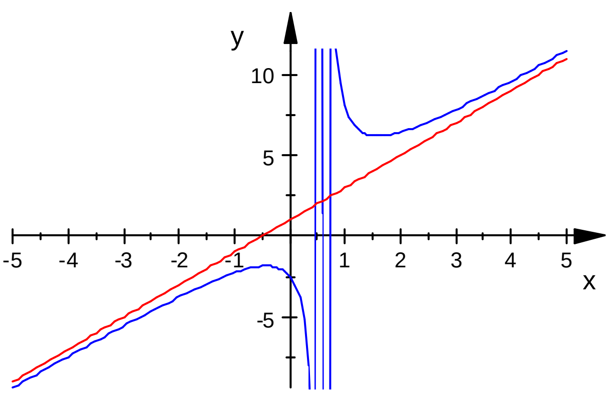
$\lim\limits_{x\to\frac{2}{3}^+}\frac{f(x)}{g(x)}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to\frac{2}{3}^-}\frac{f(x)}{g(x)}=-\infty$.

La gràfica té dues asímptotes obliqües ja que és una funció racional i el grau del numerador és 1 major que el grau del denominador.

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{f(x)}{g(x)}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{12x^3-8x^2+9x-5}{6x^3-7x^2+2x}=2.$$

$$n=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}-2x=\lim_{x\to+\infty}\frac{6x^2+5x-5}{6x^2-7x+2}=1.$$

Aleshores, la asímptota obliqua quan $x\to+\infty$ té equació:
$y=2x+1$
La corba va per damunt de la asímptota.
Anàlogament, la asímptota obliqua quan $x\to-\infty$ té equació:
$y=2x+1$
La corba va per sota la asímptota.



b)
Efectuant la divisíó f(x):g(x) tenim que:

$$\frac{12x^3-8x^2+9x-5}{6x^2-7x+2}=2x+1+\frac{12x-7}{6x^2-7x+2}.$$

$$\frac{12x-7}{6x^2-7x+2}=\frac{A}{2x-1}+\frac{B}{3x-2}.$$

$\frac{12x-7}{6x^2-7x+2}=\frac{A(3x-2)+B(2x-1)}{2x-1}$. Igualant els numeradors:

$12x-7=A(3x-2)+B(2x-1)$

Calculant els valors del polinomi per a $x=\frac{1}{2},\frac{2}{3}$

$\begin{cases}\frac{-1}{2}A=-1\\ \frac{1}{3}B=1\end{cases}$. Resolent el sistema: $\begin{cases}A=2\\ B=3\end{cases}$.

$$\int\frac{12x^3-8x^2+9x-5}{6x^2-7x+2}dx=\int\left(2x+1+\frac{2}{2x-1}+\frac{3}{3x-2}\right)dx=x^2+x+\ln|2x-1|+\ln|3x-2|+C$$

Determinem la funció $H(x)=\int\frac{f(x)}{g(x)}dx$ que compleix $H(1)=1$.

$H(1)=1^2+1+2\ln(1)+\ln(1)+C=1$

$C=-1$.

Aleshores:

$H(x)=x^2+x+\ln|2x-1|+\ln|3x-2|-1$.

Problema 11

Donades les funcions reals $f(x) = x^3 - 3x + 8$ i $g(x) = -3x$, es demana:

a) Calculeu el màxim absolut de la funció f(x) en l'interval $[-3, 0]$.

b) Calculeu el punt de tall de la corba $y = f(x)$ i la recta $y = g(x)$.

Obteniu l'àrea del recinte limitat per la corba $y = f(x)$ i les rectes $y = g(x)$, $x = -3$, $x = 0$.

Selectivitat setembre 2006, Problema 3.A.

Solució:

La funció f(x) és contínua i derivable en tots els nombres reals.

$f'(x) = 3x^2 - 3$

Estudiem la primera derivada en l'interval $[-3, 0]$ s'anul·la.

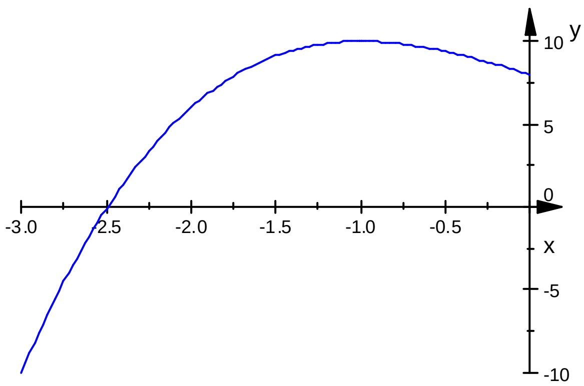
$f'(x) = 0$.

$x = -1$.

$-1 \in]-3, 0[$.

$f''(x) = 6x$

$f''(-1) = -6 < 0$, aleshores, $x = -1$ és un màxim relatiu estricte.



El màxim absolut o bé és el relatiu o bé algun dels extrems de l'interval $[-3, 0]$:

$f(-1) = 10$

$f(0) = 8$.

$f(-3) = -10$.

Aleshores, el màxim absolut s'assoleix en el punt $(-1, 10)$

b)

Per determinar el punt de tall resoldrem el sistema format per les dues funcions:

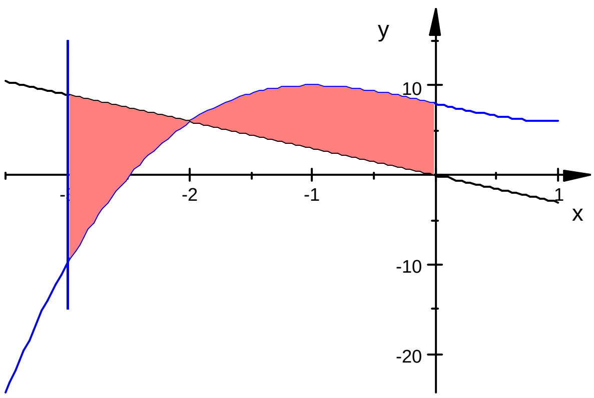
$\begin{cases} y = x^3 - 3x + 8 \\ y = -3x \end{cases}$. $x^3 + 8 = 0$.

L'única solució és $x = -2 \in [-3, 0]$.

$f(x) - g(x) = x^3 + 8$.

L'àrea del recinte és: $S = \left|\int_{-3}^{-2}(f(x) - g(x))dx\right| + \left|\int_{-2}^{0}(f(x) - g(x))dx\right|$.

$$S = \left|\int_{-3}^{-2}(x^3 + 8)dx\right| + \left|\int_{-2}^{0}(x^3 + 8)dx\right| = \left|\left[\left(\frac{x^4}{4} + 8x\right)\right]_{-3}^{-2}\right| + \left|\left[\left(\frac{x^4}{4} + 8x\right)\right]_{-2}^{0}\right| = \frac{81}{4}u^2.$$



Problema 12

a) Calculeu raonadament la integral següent: $\int \frac{4x+11}{(x+1)^2+1}dx$.

b) Calculeu $\int_0^{\sqrt{3}-1} \frac{4x+11}{(x+1)^2+1}dx$.

Selectivitat setembre 2004, Problema 3.B.

Solució:

a)

El denominador de dues reals complexes simples.

$$\frac{4x+11}{(x+1)^2+1} = \frac{2(2(x+1))}{(x+1)^2+1} + \frac{7}{(x+1)^2+1}$$

$$\int \frac{4x+11}{(x+1)^2+1}dx = 2\int \frac{2x+1}{(x+1)^2+1}dx + 7\int \frac{7}{(x+1)^2+1}dx = 2\ln\left|(x+1)^2+1\right| + 7\text{arctg}(x+1) + C.$$

b)

$$\int_0^{\sqrt{3}-1} \frac{4x+11}{(x+1)^2+1}dx$$

$$= \left(2\ln\left|(x+1)^2+1\right| + 7\text{arctg}(x+1)\right)\Big]_0^{\sqrt{3}-1} = \ln(4) + \frac{7\pi}{12}.$$

Problema 13

Donades les corbes $y=(x-1)^3$, $y=5-x^2$. Calculeu raonadament:

a) El punt de tall de les dues corbes.

b) L'àrea de la superfície limitada per les dues corbes i l'eix OY.

Selectivitat juny 2005, Problema 3.A.

Solució:

El punt d'intersecció és la solució del sistema format per les dues corbes.

$$\begin{cases} y=(x-1)^3 \\ y=5-x^2 \end{cases}.$$

$(x-1)^3=5-x^2$.

$x^3-2x^2+3x-6=0$.

Aplicant la regla de Ruffini:

$x^3-2x^2+3x-6=(x-2)\left(x^2-3\right)=0$.

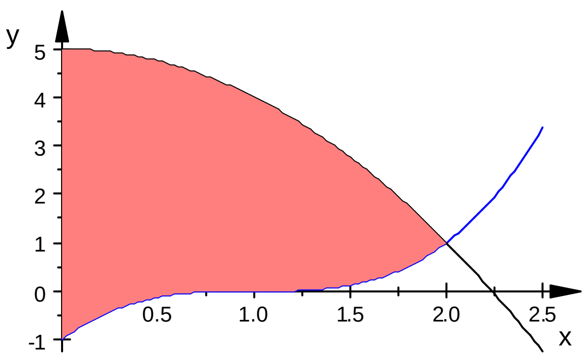
La solució de l'equació és:

$x=2$.

L'àrea limitada de la superfície limitada per les dues corbes i l'eix OY és:

$$S=\left|\int_0^2\left((x-1)^3-\left(5-x^2\right)\right)dx\right|$$

$$S=\left|\int_0^2\left(x^3-2x^2+3x-6\right)dx\right|=\left|\left(\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}-6x\right)_0^2\right|=\frac{22}{3}u^2 .$$



Problema 14

Calculeu tots els valors z reals de manera que $\int_0^z \frac{-16}{x^2-2x-15}dx = \ln 25$.

Selectivitat juny 2004, Problema 3.B.

Solució:

Calculem els zeros del denominador $x^2-2x-15=0$.

$x=-3, 5$.

La funció $y=\frac{-16}{x^2-2x-15}$ és contínua $[0, z]$, $0<z<5$.

Calculem la integral indefinida $\int \frac{-16}{x^2-2x-15}dx$.

$\frac{-16}{x^2-2x-15} = \frac{A}{x+3}+\frac{B}{x-5}$.

$\frac{-16}{x^2-2x-15} = \frac{A(x-5)+B(x+3)}{(x+3)(x-5)}$. Igualant els numeradors:

$-16 = A(x-5)+B(x+3)$.

Calculant els valors del polinomi per a $x=-3, 5$

$\begin{cases} -8A=-16 \\ 8B=-16 \end{cases}$. Resolent el sistema: $\begin{cases} A=2 \\ B=-2 \end{cases}$.

$$\int \frac{-16}{x^2-2x-15}dx = 2\int \frac{1}{x+3}dx - 2\int \frac{1}{x-5}dx = 2\ln|x+3| - 2\ln|x-5| + C = \ln\left(\frac{x+3}{x-5}\right)^2 + C.$$

$$\int_0^z \frac{-16}{x^2-2x-15}dx = \ln\left(\frac{x+3}{x-5}\right)^2\Bigg]_0^z = \ln\left(\frac{z-3}{z-5}\right)^2 - \ln\frac{9}{25}.$$

$$\int_0^z \frac{-16}{x^2-2x-15}dx = \ln 25$$

$$\ln\left(\frac{z-3}{z-5}\right)^2 - \ln\frac{9}{25} = \ln 25$$

$$\ln\left(\frac{z-3}{z-5}\right)^2 = \ln 9.$$

$$\left(\frac{z-3}{z-5}\right)^2 = 9.$$

$$\frac{z-3}{z-5} = \pm 3.$$

Si $\frac{z-3}{z-5}=3$, $z=6 \notin \left]0, 5\right[$.

Si $\frac{z-3}{z-5}=-3$, $z=3 \in \left]0, 5\right[$. Si $z=6$ la funció $y=\frac{-16}{x^2-2x-15}$ no és integrable Riemann en $[0, 6]$

Aleshores, l'única solució és $z=3$.