

Calculeu les següents integrals definides.

$$\int_1^4 2 \, dx$$

$$\int_{-1}^2 (x+2) \, dx$$

$$\int_1^2 x^2 \, dx$$

$$\int_2^4 (x^2 - 4) \, dx$$

$$\int_{-1}^1 (1 - x^2) \, dx$$

$$\int_{-1}^1 (x+2)^5 \, dx$$

$$\int_0^\pi \sin x \, dx$$

$$\int_0^1 e^x \, dx$$

$$\int_{-1}^1 2^x \, dx$$

$$\int_1^e \frac{1}{x} \, dx$$

$$\int_3^6 \sqrt{x-2} \, dx$$

$$\int_1^3 \frac{1}{x^2} \, dx$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} \, dx$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$$

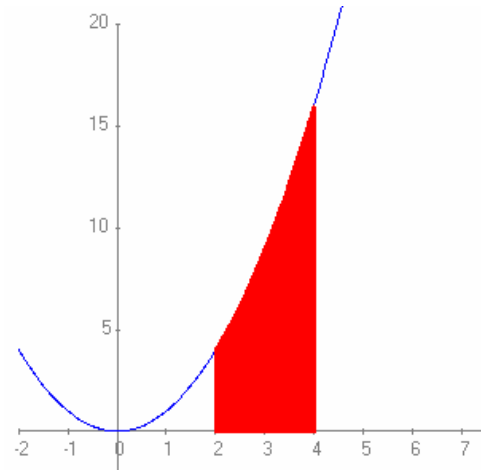
Problema:

Calculeu l'àrea limitada per la paràbola d'equació $f(x) = x^2$ l'eix d'abscisses i les rectes $x = 2$, $x = 4$.

Solució:

La funció és positiva en aquest interval. L'àrea és la integral definida de la funció $f(x) = x^2$ en l'interval $[2,4]$:

$$\int_2^4 x^2 dx = \left(\frac{x^3}{3} \right) \Big|_2^4 = \frac{64}{3} - \frac{8}{3} = \frac{56}{3} u^2.$$



Problemes de càlcul d'àrees

Problema

Calculeu l'àrea limitada per la corba $f(x) = x^4 - 2x^3 + 2$, l'eix d'abscisses i les rectes $x = -1$, $x = 2$.

Problema

Calculeu l'àrea limitada per la corba $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$ i l'eix d'abscisses.

Problema

Calculeu l'àrea limitada per la corba $f(x) = \cos x$, l'eix d'abscisses en l'interval $[0, 2\pi]$

Problema

Calculeu l'àrea limitada per les gràfiques de les funcions $f(x) = x^2 + x + 1$, $g(x) = x + 2$

Problema

Calculeu l'àrea del cercle de radi R .

Problema

Calculeu l'àrea afitada per les corbes $f(x) = \frac{x^3}{4}$ i $g(x) = x$.

Problema

Calculeu l'àrea limitada per les corbes $y = x^2$ i $y = \sqrt{x}$

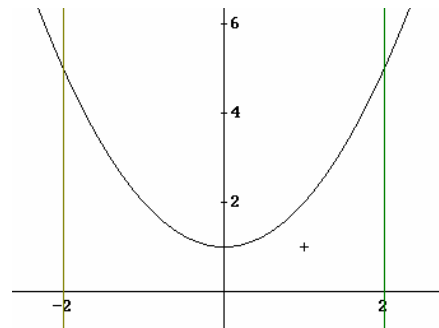
Problema

Calculeu el volum de revolució de la corba $y = x^2 + 1$ al girar 360° sobre l'eix d'abscisses en l'interval $]-2,2[$

Solució:

El volum de revolució és:

$$V = \pi \int_{-2}^2 (x^2 + 1)^2 dx = \pi \int_{-2}^2 (x^4 + 2x^2 + 1) dx = \pi \left(\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x \right) \Big|_{-2}^2 = \\ = \frac{412\pi}{15} u^3$$



Problemes de càlcul de volums

Problema

Calculeu el volum de revolució de la funció $f(x) = x$ al girar 360° sobre l'eix d'abscisses en l'interval $[2,4]$. Quin és el cos resultant.

Problema

Determineu el volum de revolució de la regió afitada per la funció $f(x) = \sqrt{x}$ i la recta $x = 4$ al girar 360° sobre l'eix d'abscisses.

Problema

Determineu el volum de l'el·lipsoide de revolució

de l'el·lipse $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ al girar 360° sobre l'eix d'abscisses.

Problema

Calculeu el volum de revolució de la funció $y = xe^x$ al girar 360° sobre l'eix d'abscisses en l'interval $[0,1]$. Quin és el cos resultant.

Problema

Calculeu el volum del cilindre de radi R i altura h.

Problema

Calculeu el volum de l'esfera de radi R.

Problema

Calculeu el volum del con de radi de la base R i altura h.

Solucions

Calculeu les següents integrals definides.

$$\int_1^4 2 \, dx = 6 \quad \int_{-1}^2 (x+2) \, dx = \frac{15}{2} \quad \int_1^2 x^2 \, dx \quad \int_2^4 (x^2 - 4) \, dx = \frac{32}{3} \quad \int_{-1}^1 (1-x^2) \, dx = \frac{4}{3}$$
$$\int_{-1}^1 (x+2)^5 \, dx = \frac{364}{3} \quad \int_0^\pi \sin x \, dx = 2 \quad \int_0^1 e^x \, dx = e - 1 \quad \int_{-1}^1 2^x \, dx = \frac{3}{2 \cdot \ln 2} \quad \int_1^e \frac{1}{x} \, dx = 1$$
$$\int_3^6 \sqrt{x-2} \, dx = \frac{14}{3} \quad \int_1^3 \frac{1}{x^2} \, dx = \frac{2}{3} \quad \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} \, dx = \frac{\pi}{4} \quad \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \frac{\pi}{6}$$

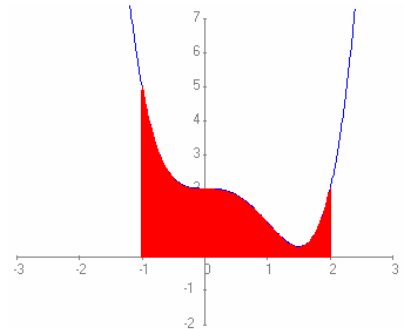
Problemes de càlcul d'àrees

Problema

Calculeu l'àrea limitada per la corba $f(x) = x^4 - 2x^3 + 2$, l'eix d'abscisses i les rectes $x = -1$, $x = 2$.

Solució:

$$S = \int_{-1}^2 (x^4 - 2x^3 + 2) \, dx = \frac{51}{10} u^2.$$

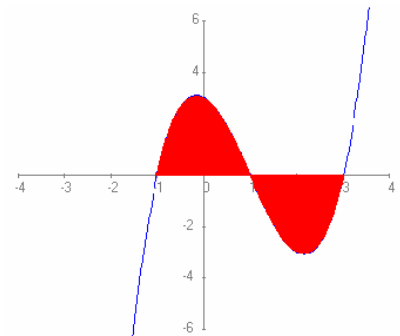


Problema

Calculeu l'àrea limitada per la corba $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$ i l'eix d'abscisses.

Solució:

$$S = \int_{-1}^1 (x^3 - 3x^2 - x + 3) \, dx - \int_1^2 (x^3 - 3x^2 - x + 3) \, dx = 8u^2$$

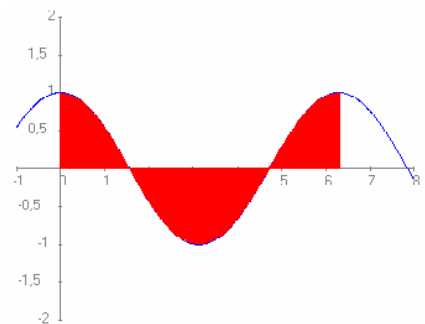


Problema

Calculeu l'àrea limitada per la corba $f(x) = \cos x$, l'eix d'abscisses en l'interval $[0, 2\pi]$

Solució:

$$S = 4 \int_0^{\pi/2} \cos x \, dx = 4u^2$$

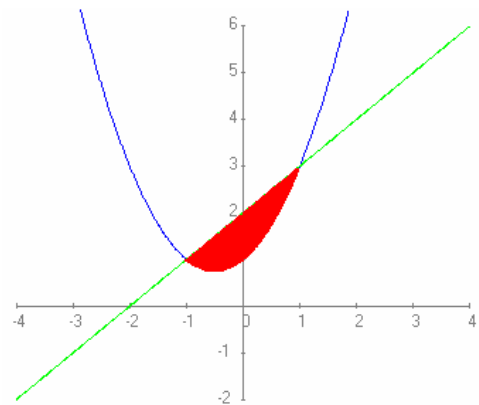


Problema

Calculeu l'àrea limitada per les gràfiques de les funcions $f(x) = x^2 + x + 1$, $g(x) = x + 2$

Solució:

$$S = \int_{-1}^1 ((x+2) - (x^2 + x + 1)) dx = \frac{4}{3} u^2$$

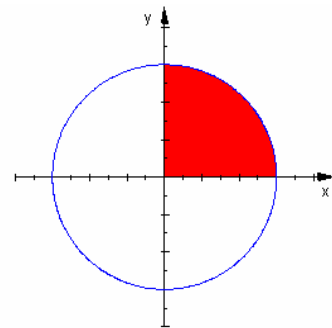


Problema

Calculeu l'àrea del cercle de radi R.

Solució:

$$S = 4 \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} dx = \pi R^2$$

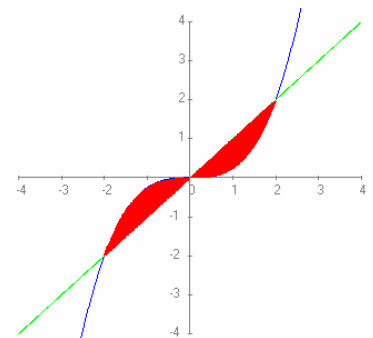


Problema

Calculeu l'àrea afitada per les corbes $f(x) = \frac{x^3}{4}$ i $g(x) = x$.

Solució:

$$S = 2 \int_0^2 \left(x - \frac{x^3}{4} \right) dx = 2u^2$$

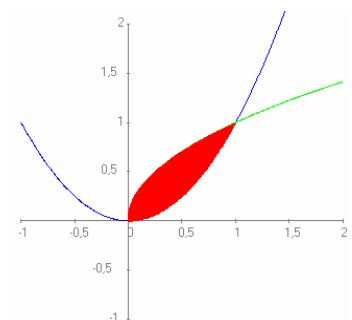


Problema

Calculeu l'àrea limitada per les corbes $y = x^2$ i $y = \sqrt{x}$

Solució:

$$S = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \frac{1}{3} u^2$$



Problemes de càlcul de volums

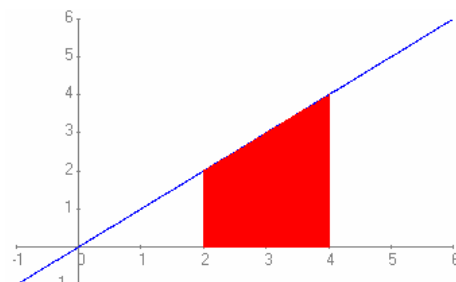
Problema

Calculeu el volum de revolució de la funció $f(x) = x$ al girar 360° sobre l'eix d'abscisses en l'interval $[2,4]$. Quin és el cos resultant.

Solució:

$$V = \pi \int_2^4 x^2 dx = \frac{56\pi}{3} u^3$$

El cos resultant és un tron de con de radis 4 i 2 i altura 2.

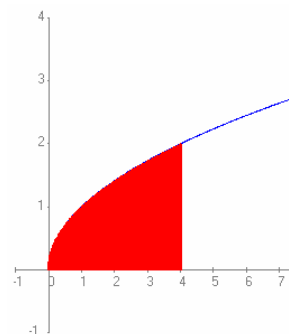


Problema

Determineu el volum de revolució de la regió afitada per la funció $f(x) = \sqrt{x}$ i la recta $x = 4$ al girar 360° sobre l'eix d'abscisses.

Solució:

$$V = \pi \int_0^4 (\sqrt{x})^2 dx = 8\pi u^3$$

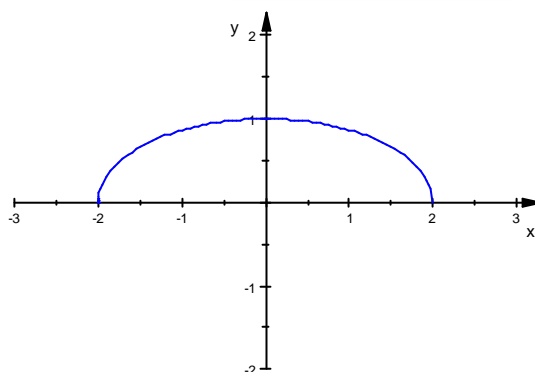


Problema

Determineu el volum de l'el·lipsoide de revolució de l'el·lipse $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ al girar 360° sobre l'eix d'abscisses.

Solució:

$$V = \pi \int_{-2}^2 \left(1 - \frac{x^2}{4}\right) dx = \frac{8}{3}\pi u^3$$

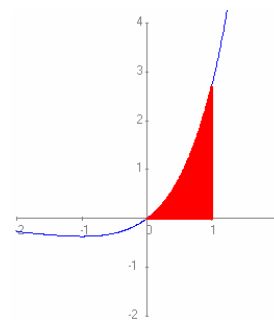


Problema

Calculeu el volum de revolució de la funció $y = xe^x$ al girar 360° sobre l'eix d'abscisses en l'interval $[0,1]$. Quin és el cos resultant.

Solució:

$$V = \pi \int_0^1 (xe^x)^2 dx = \frac{e^2 - 1}{4}\pi u^3$$

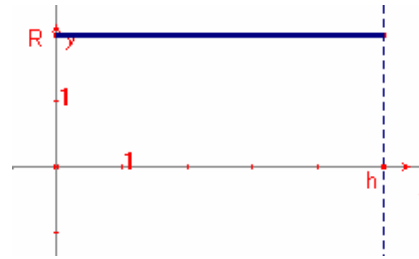


Problema

Calculeu el volum del cilindre de radi R i altura h.

Solució:

$$V = \pi \int_0^h R^2 dx = \pi R^2 h$$

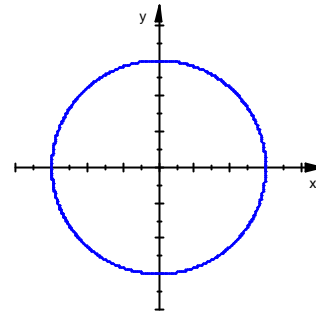


Problema

Calculeu el volum de l'esfera de radi R.

Solució:

$$V = 2\pi \int_0^R (R^2 - x^2) dx = \frac{4\pi R^3}{3}$$



Problema

Calculeu el volum del con de radi de la base R i altura h.

Solució:

La recta és $y = -\frac{R}{h}x + R$

$$V = \pi \int_0^h \left(\frac{R}{h}x + R \right)^2 dx = \frac{\pi R^2 h}{3}$$

