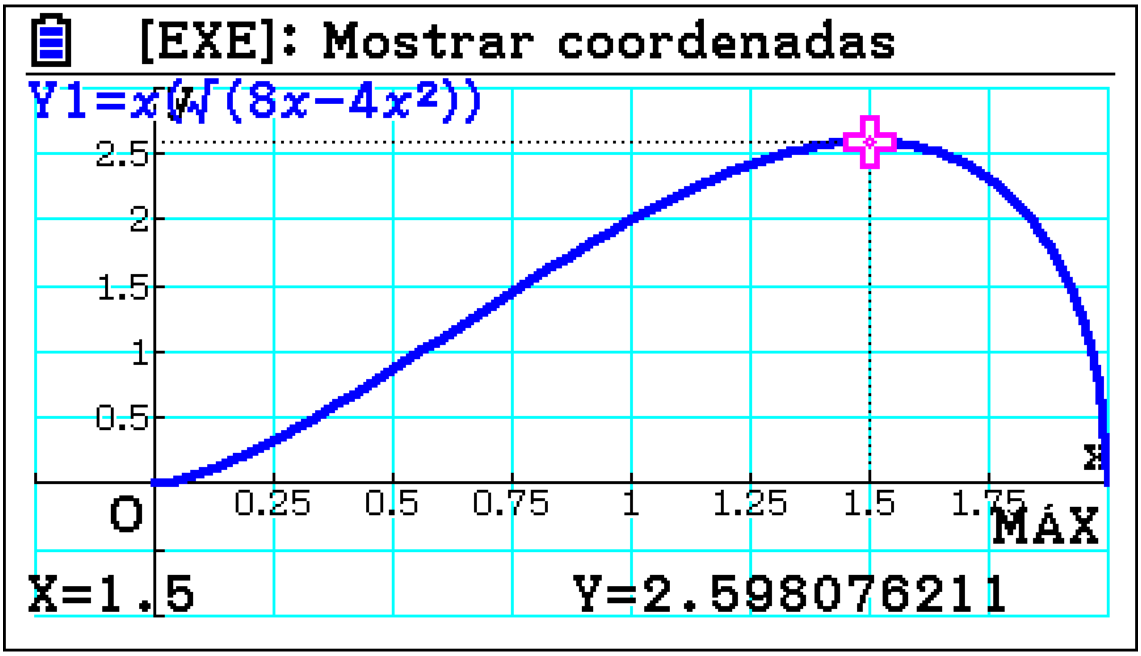
Problemes d'optimització amb CG50



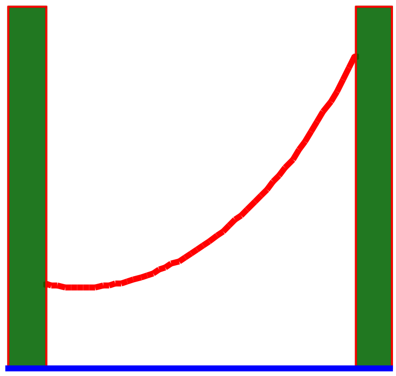
Ricard Peiró i Estruch

Enunciats

Problema 1
Dins d’una cartolina rectangular es desitja fer un dibuix que ocupe un rectangle R de $600\ \text{cm}^2$ d’àrea de manera que:
Per damunt i per sota de R han de quedar uns marges de 3 cm d’altura cadascun. Els marges a esquerra i a dreta de R han de tenir una amplària de 2 cm cadascun.
Obteniu raonadament, escrivint tots els passos de raonament utilitzat:
a) L’àrea de la cartolina en funció de la base x del rectangle R.
b) El valor de x per al qual l’àrea de la cartolina és mínima.
c) Les dimensions de dita cartolina d’àrea mínima.
Pau’s València Juliol 2018.

Problema 2
Una cadena de metall està subjectada sobre dos murs que disten entre ells 2 metres
La funció altura és $h(x) = e^{-2x} + e^x$ on $0 \le x \le 2$, on x és la distància d’un punt del terra al mur de l’esquerra.

a) Calculeu a quina altura està penjada la cadena de cada mur.
b) Calculeu quina és la altura mínima de la cadena al terra.


2 metres

Problema 3
Donada la funció $y = x^2 \cdot \sin x$, $x \in [-1, 4]$, determineu gràficament,

a) Els punts de tall amb l’eix d’abscisses.
b) El màxim de la funció.

Problema 4
La derivada de la funció $f(x)$ ve donada per $f'(x) = e^x + x - 5$
El punt $(1, e-2)$ pertany a la gràfica de $f(x)$

a) Comproveu que $f(x) = e^x + \frac{1}{2}x^2 - 5x + 2.5$
b) Dibuixeu aproximadament la gràfica de $y = f(x)$ per a $-3 < x < 3$
c) Determineu el valor mínim de $f(x)$
d) Determineu l’àrea afitada per la gràfica $y = f(x)$, els eixos de coordenades i la recta $x = 2$

Problema 5
El desplaçament d’una partícula ve definit per la funció $s(t) = 4\sin t + 3\cos t$ on $t \ge 0$ t segons i $s(t)$ metres.

a) Determineu la posició inicial.
b) Determineu el màxim desplaçament des de l’origen de coordenades.
c) Determineu el màxim desplaçament des de la posició inicial.
d) Calculeu la velocitat màxima.
e) Proveu que la acceleració $a(t)$ és $a(t) = -s(t)$
f) Descriviu el moviment de la partícula.

Problema 6

Siga $\Re$ la regió plana que es troba entre l'eix d'abscisses i la corba $y = 2e^{1-|x|}$

a) Proveu que el rectangle inscrit en $\Re$ que té un costat sobre l'eix d'abscisses el d'àrea màxima és un quadrat.
b) Proveu que el rectangle inscrit en $\Re$ que té un costat sobre l'eix d'abscisses el de perímetre mínim és un quadrat.
c) La solució és el mateix quadrat per als dos apartats anteriors.

Problema 7

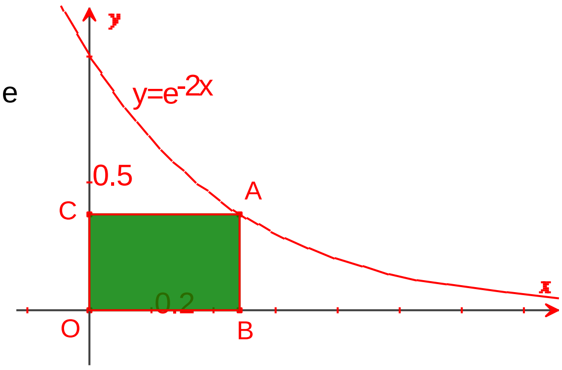
En un país, la natalitat i l'envelliment de la població de paràsits estan controlats.
La població que és preveu en P milions, t anys després de 1980, ve donada per

$$P(t) = 27.5 + 0.8t \cdot e^{-0.02t} \quad t \geq 0$$

a) Calculeu $\frac{dP}{dt}$
b) Quina es la predicció per a l'any 2080, en aquest any la població serà creixent o decreixent.
c) En quin any es preveu que la població tinga el màxim i quin és el màxim?

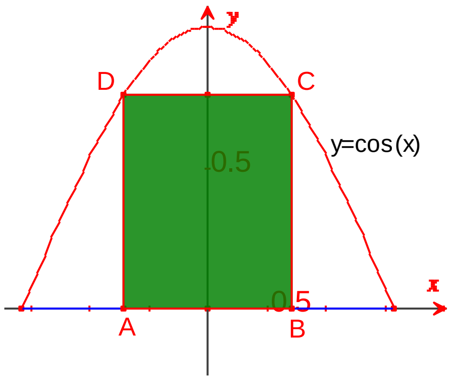
Problema 8

De tots els rectangles inscrits en la corba $y = e^{-2x}$.
Determineu les coordenades del punt A a fi que el rectangle $OBAC$ tinga àrea màxima.



Problema 9

Siga la funció $f(x) = cos\, x \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
En la funció anterior s'ha inscrit el rectangle $ABCD$.
Determineu les coordenades del punt C que fan màxima l'àrea del rectangle.



Problema 10

La profunditat de l'aigua en un port varia segons la funció
$d = 16 + 7\, sin\left(\frac{\pi}{12}t\right)$ on d es mesura en metres i t en hores a partir de mitjanit

a) A les 3 del matí quina profunditat tenia l'aigua del port?
b) A quina hora la profunditat era de 12 m?
c) Quina és la profunditat màxima i mínima?
d) Un vaixell pot atracar si la profunditat és menor de 19 m. Entre quines hores el vaixell pot entrar al port?

Problema 11

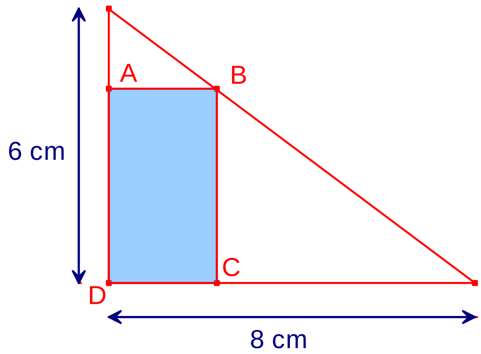
L'altura d'una de les aspes d'un molí de vent per a moldre blat ve donada per la funció

$H(t) = 10\,cos\left(\frac{\pi t}{6}\right) + 20$ metres, on t és el temps en segons.

a) Dibuixeu la gràfica de $H(t)$ quan $0 \leq t \leq 36$
b) Quina és l'altura de l'aspa al cap de 9 segons? Ascendeix o descendeix?
c) Quina és l'altura mínima de l'aspa i en quins segons s'assoleix?
d) Quina és l'altura màxima de l'aspa i en quins segons s'assoleix?
e) Al cap de quin temps l'aspa completa una revolució?
f) En quins segons l'altura de l'aspa és de 15 metres?

Problema 12

De tots els rectangles $ABCD$ inscrits en un triangle rectangle de catets 8 cm i 6 cm, determineu les dimensions del que té àrea màxima.



Problema 13

En el plànol cartesià considerem els punts $A(0,0), B(\pi, 0)$.
Siga la regió plana limitada pel segment $\overline{AB}$, l'arc de corba de la funció $y = 4\sin x$ amb $0 \leq x \leq \pi$.
Calculeu el màxim perímetre del rectangle inscrit en la regió tal que un costat estiga contingut en el segment $\overline{AB}$.

Problema 14

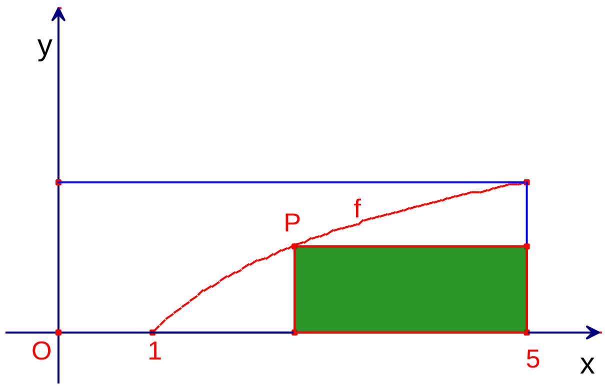
El disseny (maqueta) d'una pista d'esquí artificial està modelitzada per la funció
$h(d) = 4\sqrt{d} - 2d$
On d és la distància en la horitzontal en metres i $h(d)$ l'altura en metres.

a) A quina distància horitzontal l'altura és 0.
b) A quina distància horitzontal l'altura és 1.
c) Quina és l'altura màxima de la maqueta.
d) Quina és la taxa de variació instantània (gradient) en $d = 2\,m$

Problema 15

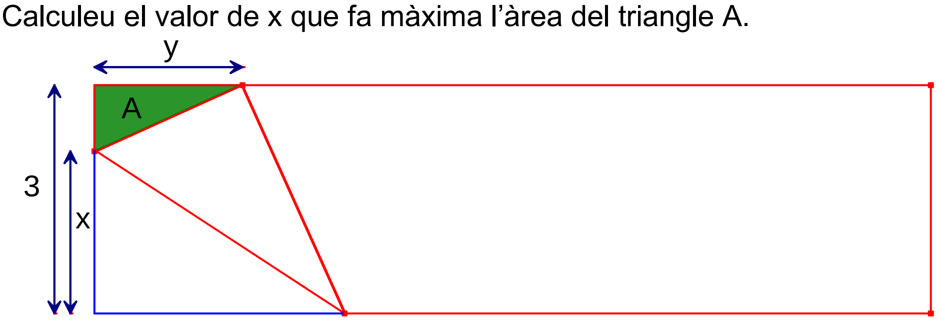
De tots els cons inscrits en l'esfera de radi 10 cm determineu les dimensions d'aquell que té àrea lateral màxima.

Problema 16
Siga la funció f de domini $[1,5]$ definida per $f(x) = \ln x$, la seua gràfica és:

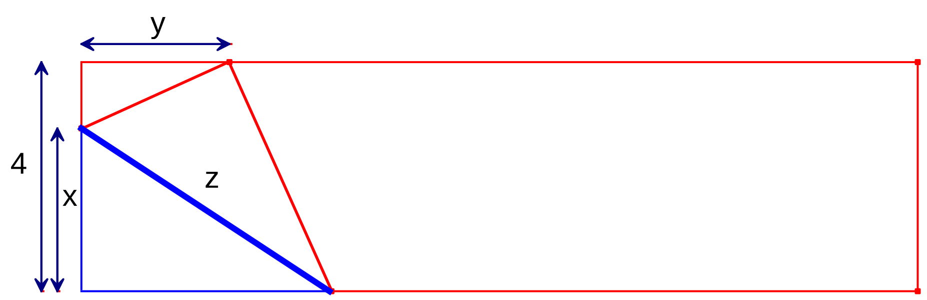


Siga P un punt que recorre la gràfica.
Per a cada punt P és considera el rectangle en què un dels costats pertany a l'eix d'abscisses, un altre costat en la recta $x = 5$, els catres dos costats en les rectes verticals i horitzontals que passen per P.
Expresseu l'àrea del rectangle en funció de l'abscissa de P.
Representeu la gràfica de la funció àrea.
Determineu les coordenades del punt P per a la qual l'àrea del rectangle és màxima.
Calculeu l'àrea màxima.

Problema 17
El cantó d'una tira de paper de 3 cm d'ample es dobla com mostra la figura.
Calculeu el valor de x que fa màxima l'àrea del triangle A.



Problema 18
El cantó d'una tira de paper de 4 cm d'ample es dobla com mostra la figura.
Calculeu el valor de x que fa mínima la longitud del segment z, segment del doblat.



Problema 19
El cantó d'una tira de paper de 3 cm d'ample es dobla com mostra la figura.
Calculeu el valor de x que fa màxima l'àrea del triangle B.

Problema 20
Considereu la paràbola d'equació $y = 4 - x^2$ en el primer quadrant.
Cadascuna de les rectes tangents a la paràbola delimita amb els eixos coordenats un triangle.
Determineu el punt de tangència tal que l'àrea del triangle siga mínima.

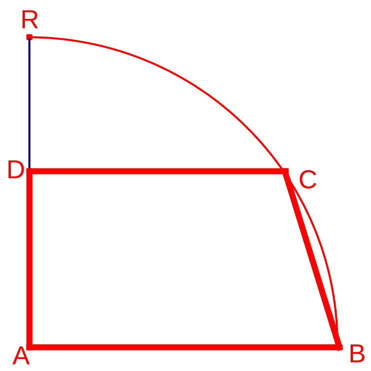
Problema 21
Un vaixell es troba en el punt $V(2, 0)$.
La línia de costa ve donada per la corba $y = \sqrt{2x + 1}$

Quin angle ha de desviar el vaixell de la direcció nord si vol arribar en línia recta al punt més proper de la costa. (L'eix positiu d'abscisses el la direcció est)

Problema 22
El costat desigual d'un triangle isòsceles mesura 12 i l'altura sobre el costat desigual 5. Determineu el punt d'aquesta altura tal que la suma de les distàncies als tres vèrtexs siga mínima. Calculeu la suma de les distàncies mínima.

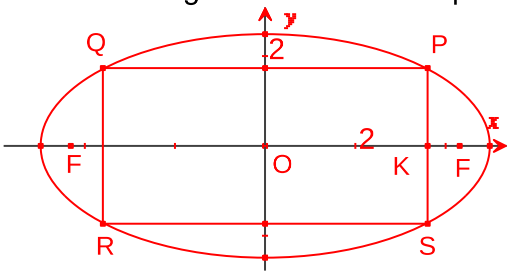
Problema 23
Donada una circumferència de radi $R = 1$, determineu un rectangle d'àrea màxima tal que una base siga tangent a la circumferència i el costat oposat corda de la circumferència.

Problema 24
En un quadrant de circumferència de centre A i radi $r = 10$ i arc $\widehat{BR}$ s'ha inscrit un trapezi $ABCD$.
Determineu el valor de l'angle $\angle BAC$ tal que la l'àrea del trapezi siga màxima.

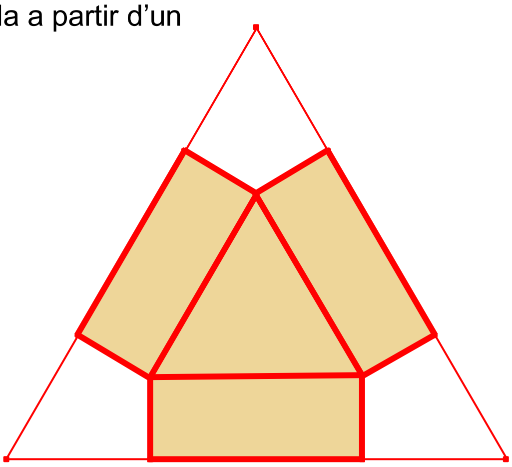


Problema 25
Determineu l'àrea màxima d'un rectangle inscrit en un semicercle de radi 10 cm. Un costat del rectangle roman sobre el diàmetre del semicercle.

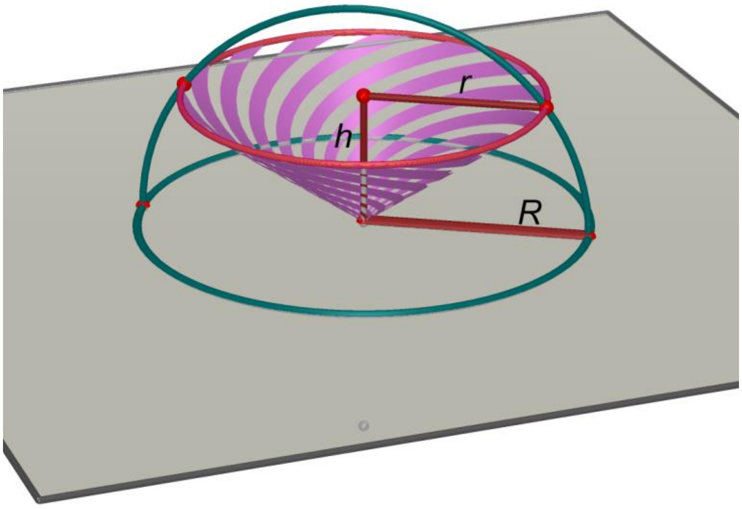
Problema 26
Determineu l'àrea màxima dels rectangles inscrits en l'el·lipse $x^2 + 4y^2 = 25$.



Problema 27
Determineu el volum màxim d'una caixa sense tapa construïda a partir d'un triangle equilàter de costat 30 cm.

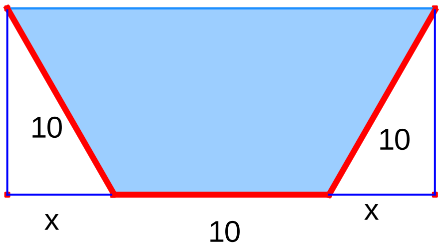


Problema 28
De tots els cons inscrits en una semiesfera de radi $R = 10$ (veure figura), determineu les dimensions del de major volum. Calculeu el volum màxim

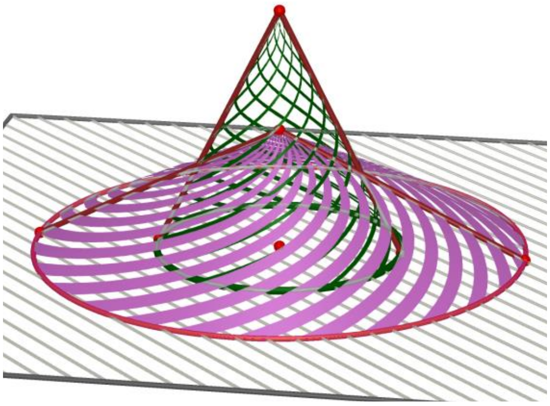


Problema 29
Es desitja construir una canaleta, per recollir aigua, la secció del qual és com la figura. La base i els costats han de mesurar 10 cm i es tracta de donar-li una inclinació adequada als costats per obtenir una secció d'àrea màxima. Es demana:

a) Determinar l'altura del canalet en funció de x (veure figura)
b) Determinar l'àrea de la secció de la canaleta en funció de x
c) Determinar el valor de x que fa màxima l'àrea.



Problema 30
Donat un con de radi 1 i altura 2, incrementem el radi de la base x i reduïm l'altura x.
Quin és el valor de x que fa màxim el nou volum del con?



Problema 31
Donats els punts $A(2,4), B(6,1)$.
Determineu el punt de l'eix d'abscisses amb el qual és veu el segment $\overline{AB}$ sota un angle màxim.

Problema 32
En el plànol XY està dibuixada una parcel·la A els límits de la qual són dos carrers d'equacions $x = 0$ i $x = 40$, respectivament, una carretera d'equació $y = 0$, i el tram del curs d'un riu, d'equació $f(x) = 30\sqrt{2x+1}$, amb $0 \leq x \leq 40$, sent positiu el signe de l'arrel quadrada.
Es pretén urbanitzar un rectangle R inscrit en la parcel·la A, de manera que els vèrtexs de R siguen els punts $(x,0), \left(x, f(x)\right), \left(40, f(x)\right), (40,0)$
Calculeu raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:
a) Àrea de la parcel·la A.
b) Els vèrtexs del rectangle R al que correspon l'àrea màxima.
c) El valor d'aquesta àrea màxima.
Pau's València juliol 2013

Problema 33
Determineu les mesures del trapezi isòsceles d'àrea mínima circumscrit a una circumferència de radi 1 m.

Problema 34

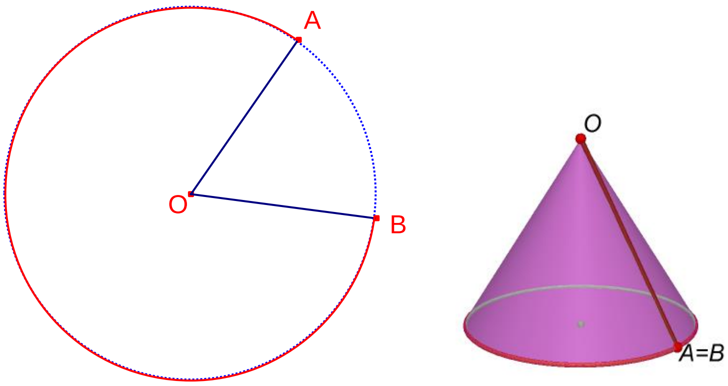
Quines dimensions ha de tenir un cassó en forma de cilindre d'un litre de capacitat perquè la superfície total siga mínima. Calculeu la superfície mínima

Problema 35

Es considera el triangle T de vèrtexs $O(0,0), A(x,y), B(0,y)$, en què $x > 0, y > 0$, i tal que la suma de les longituds dels costats $\overline{OA}$ i $\overline{AB}$ és de 30 metres.
Obteniu raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:
a) L'àrea del triangle T en funció d'x.
b) El valor d'x per al qual aquesta àrea és màxima.
c) El valor d'aquesta àrea màxima.
Pau's València juliol 2017

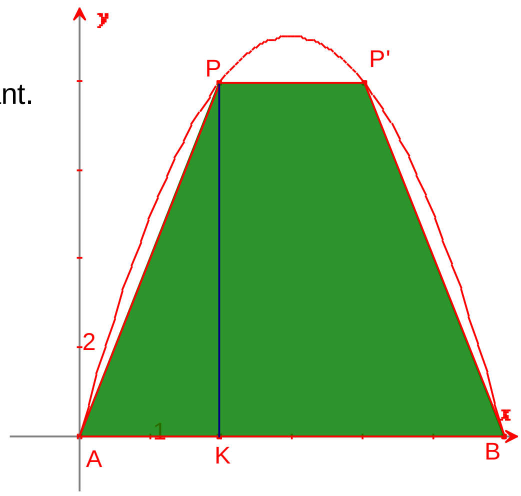
Problema 36

Donada un cercle de radi 10 retallem un sector AOB d'angle $x = \angle AOB$ per formar un con.
a) Calculeu el volum del con en funció de l'angle $x = \angle AOB$.
b) Calculeu el valor de l'angle $x = \angle AOB$ que fa màxim el volum del con.



Problema 37

Siga la paràbola $y = -x^2 + 6x$.
Feu un estudi de la paràbola. Representeu-la.
Siguen A i B els punts de tall amb l'eix d'abscisses.
Siga P un punt de la paràbola que pertany I primer quadrant.
Siga el trapezi isòsceles $ABP'P$ tal que P' pertany a la paràbola.
Calculeu l'àrea màxima del trapezi $ABP'P$.

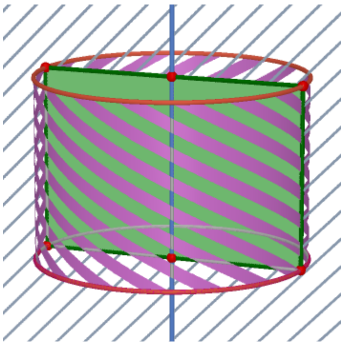


Problema 38
Siguen les paràboles $y = x^2 - x,\ y = 3 - x^2$.
a) Dibuixeu les dues paràboles en el mateix gràfic.
b) Determineu els punts de tall de les dues paràboles.
c) Calculeu la màxima distància vertical entre es dues paràboles compresa entre els dos punts de tall d'ambdues paràboles.

Problema 39
De tots els cons rectes circumscrits a una esfera de radi $r = 2$ determineu les dimensions del que té volum mínim.

Problema 40
En el primer quadrant representem un rectangle de tal manera que té un vèrtex en l'origen de coordenades i el vèrtex oposat en la paràbola $y = -x^2 + 3$.
Determineu les dimensions del rectangle a fi que l'àrea siga màxima.

Problema 41
El perímetre de la secció axial d'un cilindre mesura $90\ cm$
Determineu el volum màxim del cilindre.



Nota:
Secció axial, és el rectangle determinat per la intersecció del cilindre amb un plànol que passa pels centres de les dues bases.

Problema 42
Determineu les mesures del triangle isòsceles inscrit en una circumferència de radi $R = 10$ tal que la suma de la base i l'altura siga màxima. Calculeu la suma màxima.

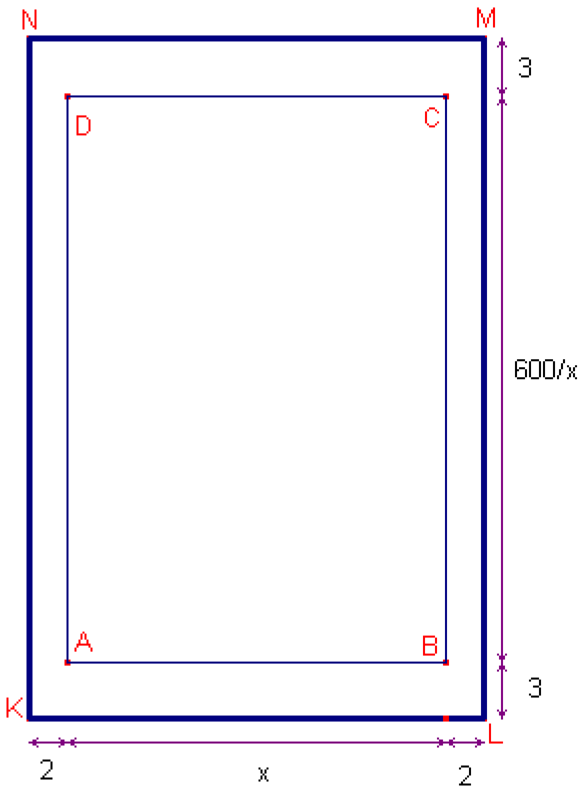
Problema 43
Determineu en la gràfica de la funció $y = \sqrt{x}, x \in [1, 9]$ un punt M a fi que l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABM}$, siga màxima. A, B són punts de la gràfica amb abscisses 1 i 9, respectivament.

Solucions

Problema 1
Dins d'una cartolina rectangular es desitja fer un dibuix que ocupe un rectangle R de $600\ cm^2$ d'àrea de manera que:
Per damunt i per sota de R han de quedar uns marges de 3 cm d'altura cadascun. Els marges a esquerra i a dreta de R han de tenir una amplària de 2 cm cadascun.
Obteniu raonadament, escrivint tots els passos de raonament utilitzat:
a) L'àrea de la cartolina en funció de la base x del rectangle R.
b) El valor de x per al qual l'àrea de la cartolina és mínima.
c) Les dimensions de dita cartolina d'àrea mínima.
Pau's València juliol 2018.

Solució
Siga el rectangle R de vèrtexs $ABCD$.
Siga $x = \overline{AB}$.
Com l'àrea del rectangle R és $600\ \mathrm{cm}^2$, aleshores, $\overline{BD} = \frac{600}{x}$.
Siga la cartolina de vèrtexs $KLMN$.

$$\overline{KL} = x + 4, \overline{LM} = \frac{600}{x} + 6$$

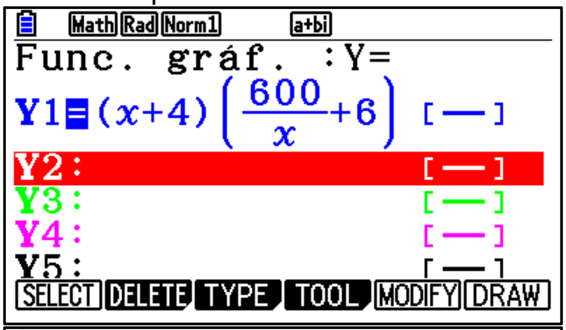


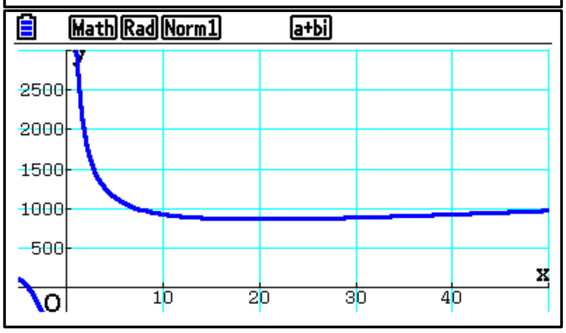
a)
L'àrea de la cartolina és:

$$S(x) = (x + 4)\left(\frac{600}{x} + 6\right)$$

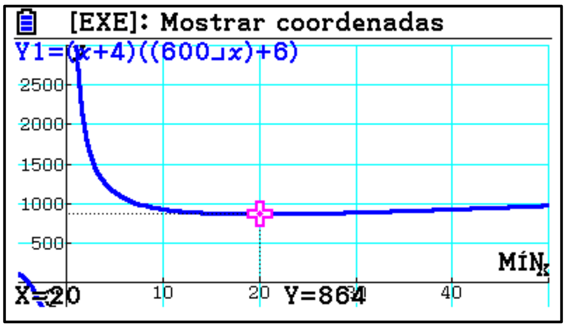
$$S(x) = 624 + 6x + \frac{2400}{x}, \qquad x \geq 0$$

b)
Obrim el *Menú Gráfico*
Definim i representem la funció àrea:



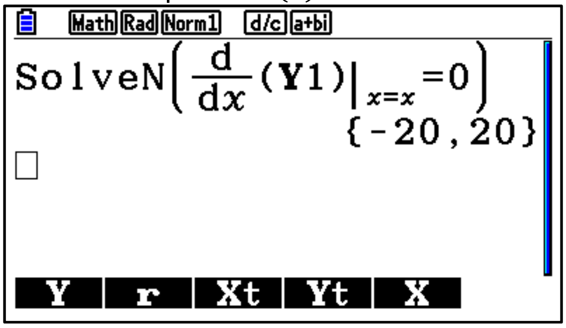


Calculem el mínim de l'àrea amb la funció *G-Solv*.

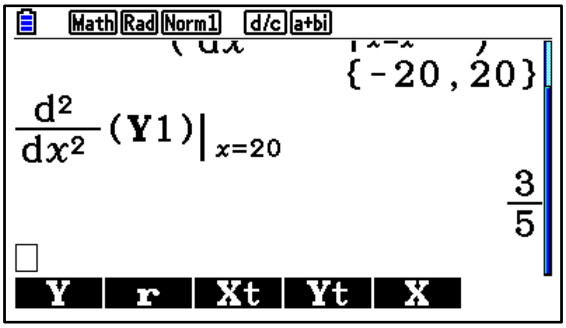


El mínim s'assoleix quan $x = 20$

Obrim el *Menú Ejec-Mat*.
Resolem l'equació $S'(x) = 0$



Calculem $S"(20)$



$S"(20) > 0$
Aleshores, el mínim de l'àrea s'assoleix quan $x = 20$, l'àrea mínima de la cartolina és $S(20) = 864 \text{ cm}^2$

Les dimensions de la cartolina són:

$\overline{KL} = 20 + 4 = 24 \text{ cm}, \overline{LM} = \dfrac{600}{20} + 6 = 36 \text{ cm}$

b)
Calculem la derivada de la funció àrea.
$S'(x) = 6 - \frac{2400}{x^2}$
$S'(x) = 0$
$6 - \frac{2400}{x^2} = 0$
Resolent l'equació:
$x = 20$

Calculem la segona derivada:
$S"(x) = \frac{4800}{x^3}$
$S"(20) = \frac{4800}{20^3} > 0$
Aleshores, el mínim de l'àrea s'assoleix quan
$x = 20$

c)
Les dimensions de la cartolina d'àrea mínima són:
$\overline{KL} = 20 + 4 = 24 \text{ cm}, \overline{LM} = \frac{600}{20} + 6 = 36 \text{ cm}$

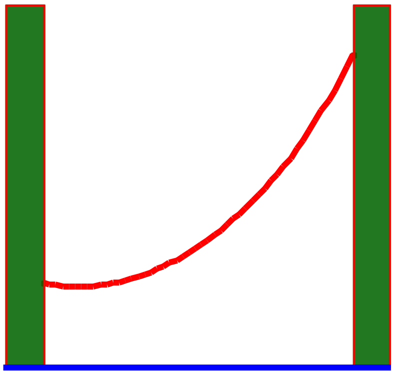
Problema 2

Una cadena de metall està subjectada sobre dos murs que disten entre ells 2 metres

La funció altura és $h(x) = e^{-2x} + e^{x}$ on $0 \leq x \leq 2$, on x és la distància d'un punt del terra al mur de l'esquerra.

c) Calculeu a quina altura està penjada la cadena de cada mur.

d) Calculeu quina és la altura mínima de la cadena al terra.

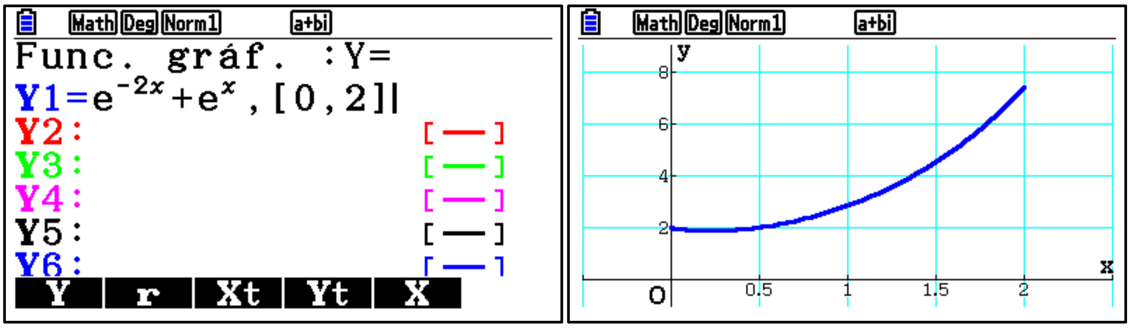


2 metres

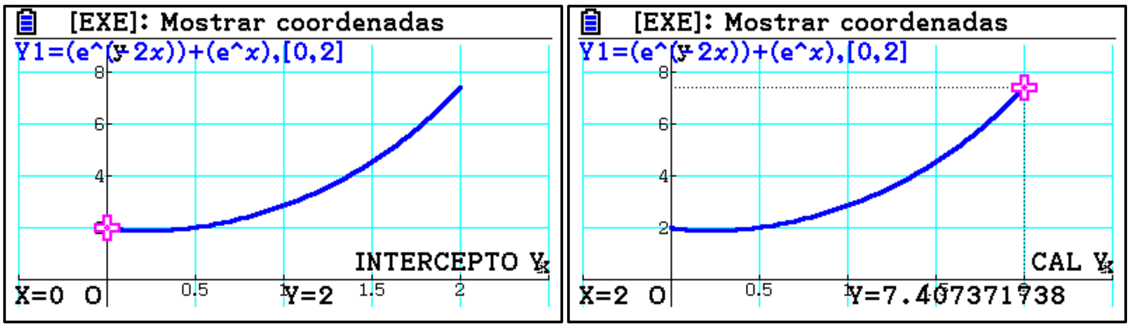
Solució 1:

Obrim el *Menú Gráfico*

Definim la funció altura $h(x) = e^{-2x} + e^{x}$ on $0 \leq x \leq 2$



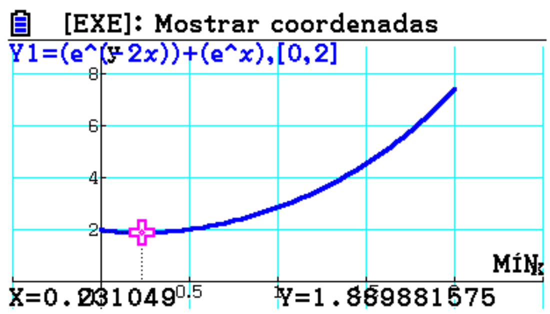
Amb la funció *G-Solv,* calculem a quina altura està penjada la cadena de cada mur.



Del mur de l'esquerra està a una altura de 2 metres

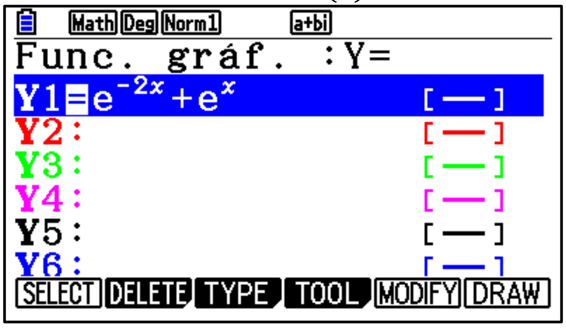
Del mur de la dreta està a una altura de 7.41 metres

Amb la funció *G-Solv* calculem l'altura mínima de la cadena:

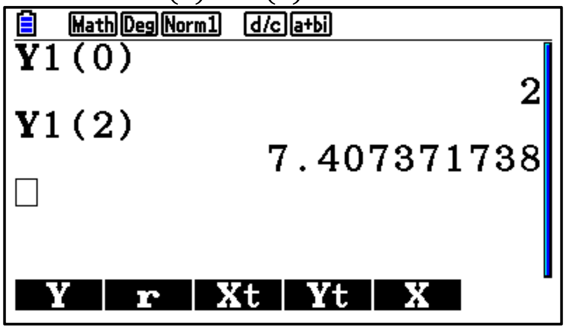


L'altura mínima és 1.89 metres i s'assoleix a una distància de 0.23 metres del mur de l'esquerra.

Solució 2
Obrim el *Menú Gráfico*
Definim la funció altura $h(x) = e^{-2x} + e^{x}$

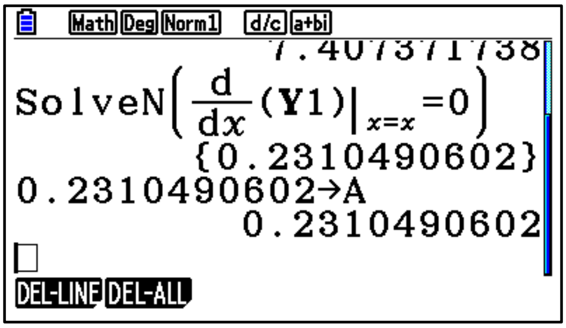


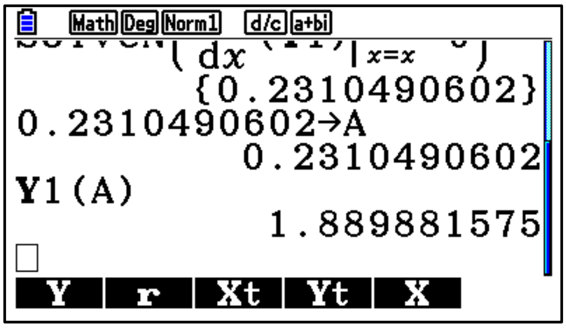
Obrim el *Menú Ejec-Mat*
Calculem $Y1(0)$ i $Y1(2)$



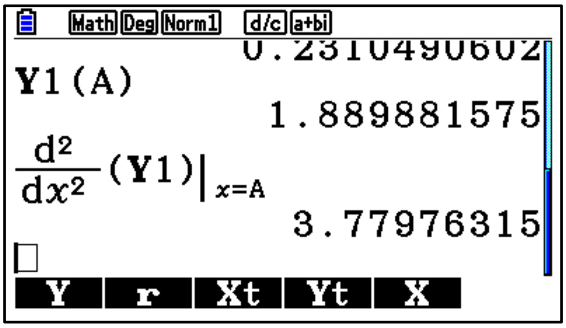
Del mur de l'esquerra està a una altura de 2 metres
Del mur de la dreta està a una altura de 7.41 metres

Per calcular el mínim resolem l'equació $\frac{d}{dx}Y1\Big|_{x=x} = 0$





Calculem la segona derivada en $x = A$ $\quad \frac{d^2}{dx^2}\Big|_{x=A}$



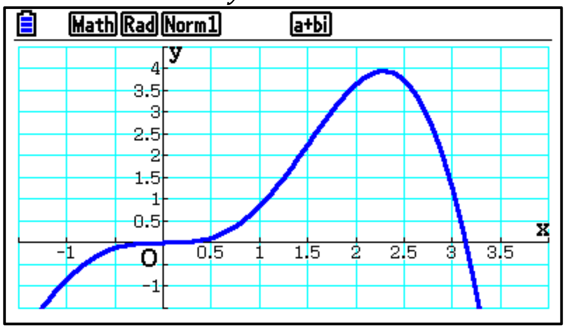
L'altura mínima és 1.89 metres i s'assoleix a una distància de 0.23 metres del mur de l'esquerra.

Problema 3
Donada la funció $y = x^2 \cdot sin\,x$, $x \in [-1, 4]$, determineu gràficament,

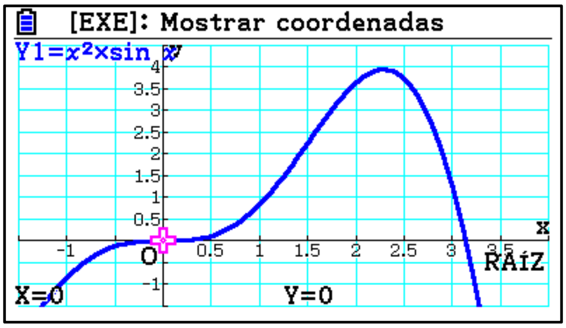
c) Els punts de tall amb l'eix d'abscisses.
d) El màxim de la funció.

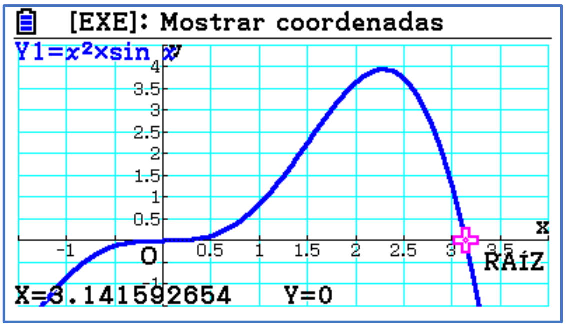
Solució:
Obrim el *Menú Gráfico*:
Les mesures angulars han de ser radians.

Definim la funció $y = x^2 \cdot sin\,x$

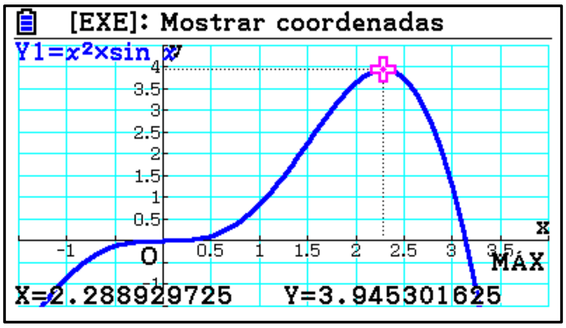


Amb la funció *G-Solv* determinem els punts de tall i el màxim.



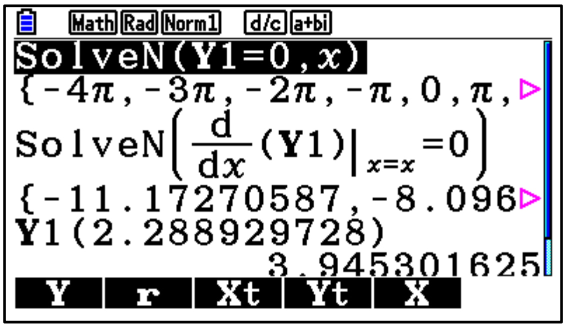


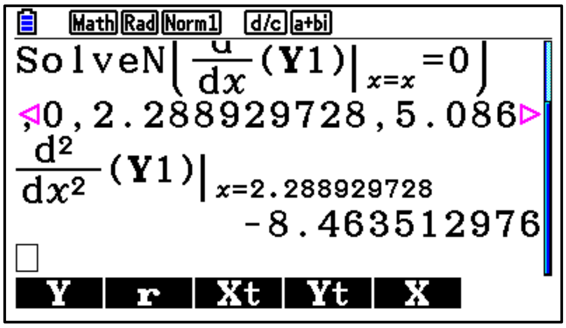
Els punts de tall amb l'eix d'abscisses són $(0, 0), (\pi, 0)$.



El màxim s'assoleix en el punt $(2.2889, 3.9453)$

Solució:
Resolem l'equació $x^2 \cdot sin\,x = 0$
Resolem l'equació $\frac{d}{dx}(x^2 \cdot sin\,x) = 0$





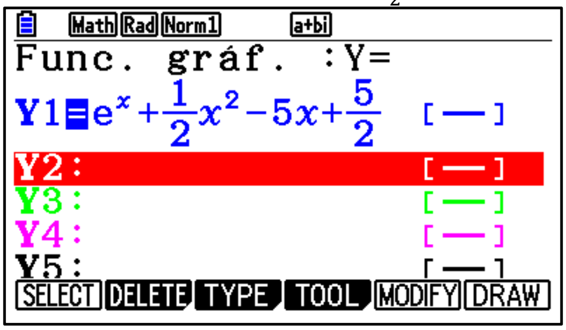
Els punts de tall amb l'eix d'abscisses són $(0,0), (\pi,0)$

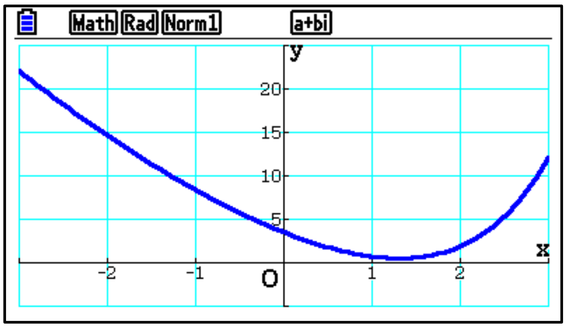
El màxim s'assoleix en el punt $(2.2889, 3.9453)$

Problema 4
La derivada de la funció $f(x)$ ve donada per $f'(x)=e^x+x-5$
El punt $(1, e-2)$ pertany a la gràfica de $f(x)$

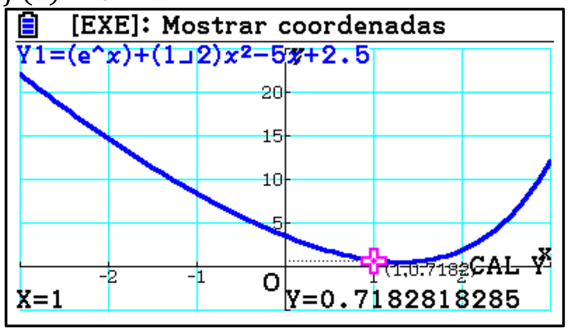
e) Comproveu que $f(x)=e^x+\frac{1}{2}x^2-5x+2.5$
f) Dibuixeu aproximadament la gràfica de $y=f(x)$ per a $-3<x<3$
g) Determineu el valor mínim de $f(x)$
h) Determineu l'àrea afitada per la gràfica $y=f(x)$, els eixos de coordenades i la recta $x=2$

Solució:
a)
Derivant la funció $f(x)$:
$f'(x)=e^x+x-5$
$f(1)=e+\dfrac{1}{2}-5+2.5=e-2\approx 0.7182818285$
b)
Obrim el *Menú Gráfico*.
Definim la funció $f(x)=e^x+\frac{1}{2}x^2-5x+2.5$

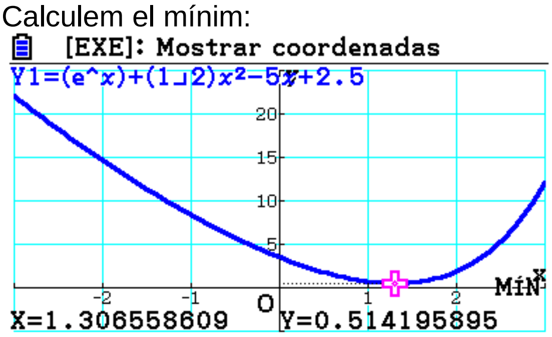




Comprovem que
$f(1)=e-2$

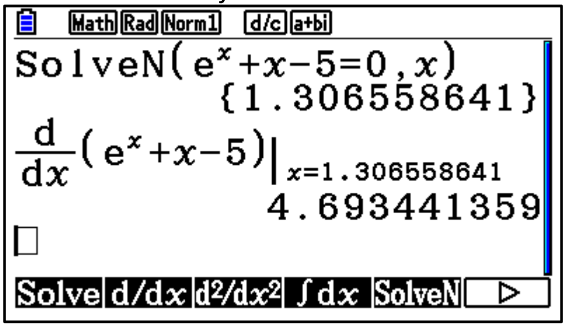


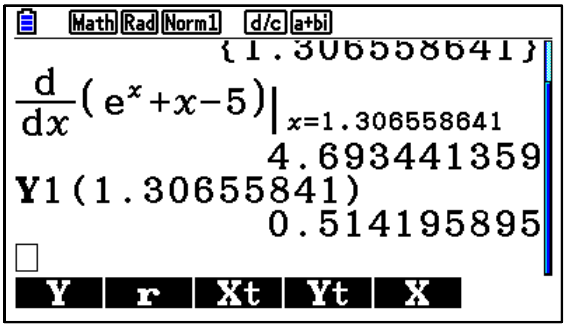
Calculem el mínim:



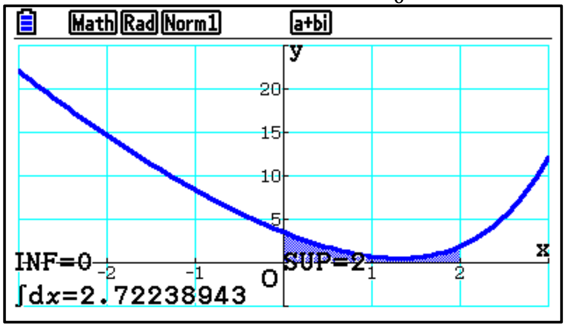
El mínim s'assoleix en el punt $(1.3066, 0.5142)$

Altre mètode:
Resolent l'equació $f'(x) = e^x + x - 5 = 0$
Obrim el *Menú Ejec-Mat*

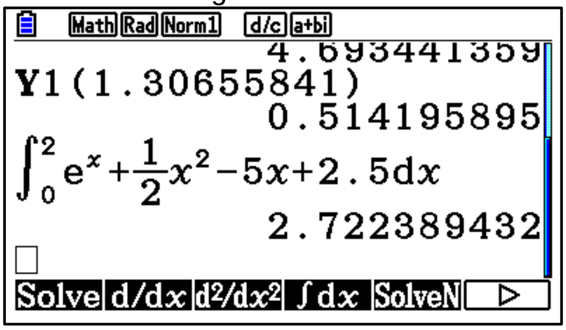




Notem que $f"(1.306558641) > 0$
El mínim s'assoleix en el punt $(1.3066, 0.5142)$
c)
Calculem gràficament l'àrea $\int_0^2 f(x)dx$



Obrim el *Menú Ejec-Mat*
Calculem la integral

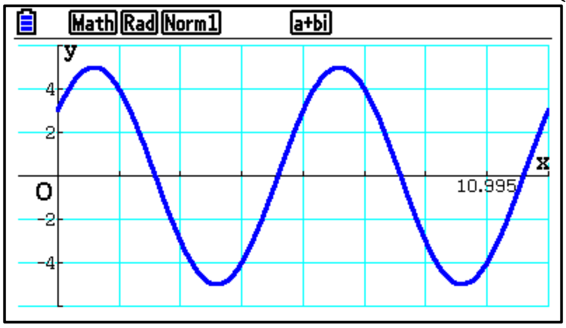


L'àrea afitada per la gràfica $y = f(x)$, els eixos de coordenades i la recta $x = 2$ és
$S = 2.7224\,u^2$

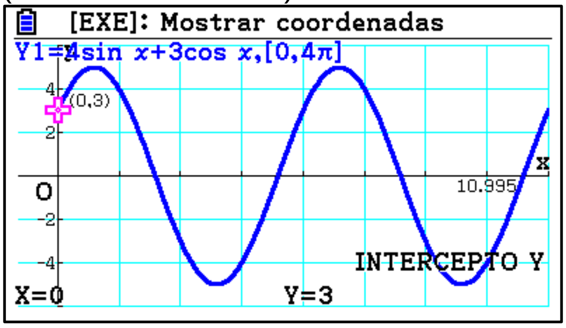
Problema 5
El desplaçament d'una partícula ve definit per la funció $s(t) = 4\,sin\,t + 3\,cos\,t$ on $t \geq 0$ t segons i $s(t)$ metres.

g) Determineu la posició inicial.
h) Determineu el màxim desplaçament des de l'origen de coordenades.
i) Determineu el màxim desplaçament des de la posició inicial.
j) Calculeu la velocitat màxima.
k) Proveu que la acceleració $a(t)$ és $a(t) = -s(t)$
l) Descriviu el moviment de la partícula.

Solució:
a)
Obrim el *Menú Gráfico* i definim la funció $s(t) = 4\,sin\,t + 3\,cos\,t$

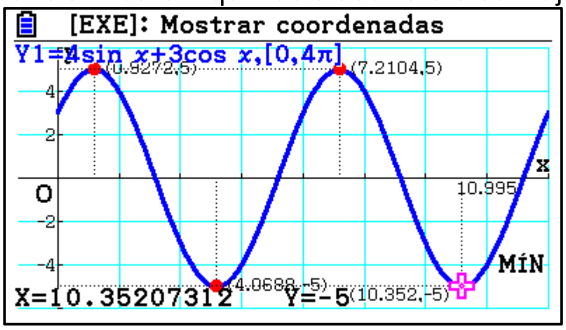


Per calcular la posició inicial calculem el punt de tall de la funció amb l'eix d'ordenades (amb la funció *G-Solv*)



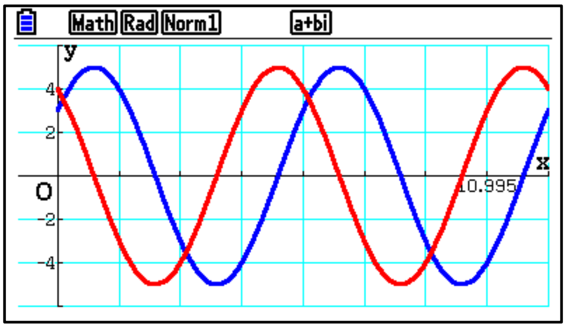
En la posició inicial està a 3 m de l'origen de coordenades.

b)
Per calcular la màxima distància des de l'origen, calculem el màxim i el mínim de la funció i veurem quin dels dos valors és major.

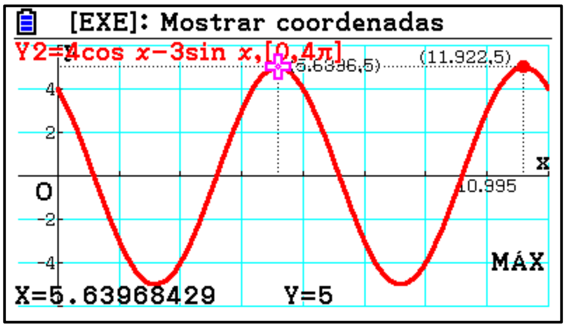


El màxim desplaçament des de l'origen de coordenades és de 5 m.

c)
El màxim desplaçament des de la posició inicial és el màxim de la diferència entre la posició inicial i el màxim de la funció, i la diferència entre la posició inicial i el mínim:
$Màx\{|5-2|,|-5-2|\}=7$
d)
Dibuixem la funció derivada del desplaçament:
$v(t)=4\cos t-3\sin t$



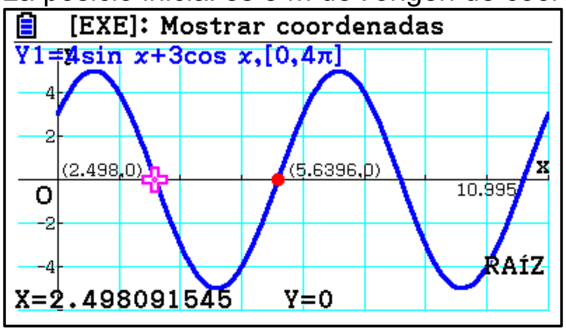
Per calcular la velocitat màxima utilitzem la funció *G-Solv* i calculem el màxim de la funció derivada:



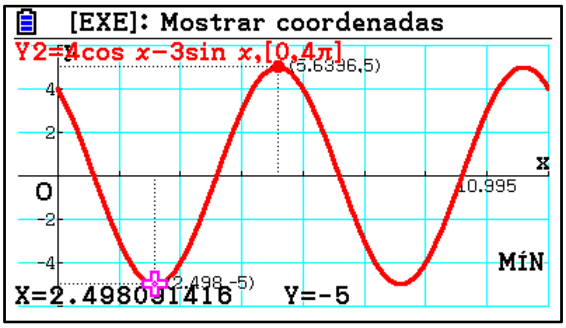
La velocitat màxima s'assoleix quan $x\approx 5.64\ s, 11.92\ s$ i la velocitat màxima és $5\ m/s$.

e)
Calculem l'acceleració:
$a(t)=-4\sin t-3\cos t=-s(t)$

f)
El moviment és periòdic de període 2π.
La posició inicial és 3 m de l'origen de coordenades.



Passa per l'origen de coordenades en $t\approx 2.50+2\pi k,\ t\approx 5.64+2\pi k,\ k=0,1,2,3,\ldots$
La distància màxima del desplaçament des de l'origen és 5 m.



Entre $[0, 2\pi]$ estudiem la velocitat:
En l'interval $[0, 2.50]$ la velocitat és decreixent.
En l'interval $[2.50, 5.64]$ la velocitat és creixent.
En l'interval $[5.64,\ \ 2\pi]$ la velocitat és decreixent.

Nota:

$s(t) = 4\,sin\,t + 3\,cos\,t = 5\left(\frac{4}{5}sin\,t + \frac{3}{5}cos\,t\right)$

Siga $sin\,\alpha = \frac{3}{5}$, $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ aleshores, $cos\,\alpha = \frac{4}{5}$.
$s(t) = 4\,sin\,t + 3\,cos\,t = 5(sin\,t \cdot cos\,\alpha + cos\,t \cdot sin\,\alpha)$
$s(t) = 5 \cdot sin(t + \alpha)$, $\alpha = arcsin\frac{3}{5}$

Problema 6

Siga $\mathfrak{R}$ la regió plana que es troba entre l'eix d'abscisses i la corba $y = 2e^{1-|x|}$

d) Proveu que el rectangle inscrit en $\mathfrak{R}$ que té un costat sobre l'eix d'abscisses el d'àrea màxima és un quadrat.

e) Proveu que el rectangle inscrit en $\mathfrak{R}$ que té un costat sobre l'eix d'abscisses el de perímetre mínim és un quadrat.

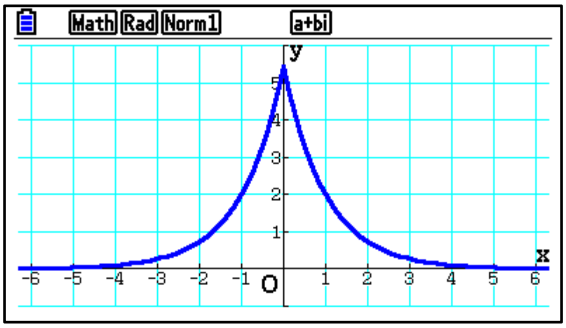
f) La solució és el mateix quadrat per als dos apartats anteriors.

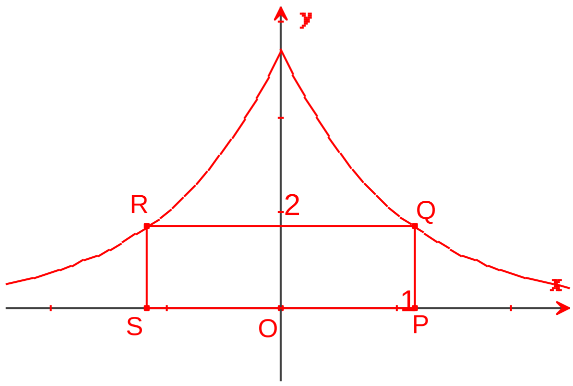
Solució:

La funció $f(x) = 2e^{1-|x|}$ és simètrica respecte de l'eix d'abscisses ja que $f(-x) = f(x)$

Obrim el *Menú Gráfico*

Definim la funció $f(x) = 2e^{1-|x|}$





Siga $PQRS$ el rectangle inscrit:

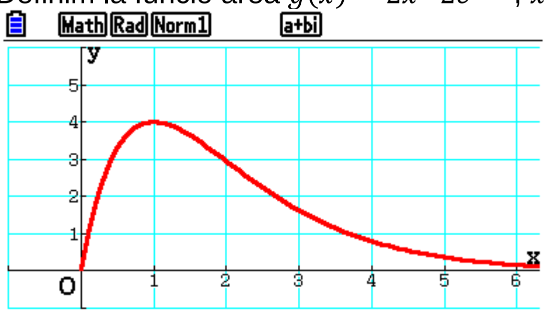
Siga $x \geq 0$

$P(x,0), Q(x, 2e^{1-x}), R(-x, 2e^{1+x}), S(-x, 0)$.

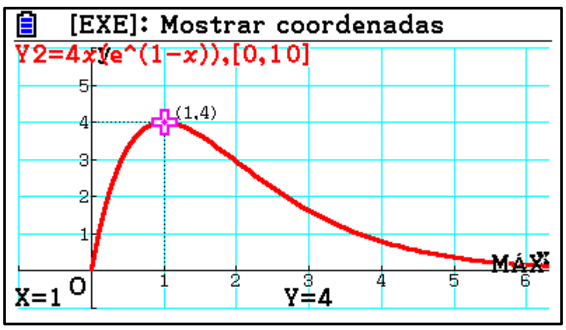
L'àrea del rectangle és:

$g(x) = 2x \cdot 2e^{1-x}$, $x \geq 0$.

Definim la funció àrea $g(x) = 2x \cdot 2e^{1-x}$, $x \geq 0$.



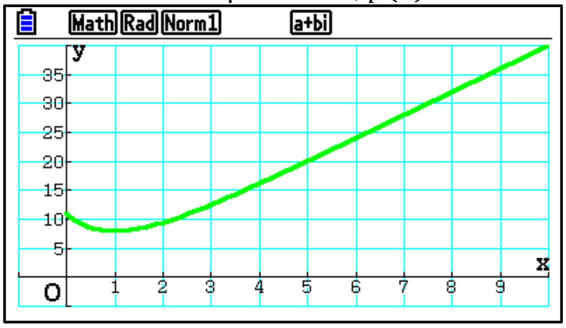
Amb la funció *G-Solv* determinem el màxim de la funció àrea.



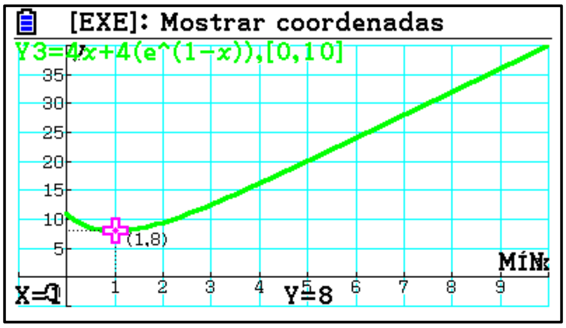
El màxim s'assoleix quan $x = 1$.
En aquest cas $\overline{PQ} = 2x = 2$, $\overline{QR} = 2e^{1-x} = 2$.
L'àrea màxima és 4.
En aquest cas, $PQRS$ és un quadrat.

El perímetre del rectangle $PQRS$ és:
$p(x) = 4x + 4e^{1-x}$, $x \geq 0$

Definim la funció perímetre, $p(x) = 4x + 4e^{1-x}$ $x \geq 0$.



Amb la funció *G-Solv* determinem el mínim de la funció perímetre.



El mínim s'assoleix quan $x = 1$.
En aquest cas $\overline{PQ} = 2x = 2$, $\overline{QR} = 2e^{1-x} = 2$.
El perímetre mínim és 8.
En aquest cas, $PQRS$ és un quadrat.

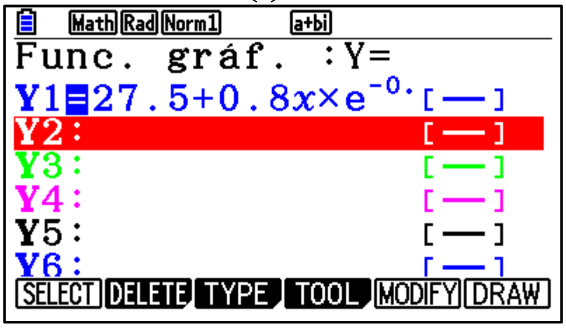
Notem que la solució és el mateix quadrat per als dos apartats anteriors.

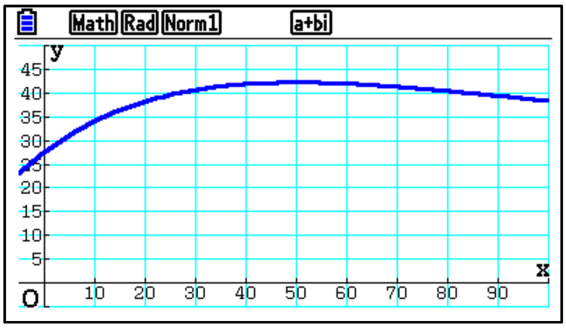
Problema 7
En un país, la natalitat i l'envelliment de la població de paràsits estan controlats.
La població que és preveu en P milions, t anys després de 1980, ve donada per

$$P(t) = 27.5 + 0.8t \cdot e^{-0.02t} \quad t \geq 0$$

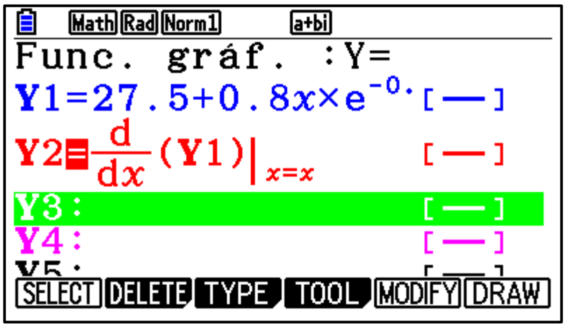
d) Calculeu $\frac{dP}{dt}$
e) Quina es la predicció per a l'any 2080, en aquest any la població serà creixent o decreixent.
f) En quin any es preveu que la població tinga el màxim i quin és el màxim?

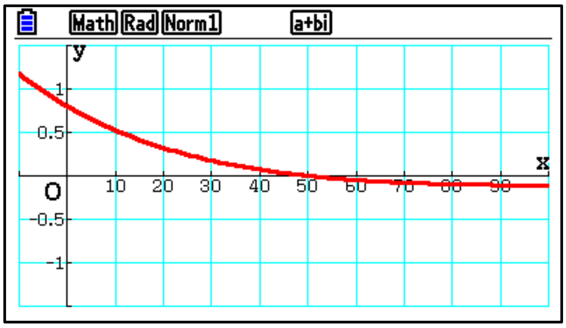
Solució:
Obrim el *Menú Gráfico*:
Definim la funció $P(t) = 27.5 + 0.8t \cdot e^{-0.02t} \quad t \geq 0$



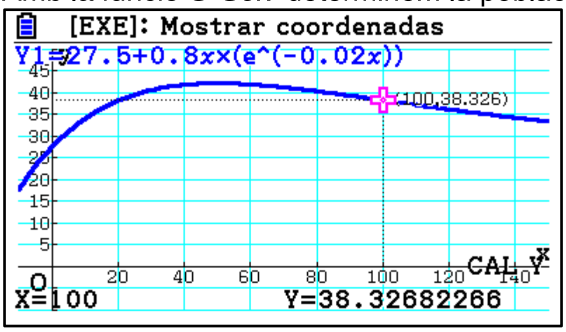


a)
$P'(t) = (0.8 - 0.16t) \cdot e^{-0.02t} \quad t \geq 0$
Definim la funció derivada i la representem $Y2 = \frac{d}{dx}(Y1)\Big|_{x=x}$



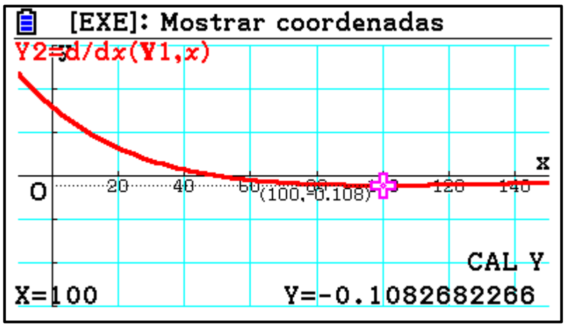


b)
Amb la funció *G-Solv* determinem la població prevista per a l'any 2080. $P(100)$

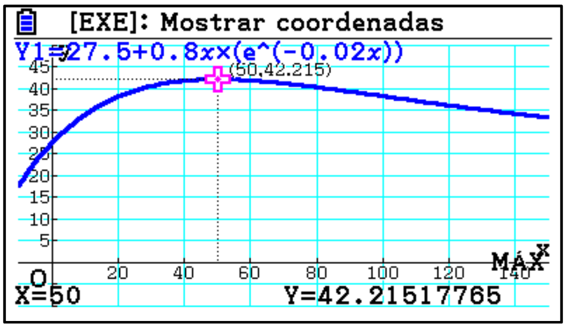


L'any 2080 es preveu una població de 38.33 milions.

Calculem la velocitat prevista per a l'any 2080.

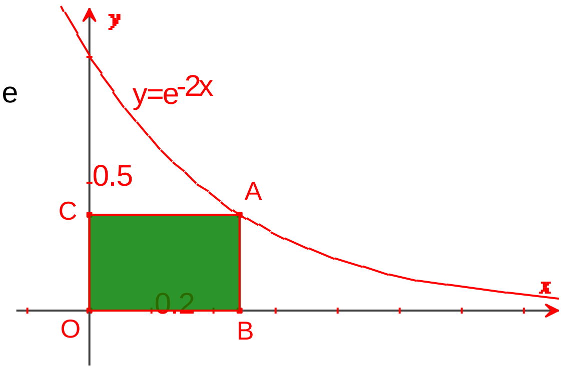


La velocitat en milions per a l'any 2080 és $P'(100) = -0.11$
La població en aquest any és decreixent.
c)
Amb la funció *G-Solv*, calculem el màxim de la funció població:



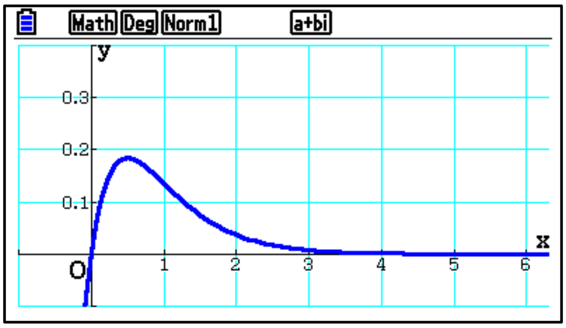
El màxim de la població s'assoleix quan $t = 50$ és a dir, l'any 2030.
És preveu que el màxim de la població siga de 42.22 milions.

Problema 8
De tots els rectangles inscrits en la corba $y = e^{-2x}$.
Determineu les coordenades del punt A a fi que el rectangle $OBAC$ tinga àrea màxima.

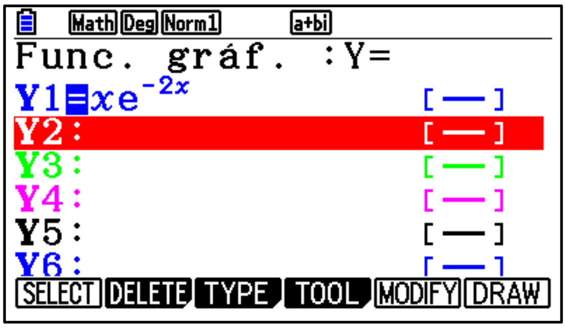


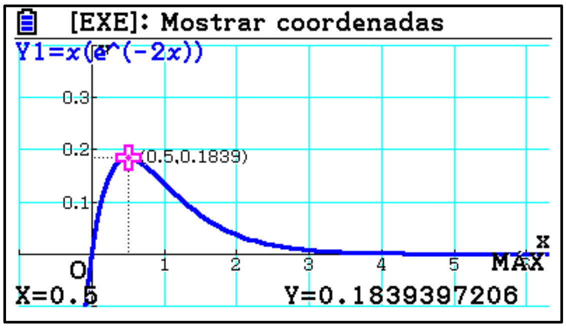
Solució:
Les coordenades del punt A són $A(x, e^{-2x})$
L'àrea del rectangle $OBAC$ és:
$S(x) = x \cdot e^{-2x}, x \geq 0$

Obrim el *Menú Gráfico*.
Definim la funció àrea.



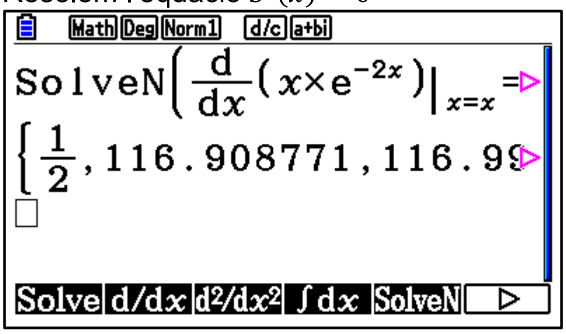
Amb la funció *G-Solv* determinem el màxim de la funció àrea.

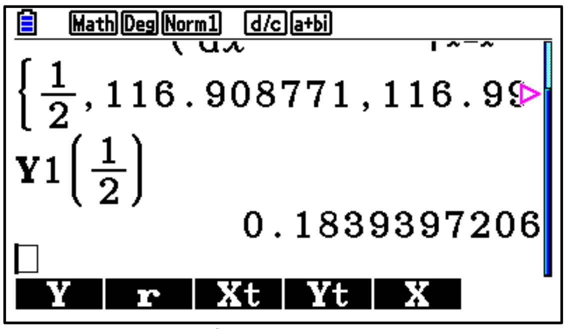




El màxim de l'àrea del rectangle $OBAC$ s'assoleix quan $x = \frac{1}{2}$, i l'àrea màxima és
$S_{màx} = 0.1839$

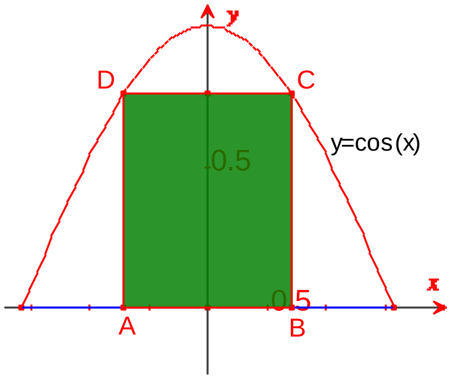
Obrim el *Menú Ejec-Mat*.
Resolem l'equació $S'(x) = 0$





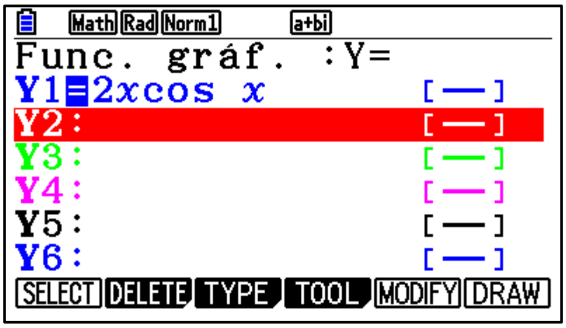
El màxim de l'àrea del rectangle $OBAC$ s'assoleix quan $x = \frac{1}{2}$, i l'àrea màxima és
$S_{màx} = 0.1839$

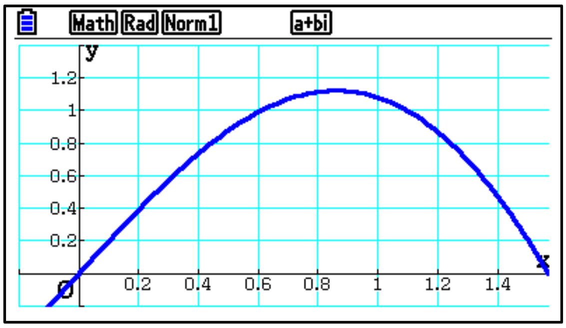
Problema 9



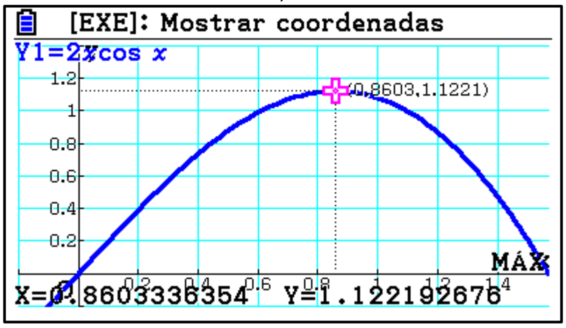
Siga la funció $f(x)=cos\,x \quad x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$
En la funció anterior s'ha inscrit el rectangle $ABCD$.
Determineu les coordenades del punt C que fan màxima l'àrea del rectangle.

Solució:
Siga $C(x,cos(x)),\ x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$
L'àrea del rectangle $ABCD$ és:
$S(x)=2x\cdot cos(x) \quad x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$
Obrim el *Menú Gráfico*
Definim la funció àrea.



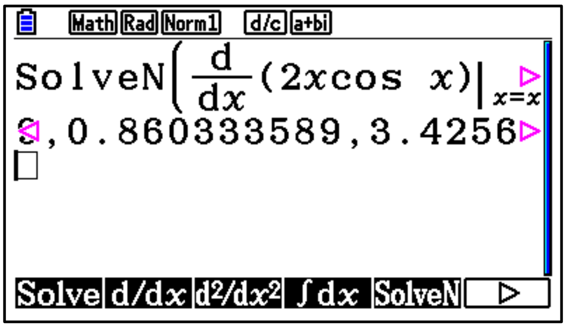


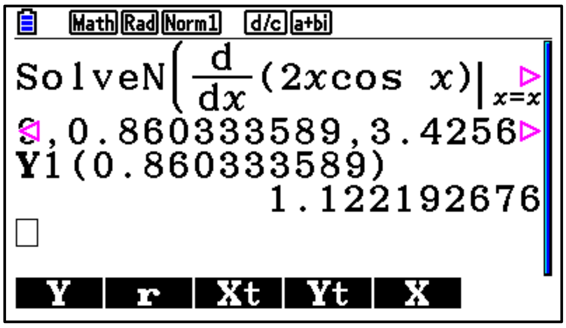
Amb la funció *G-Solv*, determinem el màxim de la funció àrea:



Les coordenades de C són $C(0.8603, 1{,}1222)$

Obrim el *Menú Ejec-Mat*
Resolem l'equació $\frac{d}{dx}(2x\cdot cos(x))=0$.



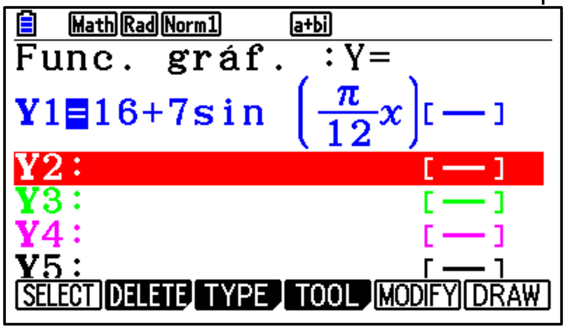


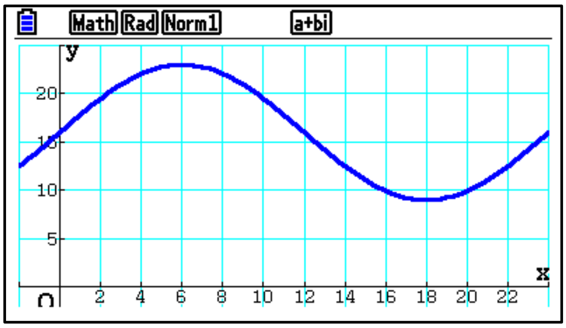
El màxim s'assoleix quan $x=0.8603$, l'àrea màxima és $S=1.1222$.
Les coordenades de C són $C(0.8603, 1{,}1222)$

Problema 10
La profunditat de l'aigua en un port varia segons la funció
$d = 16 + 7\,sin\left(\frac{\pi}{12}t\right)$ on d es mesura en metres i t en hores a partir de mitjanit

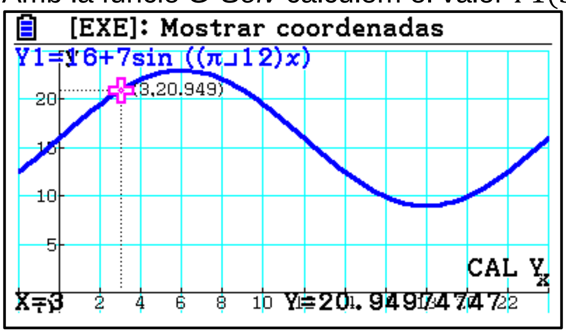
e) A les 3 del matí quina profunditat tenia l'aigua del port?
f) A quina hora la profunditat era de 12 m?
g) Quina és la profunditat màxima i mínima?
h) Un vaixell pot atracar si la profunditat és menor de 19 m. Entre quines hores el vaixell pot entrar al port?

Solució:
Configurem els angles en radians.
Obrim el *Menú Gráfico* i definim la funció profunditat.

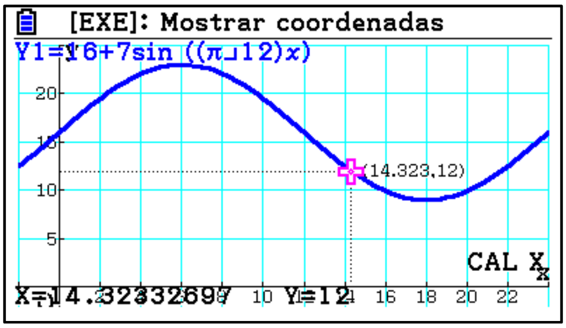


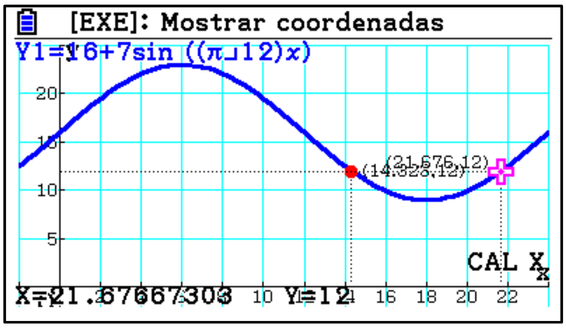


a)
Amb la funció *G-Solv* calculem el valor $Y1(3)$



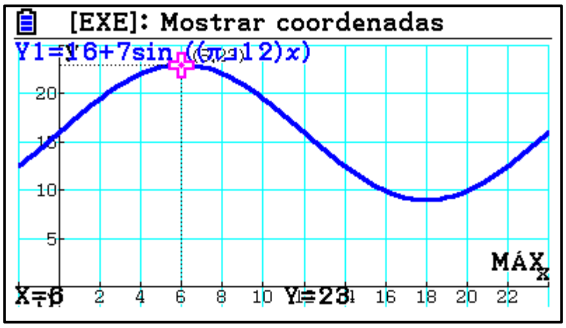
A les 3 del matí la profunditat era de 20.95 m
b)
Amb la funció *G-Solv* calculem el valor de x per a 12 m

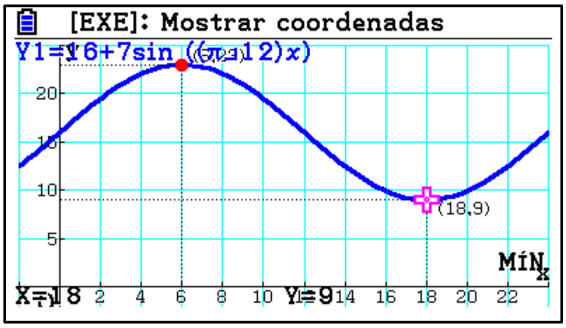




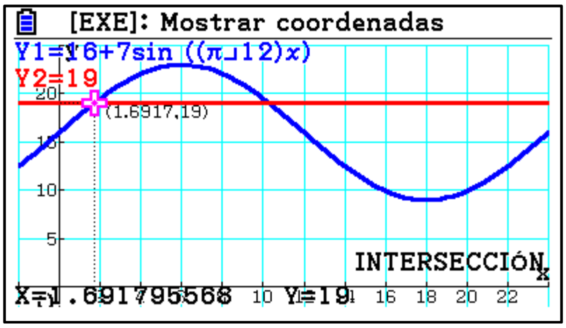
El port té una profunditat de 12 m a les 14.32 h i a les 21.68 h

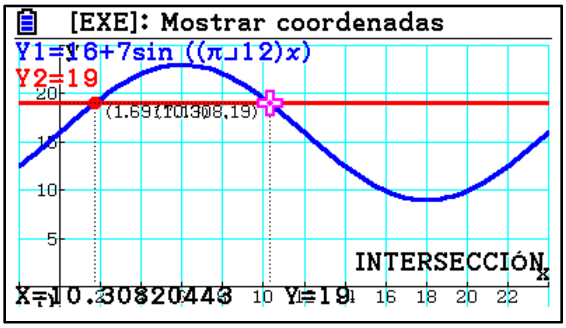
c)
Amb la funció *G-Solv* calculem el màxim i mínim de la funció profunditat.





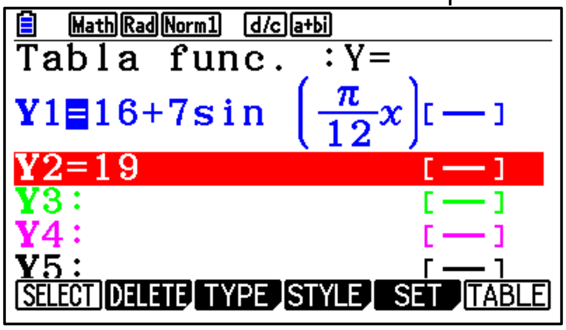
La màxima profunditat s'assoleix a les 6 del matí.
La mínima profunditat s'assoleix a les 18 del matí.
d)
Definim la funció $y = 19$
Amb la funció *G-Solv* determinem la intersecció de les dues funcions

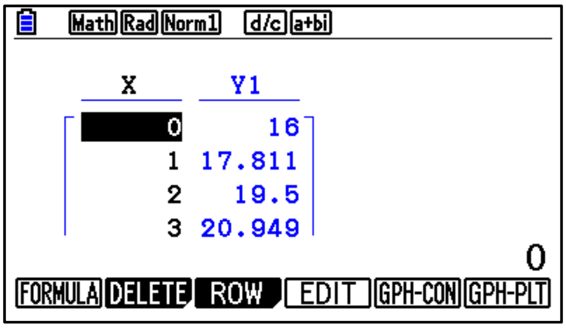


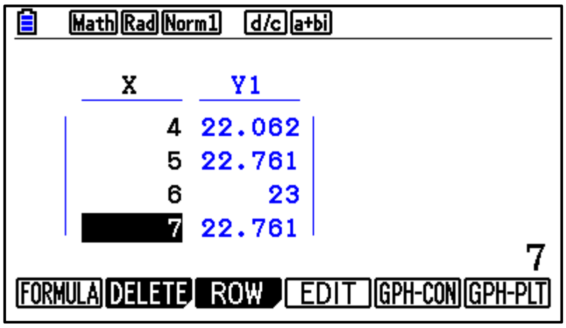


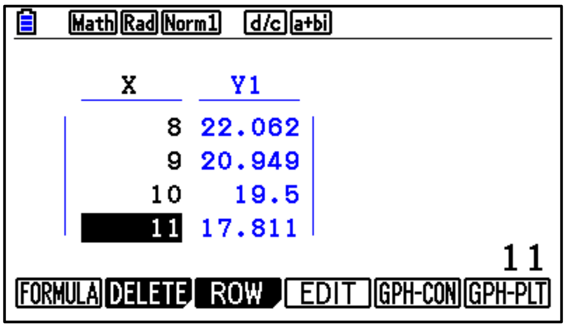
El vaixell pot atracar en el següent interval horari: $[0,1.69] \cup [10.31,24]$

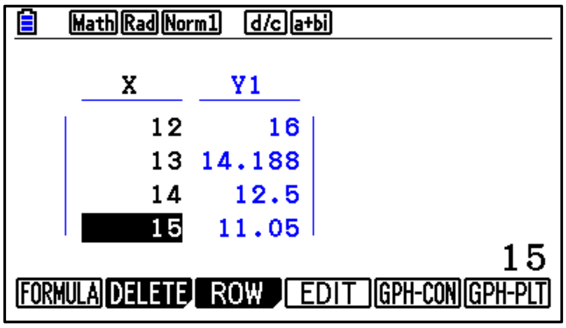
Construïm la taula de valors de la profunditat:

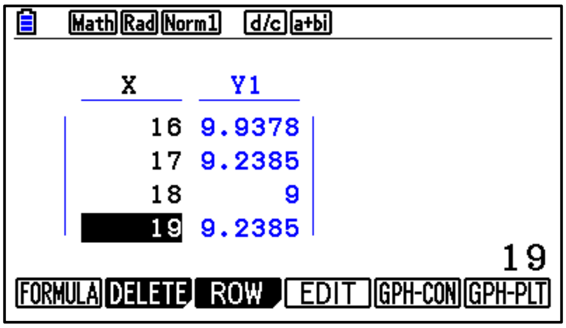


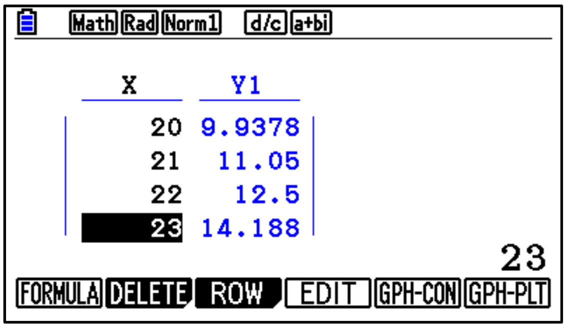





Math Rad Norm1 d/c a+bi
X Y1
8 22.062
9 20.949
10 19.5
11 17.811
11
FORMULA DELETE ROW EDIT GPH-CON GPH-PLT


Math Rad Norm1 d/c a+bi
X Y1
12 16
13 14.188
14 12.5
15 11.05
15
FORMULA DELETE ROW EDIT GPH-CON GPH-PLT


Math Rad Norm1 d/c a+bi
X Y1
16 9.9378
17 9.2385
18 9
19 9.2385
19
FORMULA DELETE ROW EDIT GPH-CON GPH-PLT

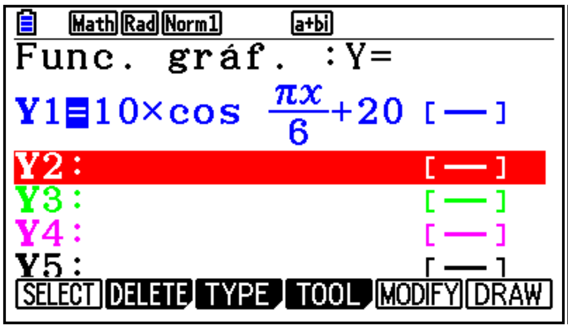

Math Rad Norm1 d/c a+bi
X Y1
20 9.9378
21 11.05
22 12.5
23 14.188
23
FORMULA DELETE ROW EDIT GPH-CON GPH-PLT

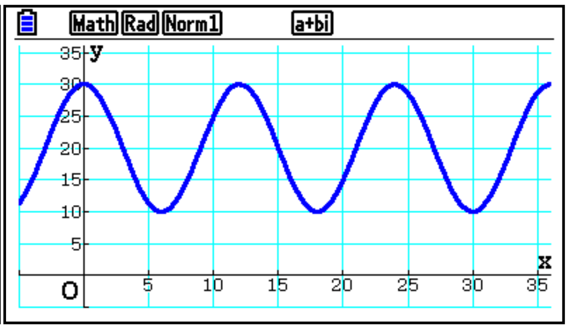
Problema 11

L'altura d'una de les aspes d'un molí de vent per a moldre blat ve donada per la funció
$H(t) = 10\, cos\left(\frac{\pi t}{6}\right) + 20$ metres, on t és el temps en segons.

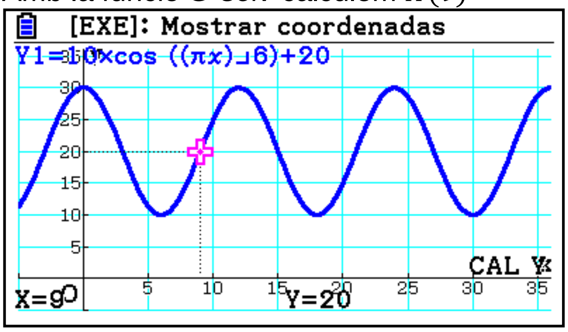
g) Dibuixeu la gràfica de $H(t)$ quan $0 \le t \le 36$
h) Quina és l'altura de l'aspa al cap de 9 segons? Ascendeix o descendeix?
i) Quina és l'altura mínima de l'aspa i en quins segons s'assoleix?
j) Quina és l'altura màxima de l'aspa i en quins segons s'assoleix?
k) Al cap de quin temps l'aspa completa una revolució?
l) En quins segons l'altura de l'aspa és de 15 metres?

Solució:
a)
Les mesures angulars han de ser radians.
Obrim el *Menú Gráfico* i definim la funció altura, $H(t) = 10\, cos\left(\frac{\pi t}{6}\right) + 20$

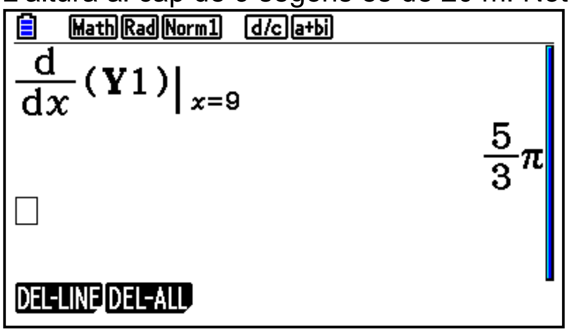




b)
Amb la funció *G-solv* calculem $H(9)$

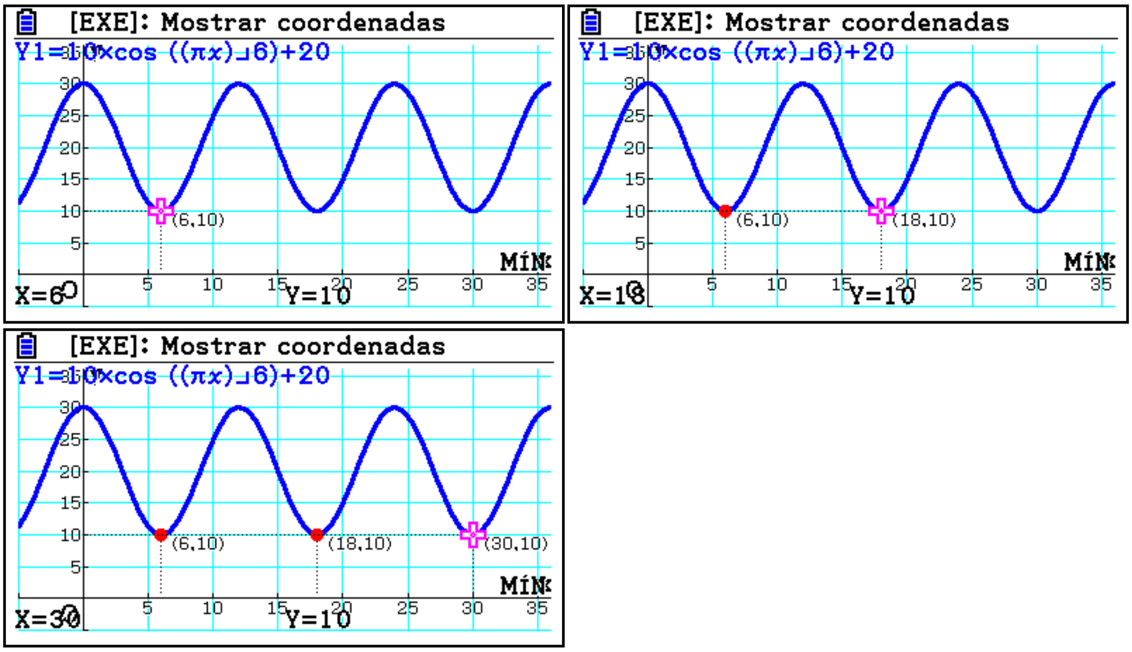


L'altura al cap de 9 segons és de 20 m. Notem que per a $t = 9$ la funció és creixent.

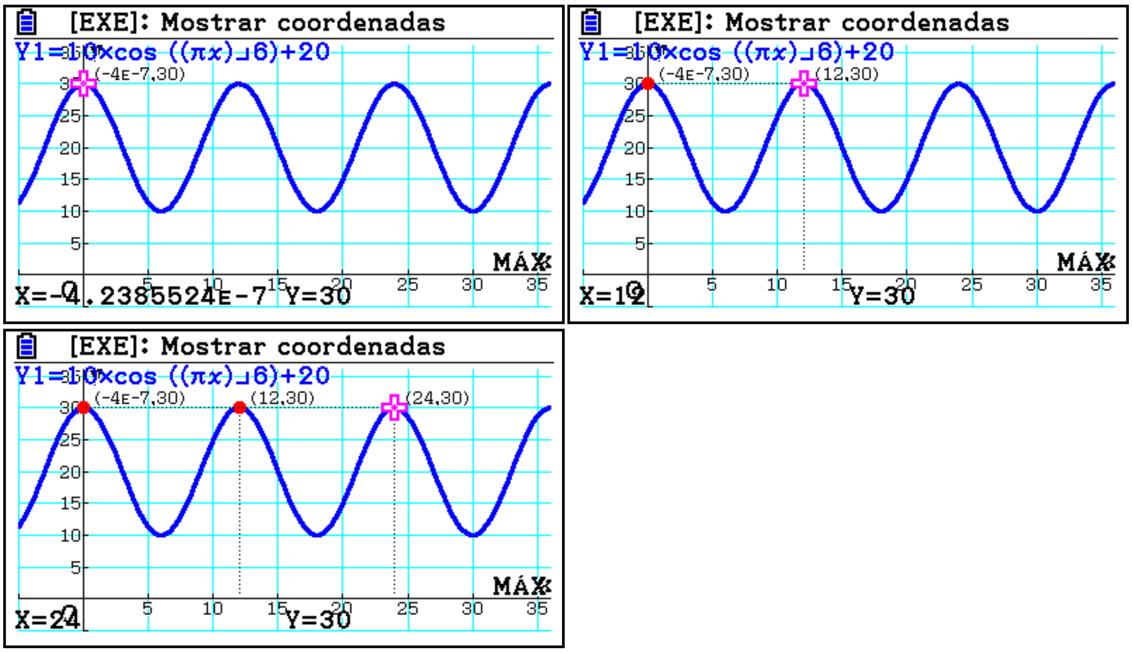


La derivada quan $t = 9$ és positiva, $\frac{d}{dx}(H(t))|_{t=9} = \frac{5}{3}\pi > 0$

c)
Amb la funció *G-Solv* determinem els mínims de la funció.



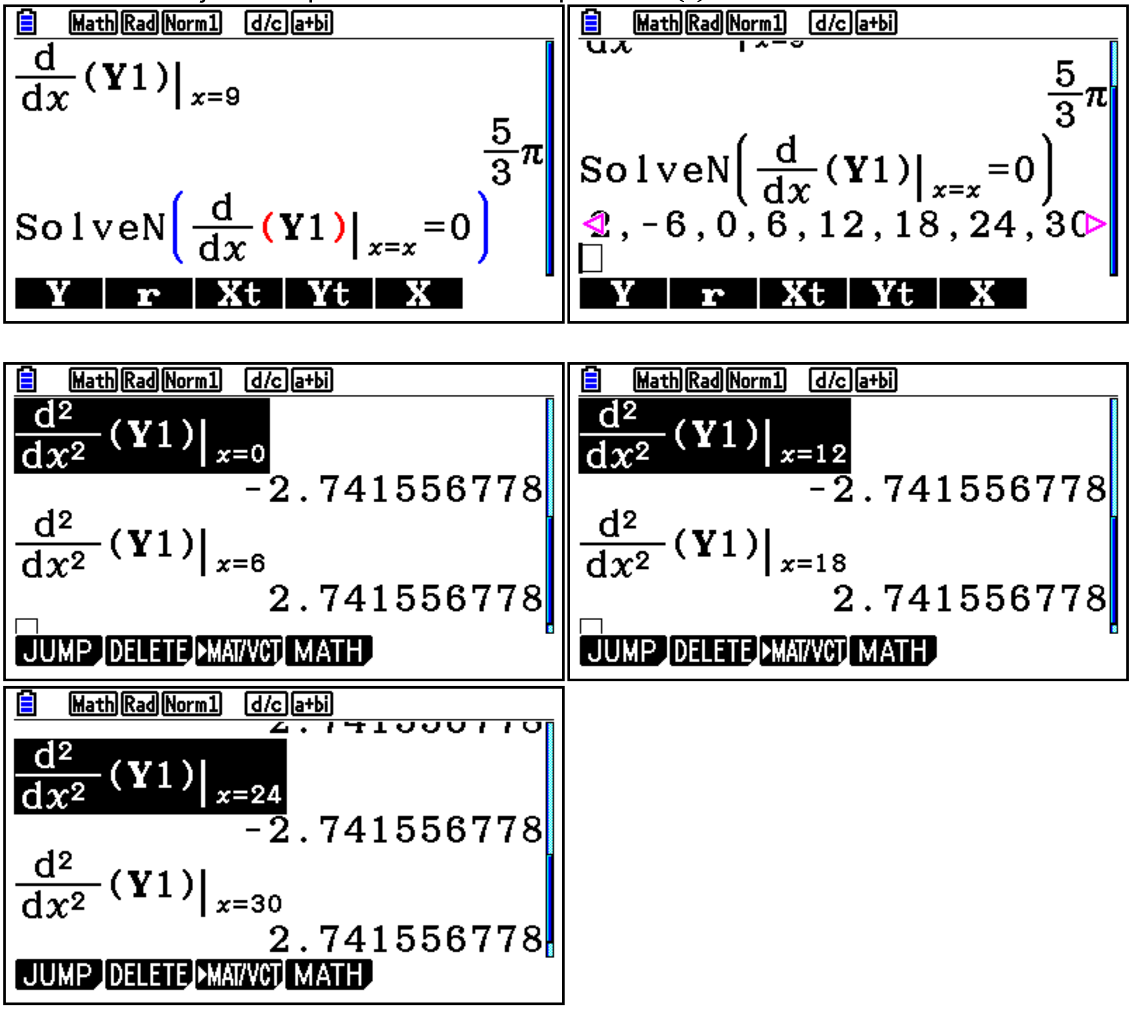
L'altura mínima és 10 m i s'assoleix quan $t = 6\ s, 18\ s, 30\ s$
d)
Amb la funció *G-Solv* determinem els màxims de la funció.



L'altura màxima és 30 m i s'assoleix quan $t = 0\ s, 12\ s, 24\ s$

c) d)

Amb el *Menú Ejec-Mat* podem resoldre l'equació $H'(t) = 0$



$H'(t) = 0$ quan $t = 0, 6, 12, 18, 24, 30$

$H"(0) < 0, H"(12) < 0, H"(24) < 0$

$H(0) = H(12) = H(24) = 30$

$H(6) = H(18) = H(30) = 10$

L'altura màxima és 30 m i s'assoleix quan $t = 0\ s, 12\ s, 24\ s$

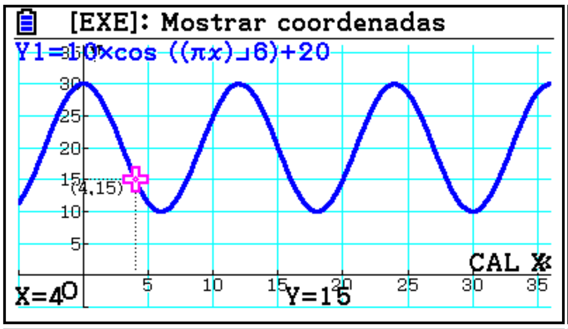
L'altura mínima és 10 m i s'assoleix quan $t = 6\ s, 18\ s, 30\ s$

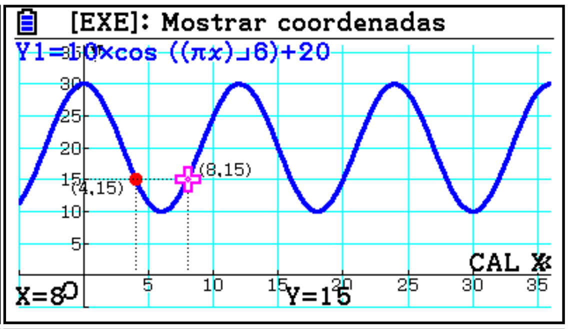
e)

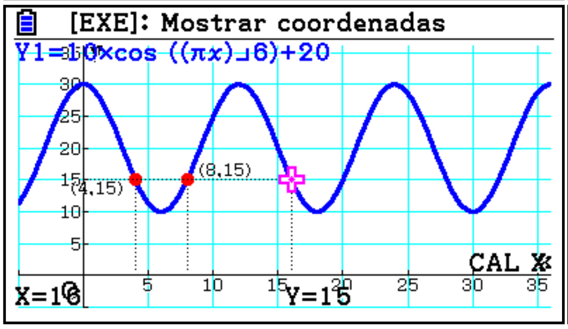
La revolució completa la fa al cap de 12 s

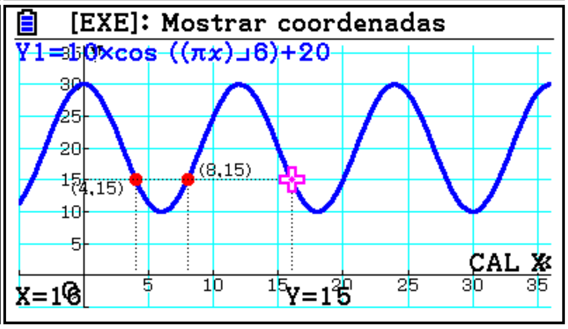
f)

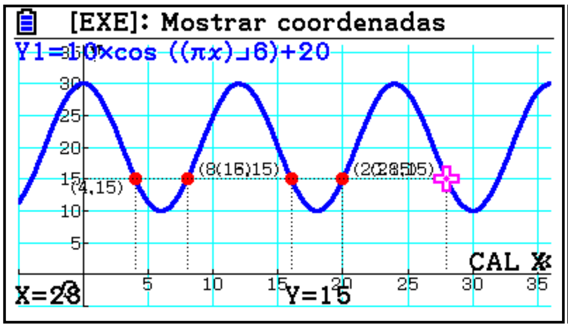
Amb la funció *G-Solv* calcularem $H(t) = 15$

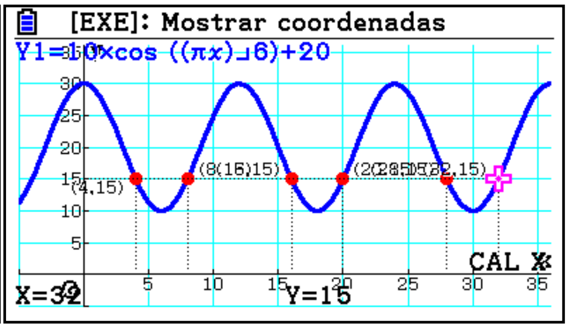








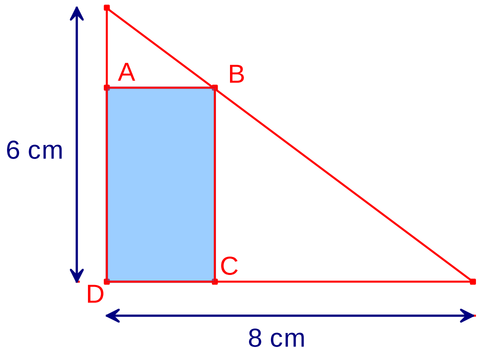




L’altura és de 15 metres quan:
$t = 4$ i l’aspa decreix.
$t = 8$ i l’aspa creix.
$t = 16$ i l’aspa decreix.
$t = 20$ i l’aspa creix.
$t = 28$ i l’aspa decreix.
$t = 32$ i l’aspa creix.

Problema 12

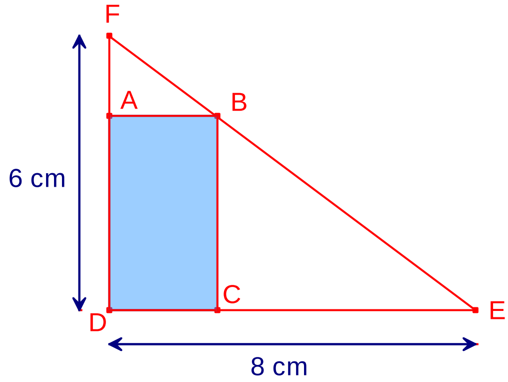
De tots els rectangles $ABCD$ inscrits en un triangle rectangle de catets 8 cm i 6 cm, determineu les dimensions del que té àrea màxima.



Solució:

Siga $\overset{\Delta}{DEF}$ el triangle rectangle de catets $\overline{DE} = 8, \overline{DF} = 6$

Siga $\overline{AB} = x, \overline{AF} = y$



Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{DEF}, \overset{\Delta}{ABF}$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{y}{6} = \frac{x}{8}$$

Aleshores, $y = \frac{3}{4}x$

$$\overline{AD} = 6 - \frac{3}{4}x$$

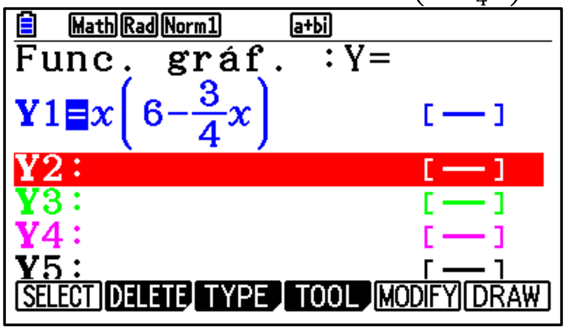
L'àrea del rectangle $ABCD$ és:

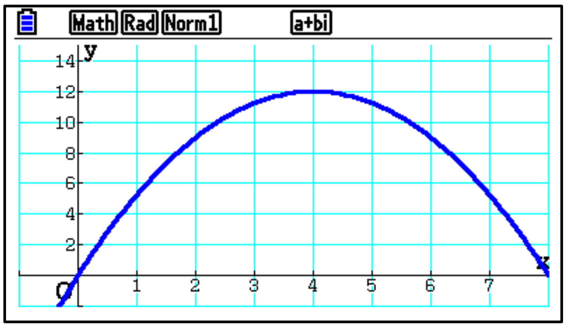
$$S(x) = x\left(6 - \frac{3}{4}x\right), x \in [0, 8]$$

La funció és una paràbola.

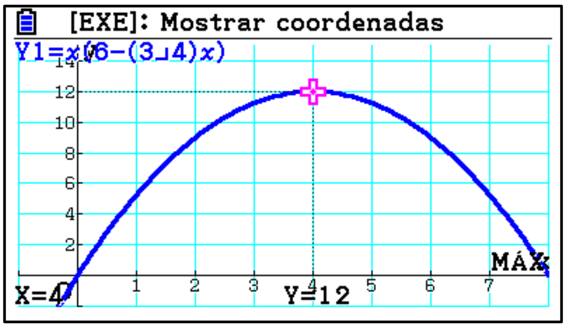
Obrim el *Menú Gráfico*

Definim la funció àrea $S(x) = x\left(6 - \frac{3}{4}x\right), x \in [0, 8]$





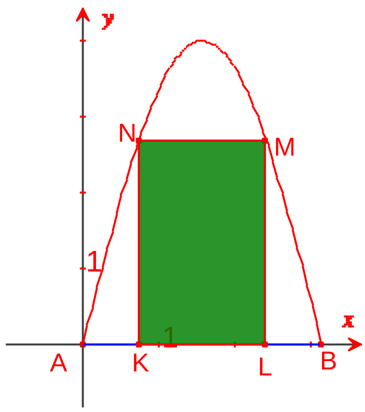
Amb la funció *G-Solv* determinem el màxim de la funció



L'àrea màxima del rectangle $ABCD$ s'assoleix quan $\overline{AB} = 4\ cm$.

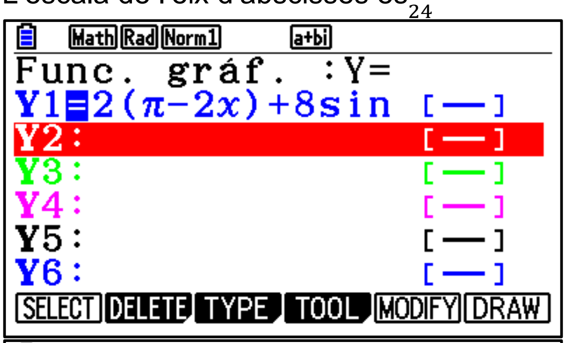
L'àrea màxima és $12\ cm^2$

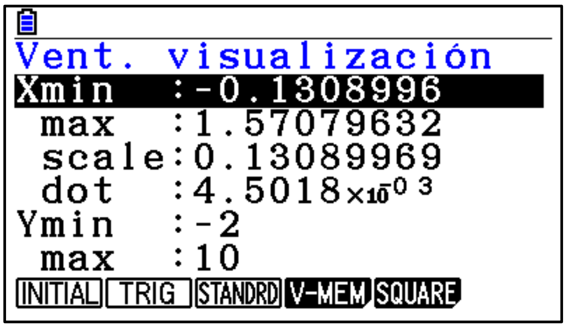
Problema 13
En el plànol cartesià considerem els punts $A(0,0), B(\pi,0)$.
Siga la regió plana limitada pel segment $\overline{AB}$, l’arc de corba de la funció $y = 4\sin x$ amb $0 \le x \le \pi$.
Calculeu el màxim perímetre del rectangle inscrit en la regió tal que un costat estiga contingut en el segment $\overline{AB}$.

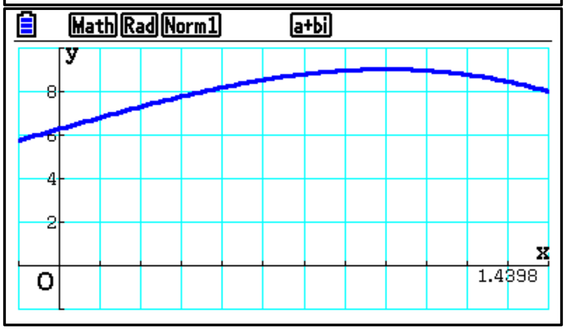


Solució 1:
La corba $y = 4\sin x$ és simètrica respecte de la recta $x = \frac{\pi}{2}$
Siga KLMN el rectangle inscrit en la regió.
Per la simetria de la funció, $\overline{AK} = \overline{LB} = x$
$\overline{KN} = 4\sin x$
El perímetre de la funció és:
$P(x) = 2(\pi - 2x) + 8\sin x, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

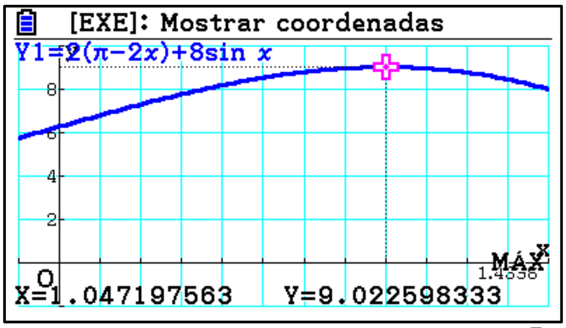
Obrim el *Menú Gràfico*
Definim i representem la funció perímetre.
L’escala de l’eix d’abscisses és $\frac{\pi}{24}$



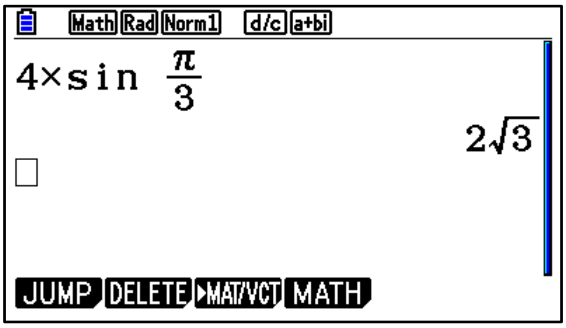




Amb la funció *G-Solv* calculem el màxim de la funció.

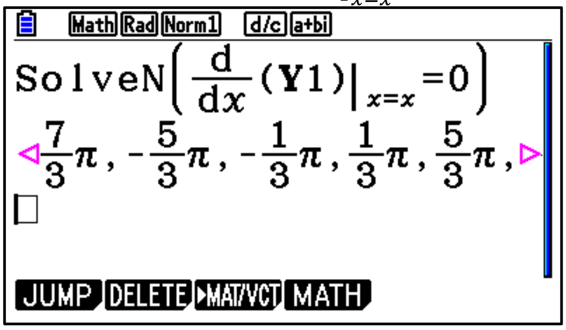


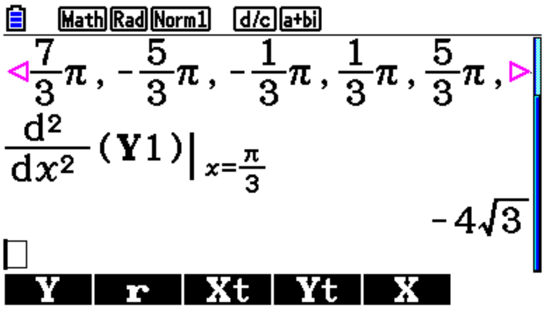
El perímetre màxim s’assoleix quan $x = \frac{\pi}{3}$
El perímetre màxim és aproximadament $P_{màx} \approx 9.0226$



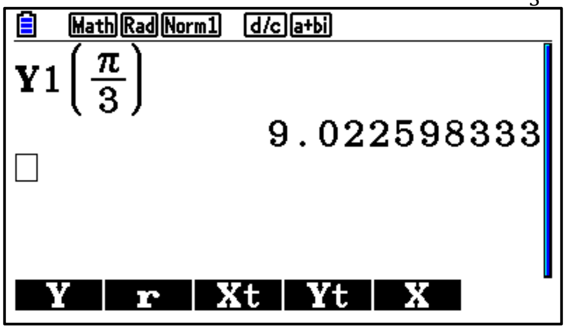
Les dimensions del rectangle de perímetre màxim són:
$\overline{KL} = \frac{\pi}{3}, \overline{KN} = 2\sqrt{3}$

Solució 2:
Obrim el *Menú Ejec-Mat*
Resolem l'equació $\frac{d}{dx}(Y1)\Big|_{x=x} = 0$





El perímetre màxim s'assoleix quan $x = \frac{\pi}{3}$

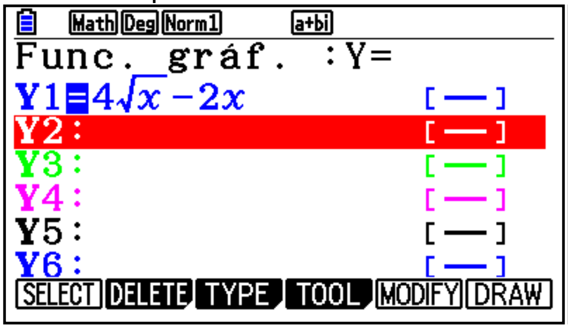


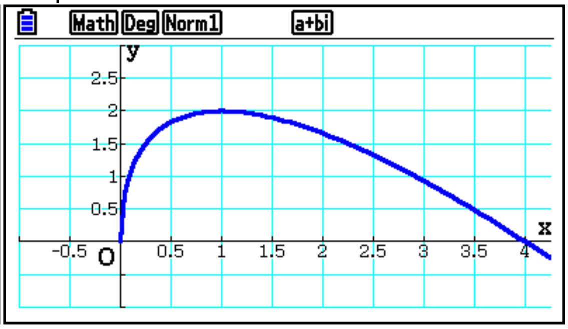
El perímetre màxim és aproximadament $P_{màx} \approx 9.0226$

Problema 14
El disseny (maqueta) d’una pista d’esquí artificial està modelitzada per la funció
$h(d) = 4\sqrt{d} - 2d$
On d és la distància en la horitzontal en metres i $h(d)$ l’altura en metres.

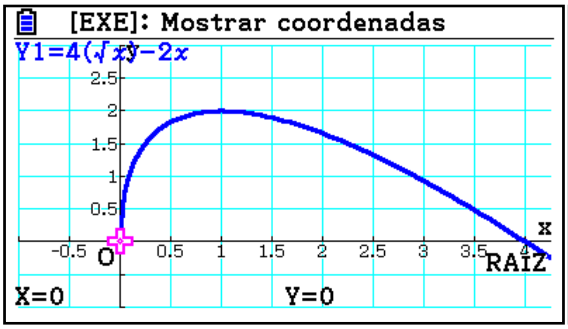
e) A quina distància horitzontal l’altura és 0.
f) A quina distància horitzontal l’altura és 1.
g) Quina és l’altura màxima de la maqueta.
h) Quina és la taxa de variació instantània (gradient) en $d = 2\ m$

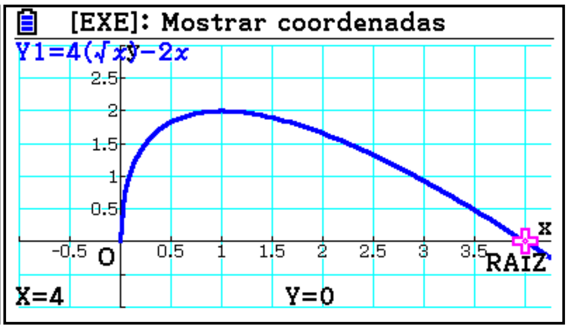
Solució:
a)
Obrim el *Menú Gráfico*.
Definim i representem la funció altura de la maqueta.





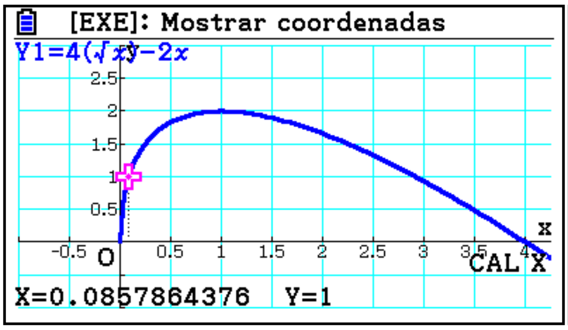
Amb la funció *G-Solv* determinem els punts on l’altura és zero $h(d) = 0$ de tall amb l’eix d’abscisses de la funció altura.

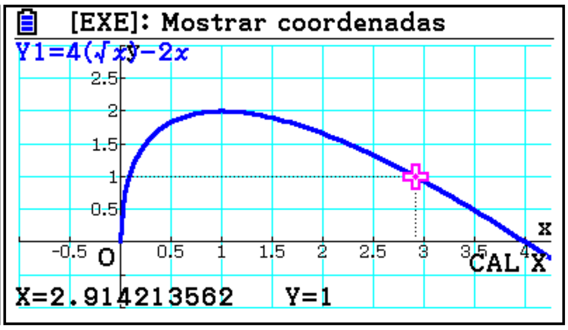




L’altura de la maqueta és 0 quan $d = 0, 4\ metres$

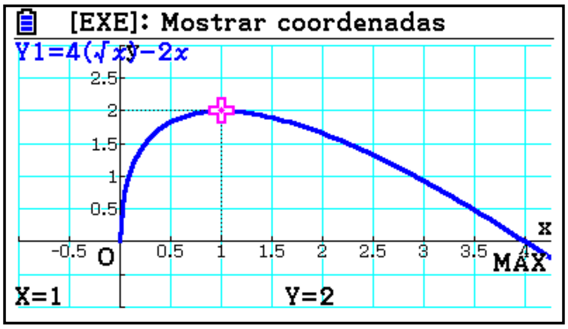
b)
Amb la funció *G-Solv* calculem $h(d) = 1$





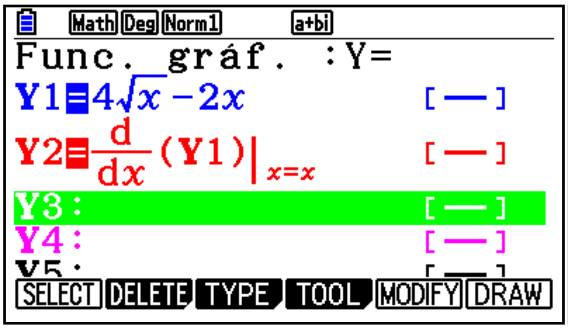
L’altura de la maqueta és 1 quan $d \approx 0.09, 2.91\ metres$

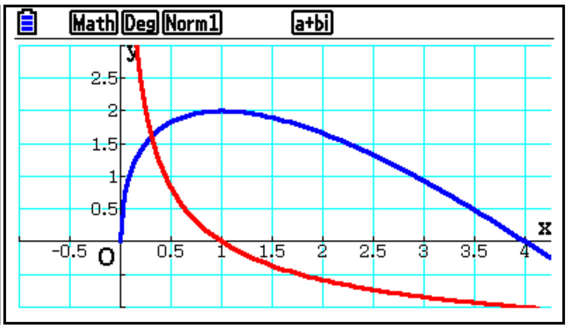
c)
Per calcular l’altura màxima determinem amb la funció *G-Solv* el màxim de la funció:



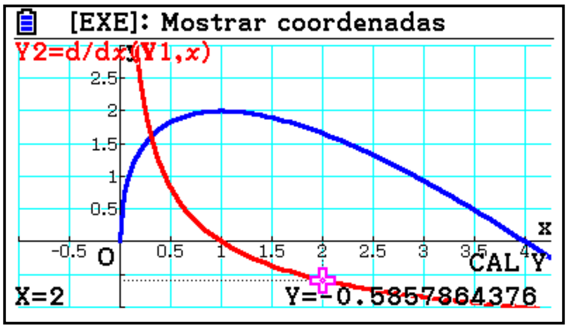
El màxim s’assoleix quan $d = 1\ metre$ i l’altura màxima és $h(1) = 2\ metres$

d)
Definim la funció derivada de la funció:





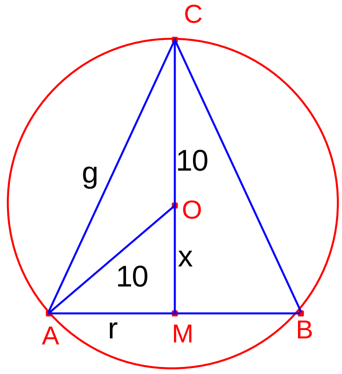
Per calcular el gradient en $d = 2$ calculem $Y2(2)$ en la funció *G-Solv*.



El gradient el $d = 2$ és $h'(2) = -0.59$

Problema 15
De tots els cons inscrits en l'esfera de radi 10 cm determineu les dimensions d'aquell que té àrea lateral màxima.

Solució:
Siga O el centre de l'esfera.
Siga $\overline{MA} = r$, radi del con.
Siga $\overline{AC} = g$, generatriu del con.
Siga $\overline{OM} = x$
L'àrea lateral del con és:
$S = \pi r g$

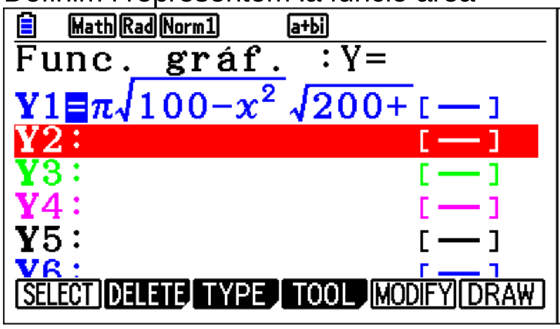


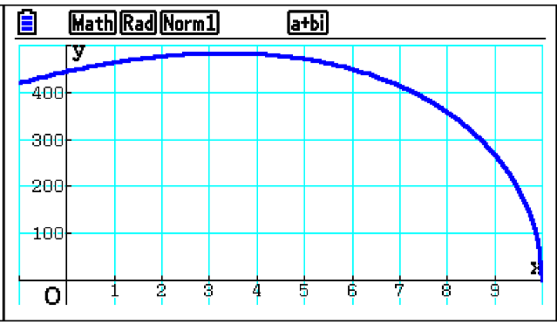
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMO}$:
$100 = r^2 + x^2$. Aleshores, $r^2 = 100 - x^2$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMC}$:
$g^2 = r^2 + (10 + x)^2$
$g^2 = 100 - x^2 + (10 + x)^2$
$g^2 = 200 + 20x$

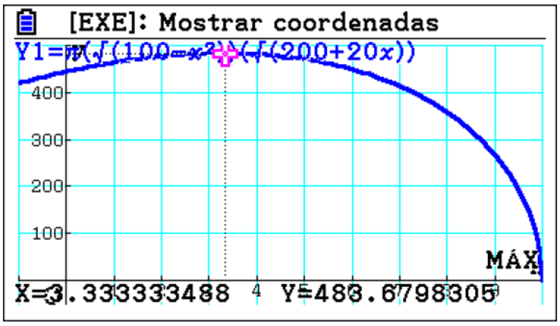
Aleshores, l'àrea lateral és:
$S(x) = \pi\sqrt{100 - x^2}\sqrt{200 + 20x}, \qquad 0 \le x \le 10$

Obrim el *Menú Gràfico*:
Definim i representem la funció àrea



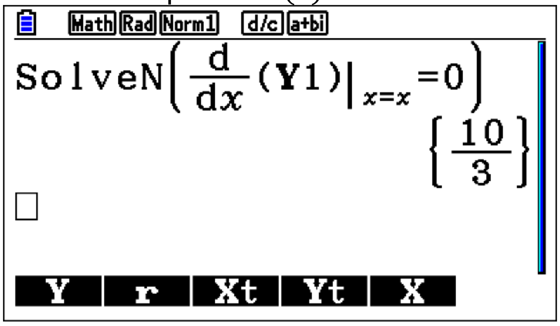


Amb la funció *G-Solv* determinem el màxim de la funció:

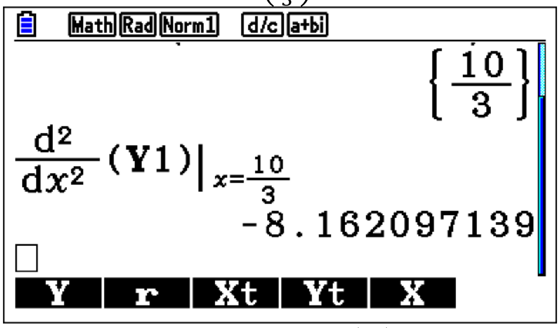


El màxim s'assoleix quan $x = \frac{10}{3} \approx 3.33\ cm$
L'àrea lateral màxima del con és $S_{màx} \approx 483.68\ cm^3$
Les dimensions del con són:
El radi $\sqrt{100 - \left(\frac{10}{3}\right)^2} = \frac{20\sqrt{2}}{3}$ i l'altura $h = x + 10 = \frac{40}{3}$.

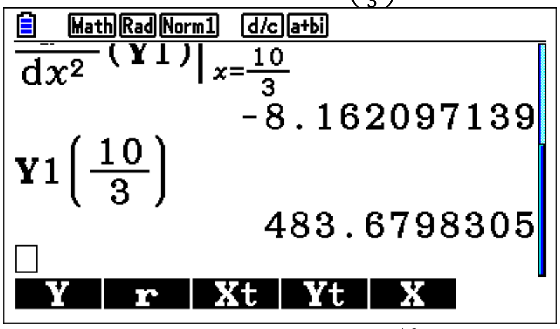
Obrim el *Menu Ejec-Mat*
Resolem l'equació: $S'(x) = 0$



Comprovem que $S"\left(\frac{10}{3}\right) < 0$

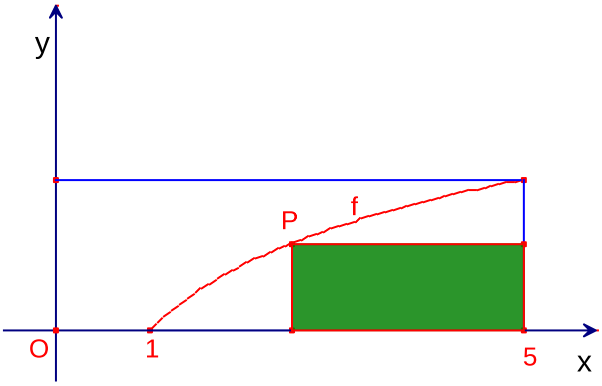


Calculem l'àrea màxima $S\left(\frac{10}{3}\right)$



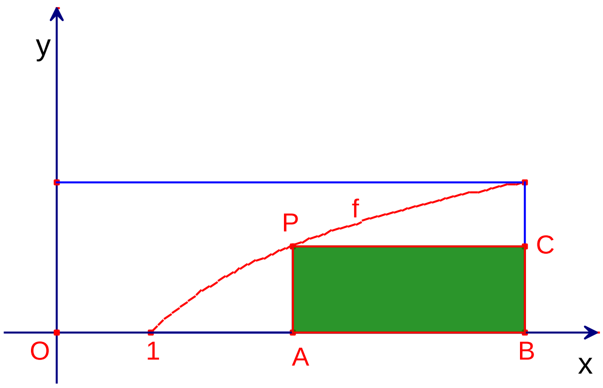
El màxim s'assoleix quan $x = \frac{10}{3} \approx 3.33\ cm$
L'àrea lateral màxima del con és $S_{màx} \approx 483.68\ cm^3$

Problema 16
Siga la funció f de domini $[1, 5]$ definida per $f(x) = \ln x$, la seua gràfica és:

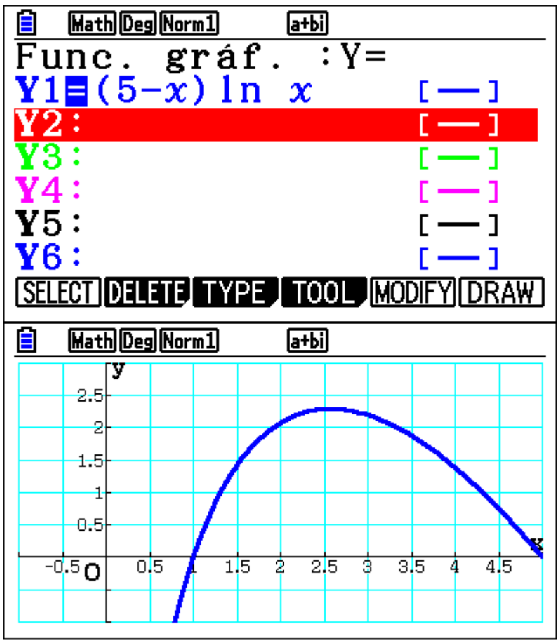


Siga P un punt que recorre la gràfica.
Per a cada punt P és considera el rectangle en què un dels costats pertany a l'eix d'abscisses, un altre costat en la recta $x = 5$, els catres dos costats en les rectes verticals i horitzontals que passen per P.
Expresseu l'àrea del rectangle en funció de l'abscissa de P.
Representeu la gràfica de la funció àrea.
Determineu les coordenades del punt P per a la qual l'àrea del rectangle és màxima.
Calculeu l'àrea màxima.

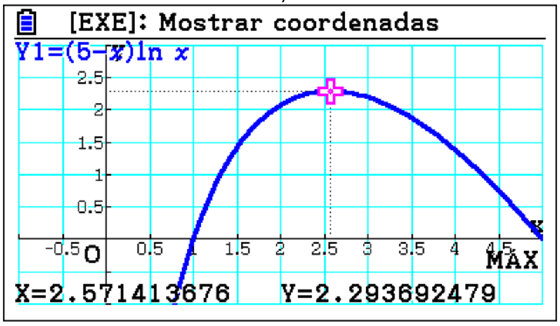
Solució:
Les coordenades de P són:
$P(x, \ln x)$
Siga $ABCP$ el rectangle.
$\overline{AB} = 5 - x, \overline{AP} = \ln x$
La funció àrea és:
$S(x) = (5 - x) \ln x,\ x \in [1, 5]$



Obrim el *Menú Gràfico*.
Definim i representem la funció àrea.

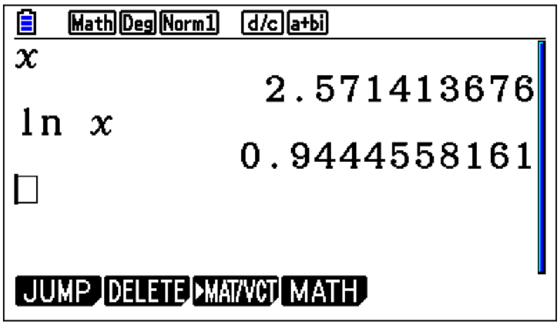


Amb la funció *G-Solv*, determinem el màxim de la funció àrea



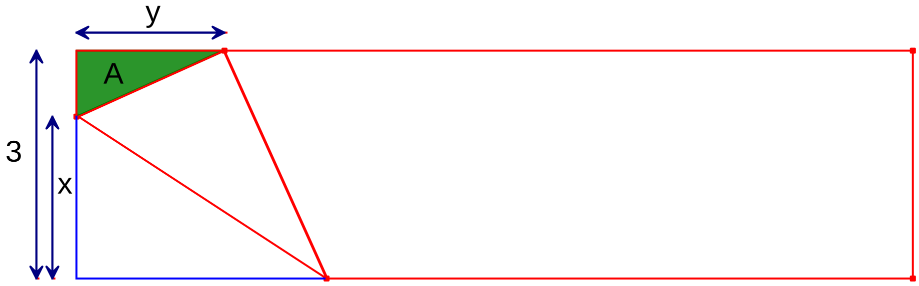
L'àrea màxima s'assoleix quan $x \approx 2.57$
L'àrea màxima és aproximadament 2.29

Obrim el *Menú Ejec-Mat.*
Calculem $\ln(x_{màx})$

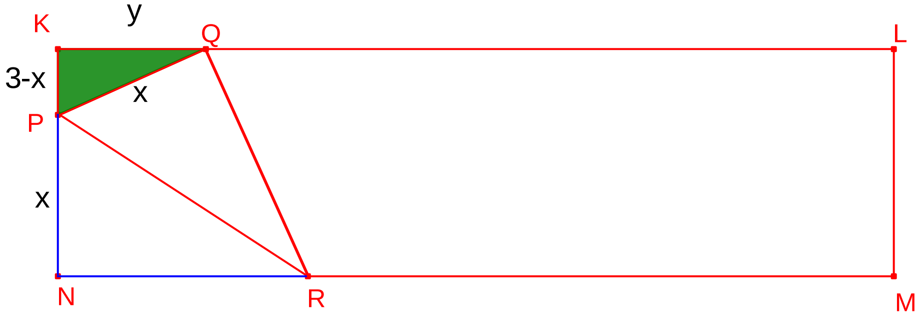


Les coordenades del punt P que fan màxima l'àrea són aproximadament:
$P(2.57, 0.94)$

Problema 17
El cantó d'una tira de paper de 3 cm d'ample es dobla com mostra la figura.
Calculeu el valor de x que fa màxima l'àrea del triangle A.

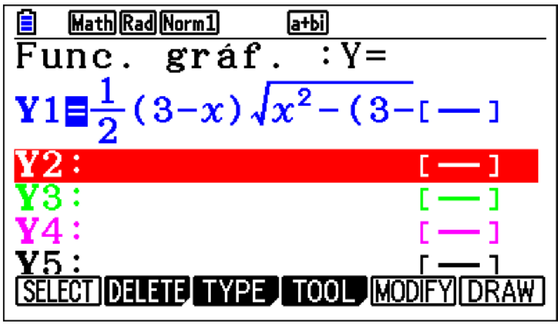


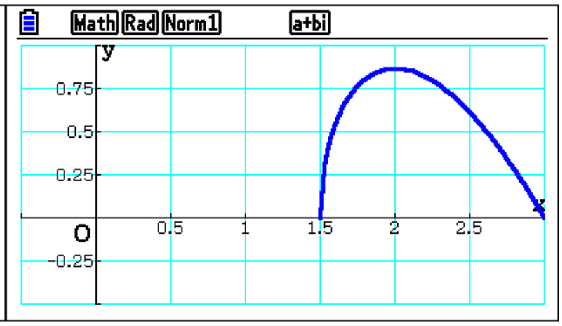
Solució:



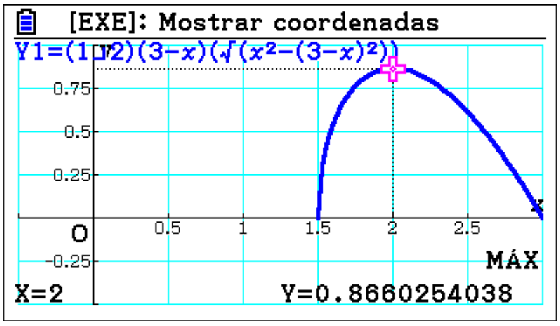
Siga $KLMN$ la tira d'amplària $\overline{KN}=3$
Siga $\overline{PN}=\overline{PQ}=x$
Siga $\overline{KQ}=y$
L'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{PKQ}$ és:
$$S(x,y)=\frac{1}{2}(3-x)y$$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PKQ}$:
$$y^2=x^2-(3-x)^2$$
$$y=\sqrt{x^2-(3-x)^2}$$
L'àrea del triangle és:
$$S(x)=\frac{1}{2}(3-x)\sqrt{x^2-(3-x)^2}, \qquad 0\le x\le 3$$

Obrim el *Menú Gráfico*.
Definim i representem la funció àrea:



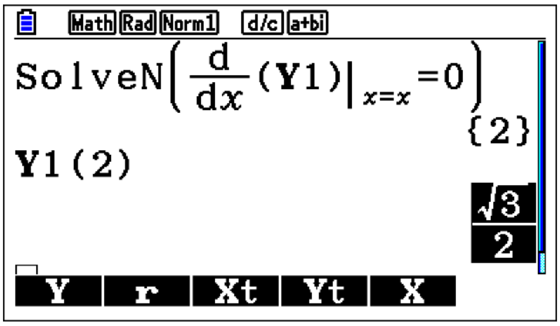


Amb la funció *G-Solv*, determinem el màxim de la funció:



El màxim s’assoleix quan $x = 2\ cm$ i l’àrea màxima és aproximadament,
$S \approx 0.8660\ cm^2$

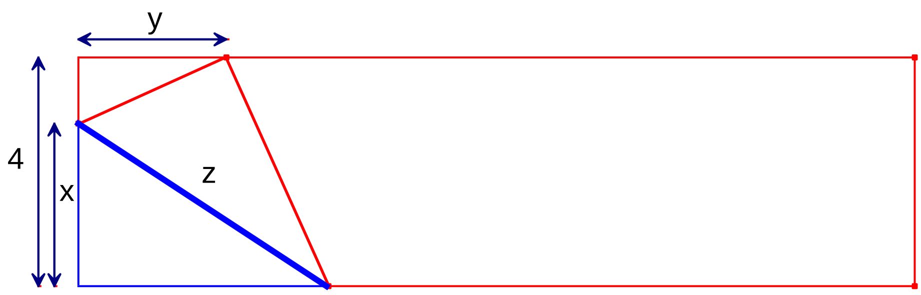
Obrim el *Menú Ejec-Mat*
Resolent l’equació:
$S'(x) = 0$



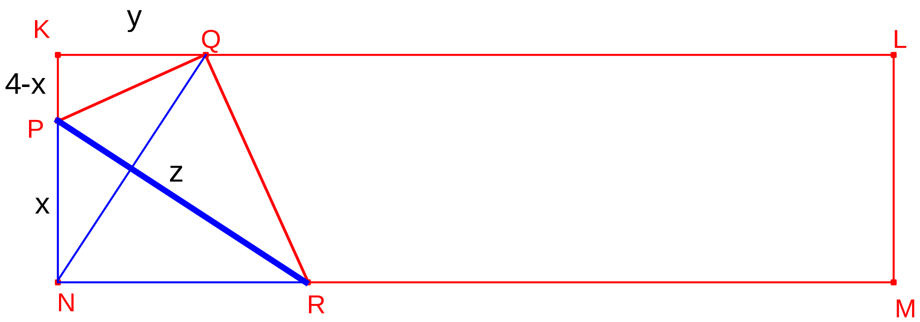
El màxim s’assoleix quan $x = 2\ cm$ i l’àrea màxima és aproximadament,

$$S = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.8660\ cm^2$$

Problema 18
El cantó d'una tira de paper de 4 cm d'ample es dobla com mostra la figura.
Calculeu el valor de x que fa mínima la longitud del segment z, segment del doblat.



Solució:

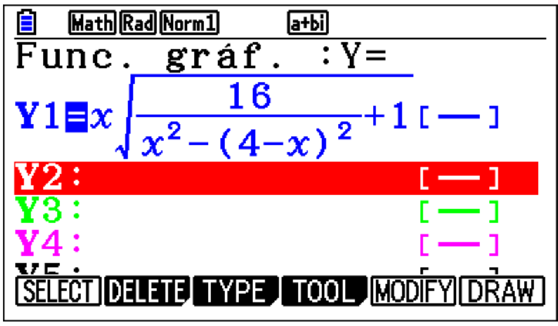


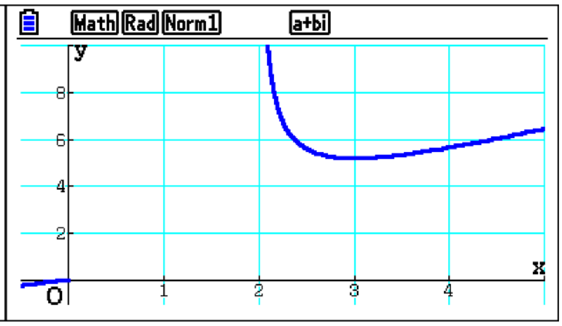
Siga $KLMN$ la tira d'amplària $\overline{KN} = 4$
Siga $\overline{PN} = \overline{PQ} = x$, Siga $\overline{KQ} = y$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PKQ}$:
$y^2 = x^2 - (3 - x)^2$
$y = \sqrt{x^2 - (3 - x)^2}$

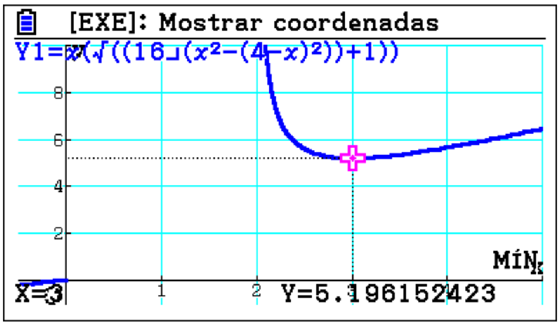
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{PQR}, \overset{\Delta}{PNR}$ són iguals, aleshores:
Els segments $\overline{PR} = \overline{QN}$ són perpendiculars.

Els triangles $\overset{\Delta}{QKN}, \overset{\Delta}{PNR}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{y}{x} = \frac{\sqrt{4^2 + y^2}}{z}$$
Aïllant z:
$$z = \frac{x}{y}\sqrt{16 + y^2} = x\sqrt{\frac{16}{x^2 - (4 - x)^2} + 1}$$
Obrim el *Menú Gráfico*.
Definim i representem la funció longitud z:



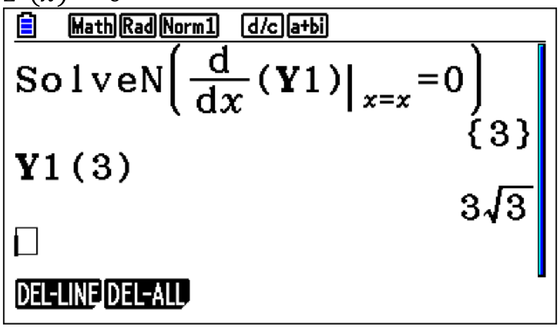


Amb la funció *G-Solv*, determinem el mínim de la funció:



El mínim s'assoleix quan $x = 3\ cm$ i la longitud mínima és aproximadament,
$z \approx 5.1962\ cm$

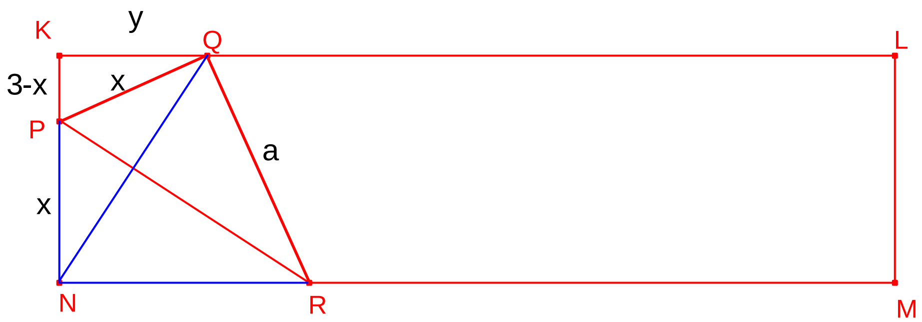
Obrim el *Menú Ejec-Mat*
Resolent l'equació:
$z'(x) = 0$



El mínim s'assoleix quan $x = 3\ cm$ i la longitud mínima és:
$z = 3\sqrt{3} \approx 5.1962\ cm$

Problema 19
El cantó d'una tira de paper de 3 cm d'ample es dobla com mostra la figura.
Calculeu el valor de x que fa màxima l'àrea del triangle B.

Solució:



Siga KLMN la tira d'amplària $\overline{KN} = 3$
Siga $\overline{PN} = \overline{PQ} = x$
Siga $\overline{KQ} = y$
Siga $\overline{QR} = \overline{NR} = a$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PKQ}$:
$y^2 = x^2 - (3-x)^2$

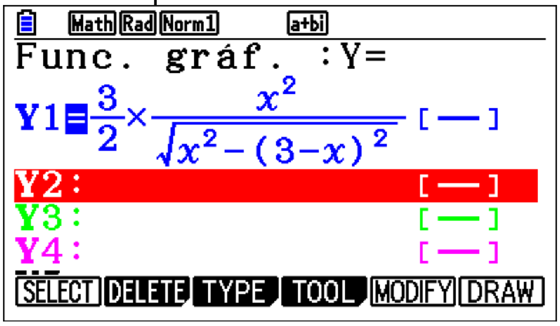
$y = \sqrt{x^2 - (3-x)^2}$

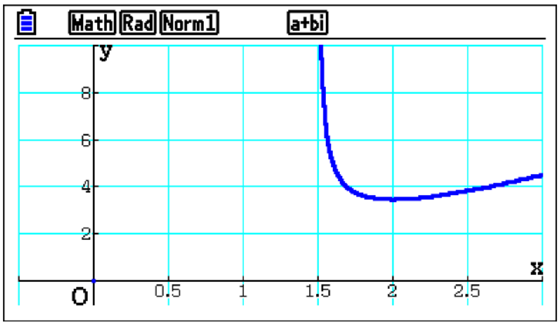
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{PQR}, \overset{\Delta}{PNR}$ són iguals, aleshores:
Els segments $\overline{PR} = \overline{QN}$ són perpendiculars.

Els triangles $\overset{\Delta}{QKN}, \overset{\Delta}{PQR}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{y}{3} = \frac{x}{a}$$
Aïllant a:
$$a = \frac{3x}{y} = \frac{3x}{\sqrt{x^2 - (3-x)^2}}$$

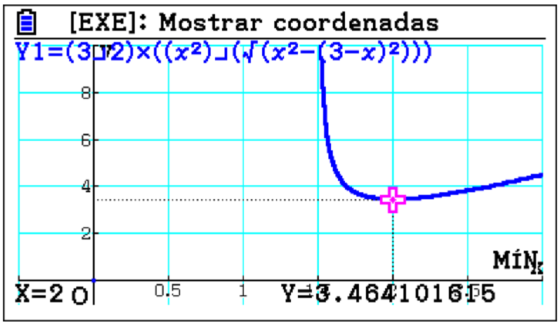
L'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{PQR}$ és:
$$S = \frac{1}{2}x \cdot a = \frac{3}{2}\frac{x^2}{\sqrt{x^2 - (3-x)^2}}$$

Obrim el *Menú Gráfico*.
Definim i representem la funció àrea:



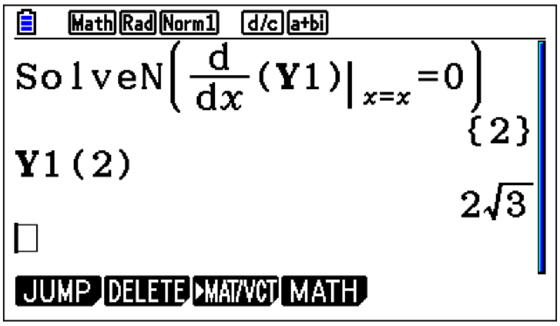


Amb la funció *G-Solv*, determinem el mínim de la funció:



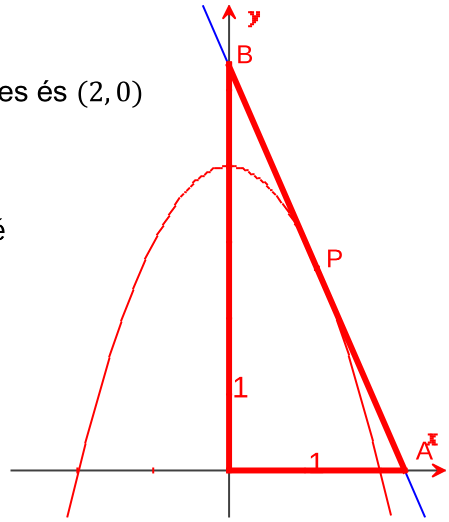
El mínim s’assoleix quan $x = 2\ cm$ i l’àrea mínima és aproximadament, $S \approx 3.4641\ cm^2$

Obrim el *Menú Ejec-Mat*
Resolent l’equació:
$S'(x) = 0$



El mínim s’assoleix quan $x = 2\ cm$ i l’àrea mínima és
$S = 2\sqrt{3} \approx 3.4641\ cm^2$

Problema 20
Considereu la paràbola d'equació $y = 4 - x^2$ en el primer quadrant.
Cadascuna de les rectes tangents a la paràbola delimita amb els eixos coordenats un triangle.
Determineu el punt de tangència tal que l'àrea del triangle siga mínima.

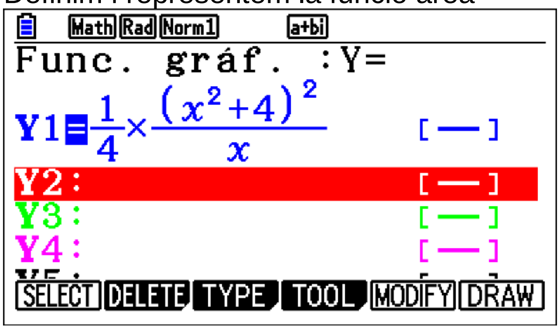


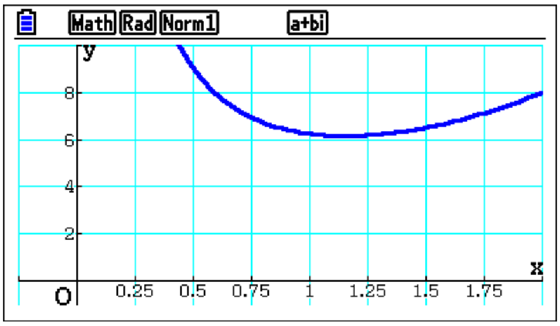
Solució:
Siga $f(x) = 4 - x^2$.
El punt de tall de la paràbola amb l'eix positiu de les abscisses és $(2, 0)$
Siga P el punt de la paràbola en el primer quadrant.
Les seues coordenades són $P(a, 4 - a^2)$, $0 \leq a \leq 2$.
$f'(x) = -2x$
L'equació de la recta tangent a la paràbola en $P(a, 4 - a^2)$ té equació:
$r_T \equiv y = -2a(x - a) + 4 - a^2$

Si $y = 0$
$o = -2a(x - a) + 4 - a^2$
Resolent l'equació:
$$x = \frac{a^2 + 4}{2a}$$
El punt de tal de la recta tangent i l'eix d'abscisses és:
$$A\left(\frac{a^2 + 4}{2a}, 0\right)$$

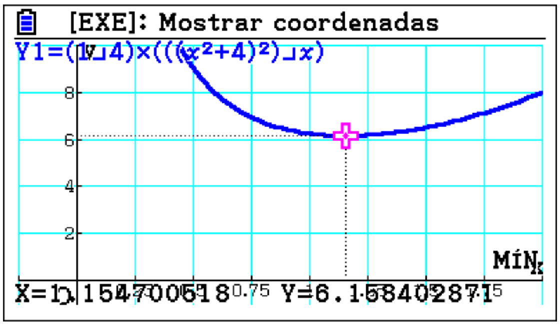
Si $x = 0$
$y = -2a(0 - a) + 4 - a^2$
Aleshores:
$y = a^2 + 4$
El punt de tal de la recta tangent i l'eix d'ordenades és:
$B(0, a^2 + 4)$
L'àrea del triangle format per la recta tangent en el primer quadrant és:
$$S(a) = \frac{1}{2}\frac{(a^2 + 4)^2}{2a}$$
$$S(a) = \frac{1}{4}\frac{(a^2 + 4)^2}{a}, \qquad 0 \leq a \leq 2$$

Obrim el *Menú Gráfico 3D*
Definim i representem la funció àrea



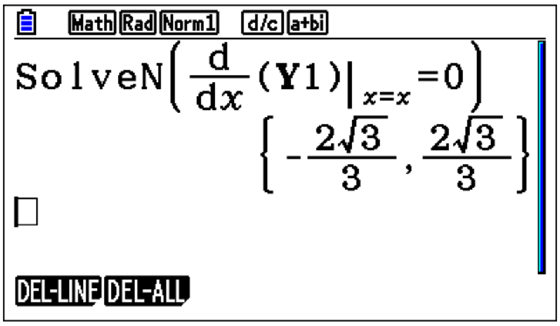


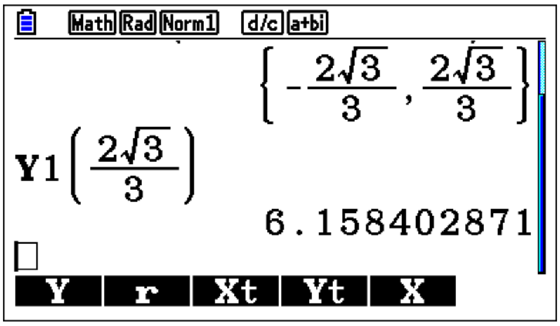
Amb la funció *G-Solv* determinem el mínim de la funció:



El mínim s'assoleix aproximadament quan $x \approx 1.1547$
L'àrea mínima és aproximadament $S_{Mín} \approx 6.1584$

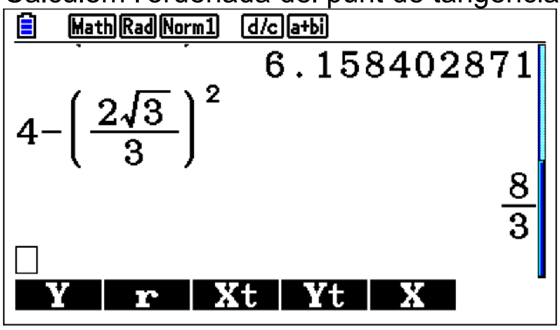
Obrim el *Menú Ejec-Mat.*
Resolem l'equació $S'(x) = 0$





El mínim s'assoleix quan $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$
L'àrea mínima és aproximadament $S_{Mín} \approx 6.1584$

Calculem l'ordenada del punt de tangència:



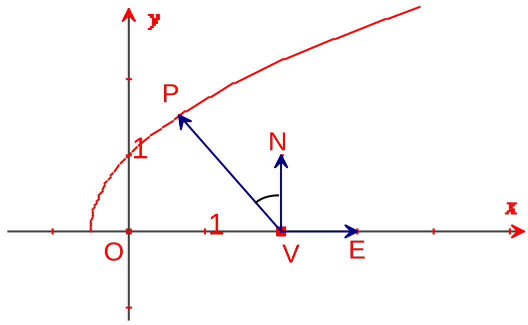
El punt de tangència és:

$$P\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{8}{3}\right)$$

Problema 21
Un vaixell es troba en el punt $V(2,0)$.
La línia de costa ve donada per la corba $y=\sqrt{2x+1}$

Quin angle ha de desviar el vaixell de la direcció nord si vol arribar en línia recta al punt més proper de la costa. (L'eix positiu d'abscisses el la direcció est)

Solució:

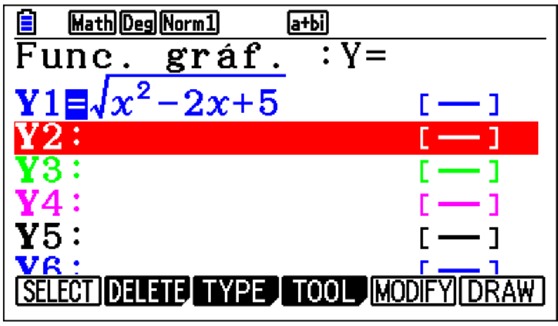


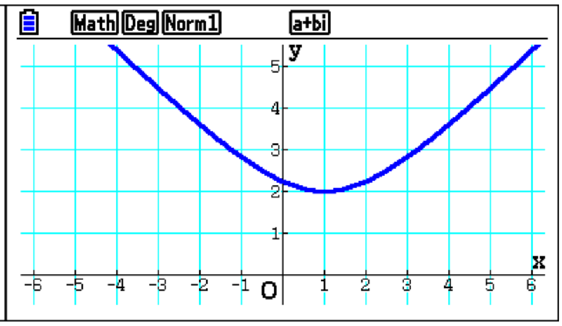
Determinem el punt més proper de la costa.
Siga $P\left(x,\sqrt{2x+1}\right)$ el punt més proper, $x\geq -\frac{1}{2}$.

$\overline{VP}=\sqrt{(x-2)^2+\left(\sqrt{2x+1}\right)^2}$

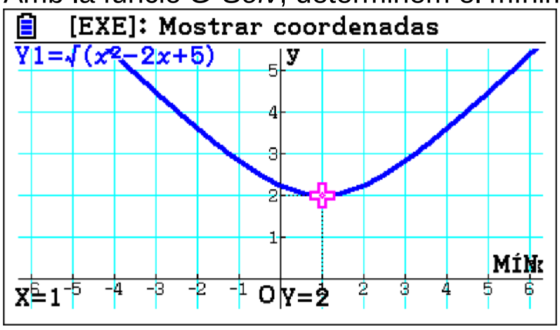
$\overline{VP}=\sqrt{x^2-2x+5}$

Considerem la funció distància:
$d(x)=\sqrt{x^2-2x+5}$
Obrim el *Menú Gràfico*
Definim i representem la funció distància.





Amb la funció *G-Solv*, determinem el mínim de la funció.



El mínim s'assoleix quan $x=1$
La distància mínima és 2

Les coordenades del punt de la costa de distància mínima són:
$P(1,\sqrt{3})$

El pendent de la recta OP és:
$m=\dfrac{\sqrt{3}-0}{1-2}=-\sqrt{3}$

$\angle OVP=\arctan\sqrt{3}=60°$

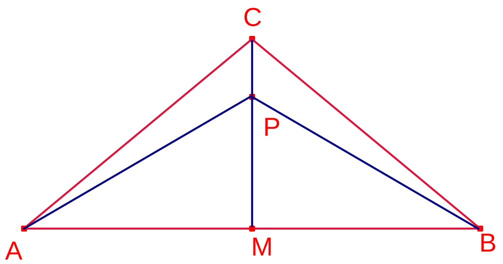
L'angle que s'ha de desviar el vaixell és:
$\angle PVN=90°-60°=30°$

Solució 2:
Siga $P\left(x,\sqrt{2x+1}\right)$ el punt més proper.
$\overline{VP}=\sqrt{(x-2)^2+\left(\sqrt{2x+1}\right)^2}$
$\overline{VP}=\sqrt{x^2-2x+5}$

El punt més proper de la costa s'assoleix en el mínim de la funció.
$g(x)=x^2-2x+5$
La funció és una paràbola còncava.
El mínim s'assoleix en el vèrtex:
El mínim s'assoleix quan $x=\frac{-(-2)}{2\cdot 1}=1$
Les coordenades del punt de la costa de distància mínima són:
$P(1,\sqrt{3})$

Problema 22
El costat desigual d'un triangle isòsceles mesura 12 i l'altura sobre el costat desigual 5. Determineu el punt d'aquesta altura tal que la suma de les distàncies als tres vèrtexs siga mínima. Calculeu la suma de les distàncies mínima.

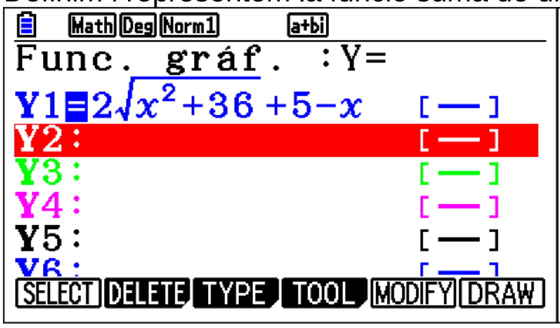
Solució:
$\overline{AB} = 12, \overline{AC} = \overline{BC}$

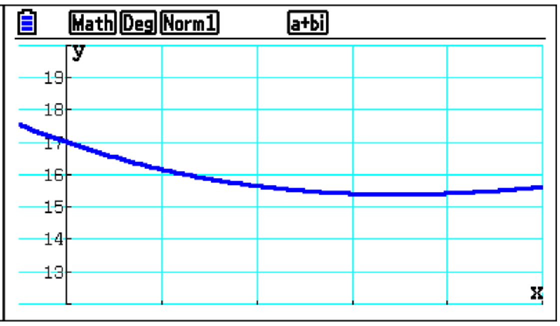


Siga el triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overline{AB} = 12$, $\overline{AC} = \overline{BC}$.
Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$. $\overline{CM} = 5$.
$\overline{AM} = \overline{BM} = 6$
Siga P un punt en l'altura.
Siga $\overline{PM} = x$.
$\overline{CP} = 5 - x$

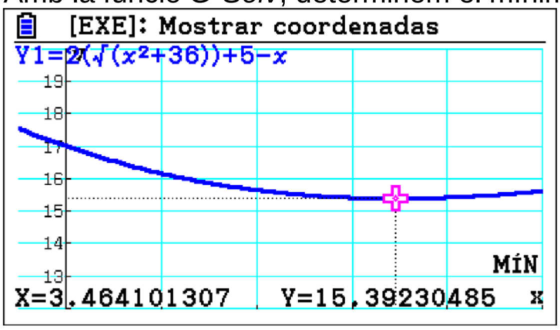
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMP}$:
$\overline{AP} = \overline{BP} = \sqrt{x^2 + 6^2}$
La funció a optimitzar és la suma de les distàncies, $\overline{AP} + \overline{BP} + \overline{CP}$.
$f(x) = 2\sqrt{x^2 + 36} + 5 - x, x \in [0, 5]$

Obrim el *Menú Gràfico*
Definim i representem la funció suma de distàncies.



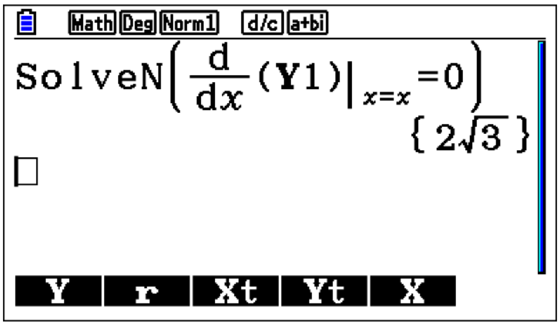


Amb la funció *G-Solv*, determinem el mínim de la funció:

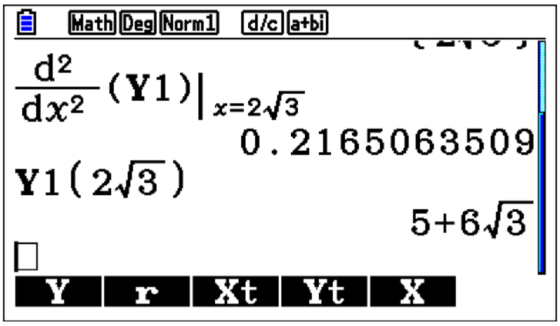


El mínim valor de la suma de les distàncies s'assoleix quan $x \approx 3.4641$
La suma és aproximadament 15.3923

Obrim el *Menú Ejec*-Mat.
Resolem l'equació $\frac{d}{dx}(Y1)\Big|_{x=x} = 0$



Calculem $\frac{d}{dx^2}(Y1)\Big|_{x=2\sqrt{3}}$, $Y1(2\sqrt{3})$

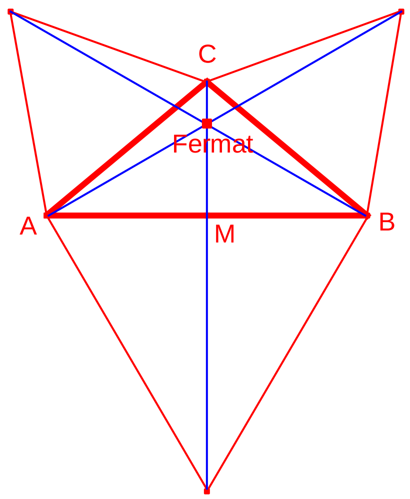


El mínim valor de la suma de les distàncies s'assoleix quan $x = 2\sqrt{3} \approx 3.4641$
La suma mínima és $f(2\sqrt{3}) = 5 + 6\sqrt{6} \approx 15.3923$

Notem que $\angle APM = 60°$, per tant, $\angle APC = \angle BPC = 120°$

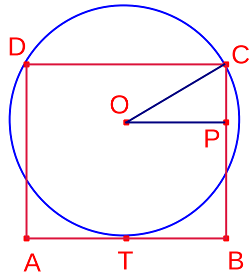
Aquesta propietat s'acompleix en qualsevol triangle.
El punt P s'anomena punt de Fermat o d'Steiner del triangle.

Construcció geomètrica del punt de Fermat:



Problema 23
Donada una circumferència de radi $R = 1$, determineu un rectangle d'àrea màxima tal que una base siga tangent a la circumferència i el costat oposat corda de la circumferència.

Solució:
Siga la circumferència de centre O i radi $R = 1$.
Siga T el punt de tangència.
Siga el rectangle $ABCD$ tal que el costat $\overline{AB} = a$ és tangent a la circumferència i $\overline{BC} = b$
La funció a optimitzar és:
$S(a, b) = ab$
Siga P la projecció de O sobre el costat $\overline{BC}$.



$\overline{OC} = \overline{OT} = \overline{PB} = 1. \overline{OP} = \frac{a}{2}, \overline{PC} = b - 1$

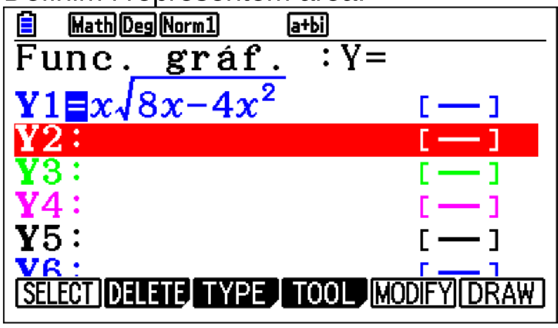
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OPC}$:

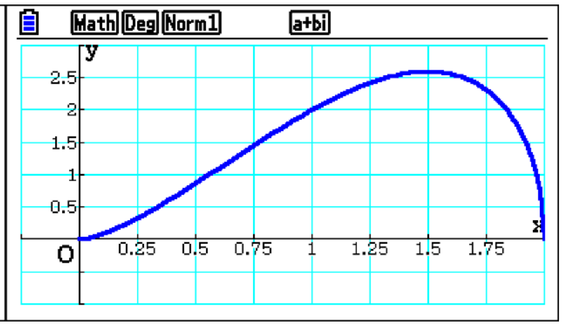
$1^2 = (b-1)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$

Simplificant:
$a^2 = 8b - 4b^2$
$a = \sqrt{8b - 4b^2}$

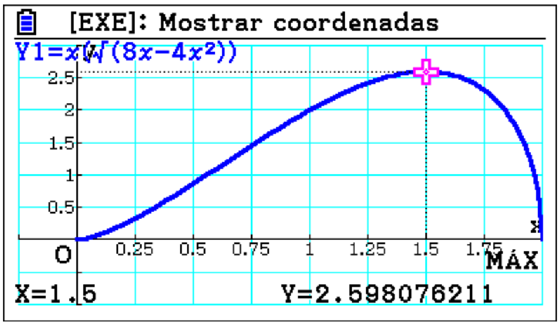
$S(b) = b\sqrt{8b - 4b^2}, \qquad b \in [0, 2]$

Obrim el *Menú Gráfico*.
Definim i representem àrea.



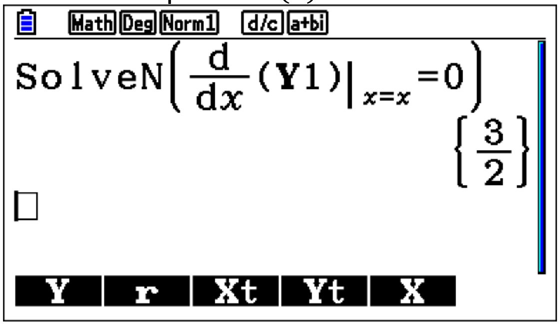


Amb la funció *G-Solv*, determinem el màxim de la funció:

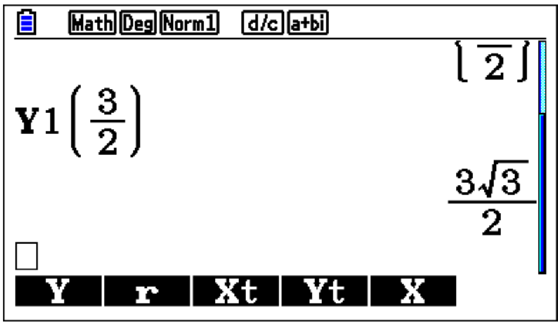


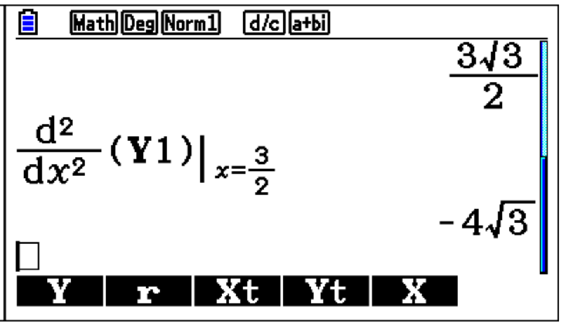
El màxim de l'àrea s'assoleix quan $x = \frac{3}{2} = 1.5\ cm$
L'àrea màxima és aproximadament $S_{màx} \approx 2.5981\ cm^2$

Obrim el *Menú Ejec-Mat*
Resolem l’equació $S'(b) = 0$



Calculem $S(1.5)$, $S''(1.5)$



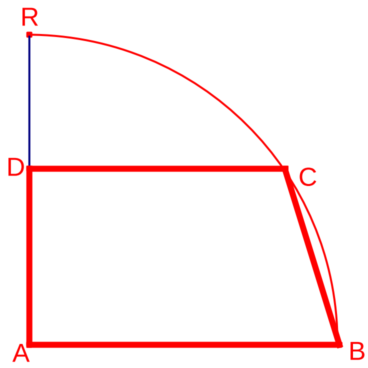


El màxim de l’àrea s’assoleix quan $x = \frac{3}{2} = 1.5\ cm$

L’àrea màxima és $S_{màx}\frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2.5981\ cm^2$

Problema 24

En un quadrant de circumferència de centre A i radi $r = 10$ i arc $\widehat{BR}$ s'ha inscrit un trapezi $ABCD$.
Determineu el valor de l'angle $\angle BAC$ tal que la l'àrea del trapezi siga màxima.



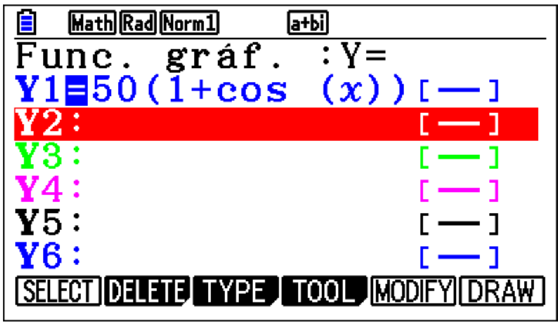
Solució:
Siga $\alpha \angle BAC$.
$\overline{CD} = r \cdot \cos\alpha$
$\overline{AD} = r \cdot \sin\alpha$
L'àrea del trapezi $ABCD$ és:

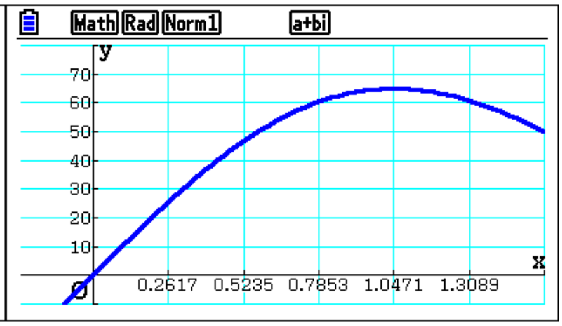
$$S = \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2}\overline{AD}$$

$$S(\alpha) = \frac{1}{2}(10 + 10\cos\alpha)10 \cdot \sin\alpha\,, \quad \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

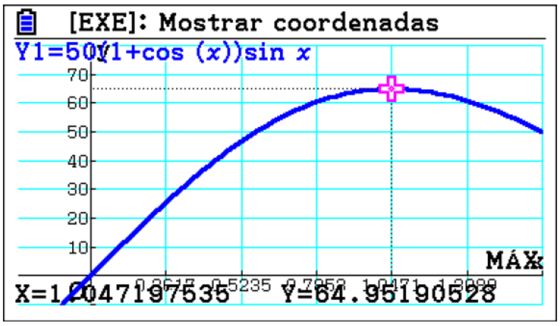
$$S(\alpha) = 50(1 + \cos\alpha)\sin\alpha$$

Obrim el *Menú Gráfico*.
Definim la funció àrea. (angles radians)



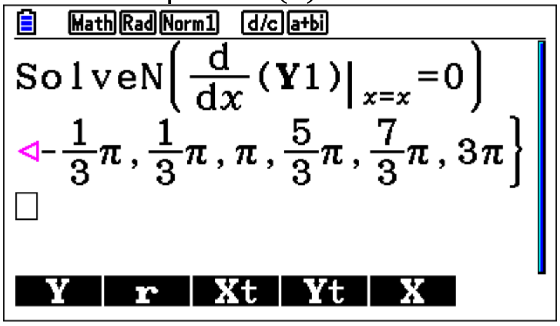


Amb la funció *G-Solv*, determinem el màxim de la funció.

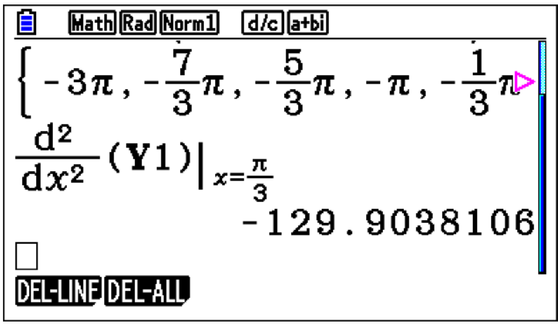


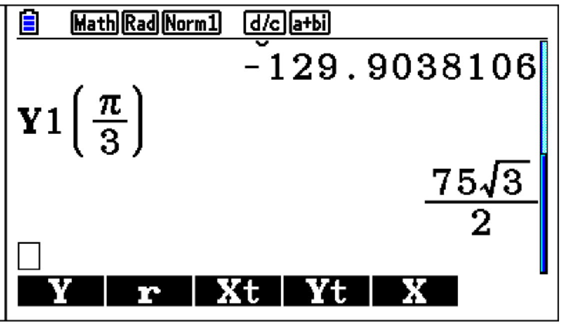
L'àrea màxima s'assoleix aproximadament quan $x \approx 1.0472$ i l'àrea màxima és aproximadament, $S_{màx} \approx 64.9519$

Obrim el *Menú Ejec-Mat*.
Resolem l'equació $s'(\alpha) = 0$



Calculem $S''\left(\frac{\pi}{3}\right), S\left(\frac{\pi}{3}\right)$



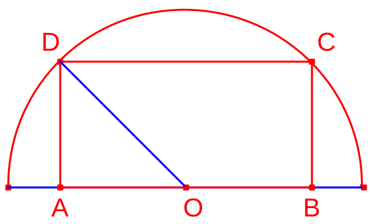


L'àrea màxima s'assoleix quan $x = \frac{\pi}{3} \approx 1.0472$ i l'àrea màxima és

$$S_{màx} = \frac{75\sqrt{3}}{2} \approx 64.9519$$

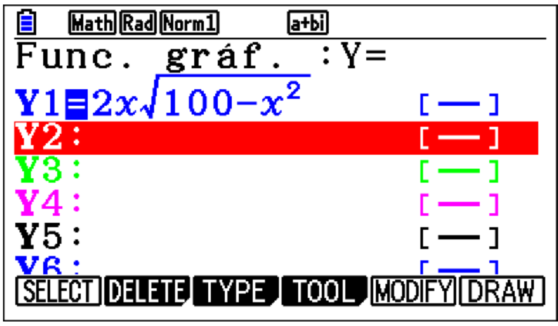
Problema 25
Determineu l'àrea màxima d'un rectangle inscrit en un semicercle de radi 10 cm.
Un costat del rectangle roman sobre el diàmetre del semicercle.

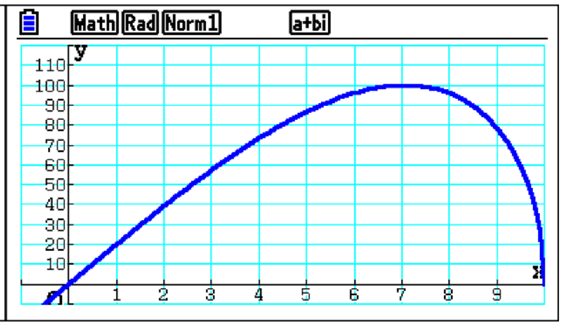
Solució.
Siga $ABCD$ el rectangle inscrit sobre el semicercle de centre O i radi 10.
$\overline{OD} = \overline{OC} = 10$



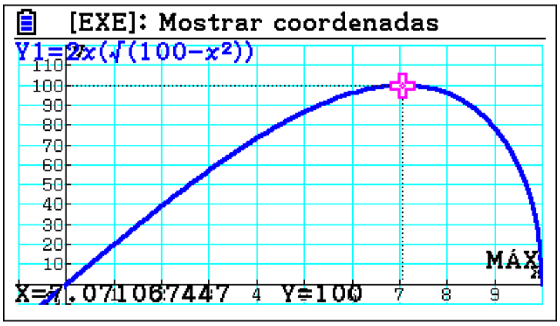
Siga $\overline{OA} = \overline{OB} = x$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OAD}$:
$\overline{AD} = \sqrt{10^2 - x^2}$
L'àrea del rectangle $ABCD$ és:
$S(x) = 2x\sqrt{100 - x^2}, \qquad x \in [0, 10]$

Obrim el *Menú Gráfico*:
Definim i representem la funció àrea.

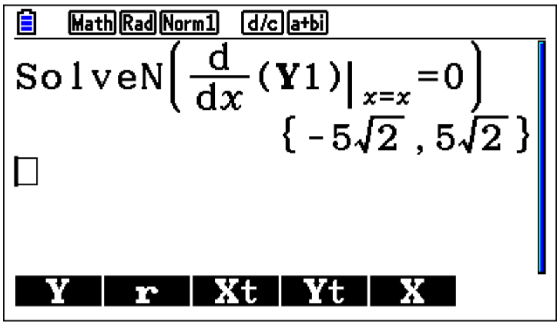




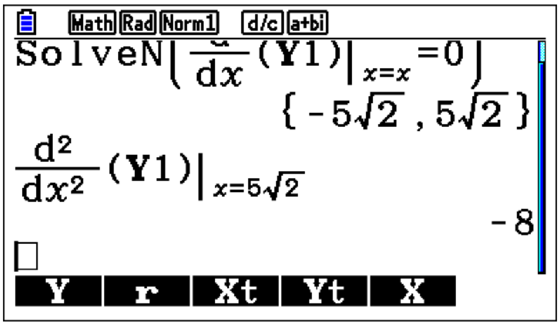
Amb la funció *G-Solv*, determinem el màxim de la funció:



El màxim de l'àrea s'assoleix quan $x \approx 7.0711\ cm$ l'àrea màxima és $S = 100\ cm^2$
Obrim el *Menú Ejec-Mat:*
Resolem l'equació $S'(x) = 0$

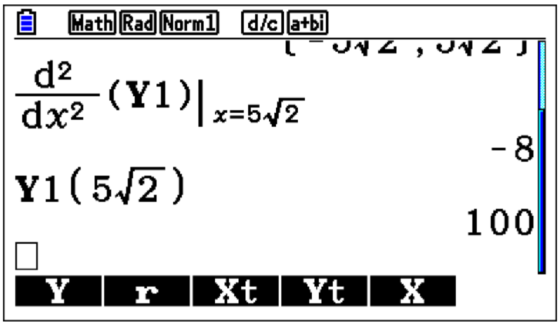


Calculem $S"(5\sqrt{2})$



El màxim s’assoleix quan $x = 5\sqrt{2} \approx 7.0711\ cm$

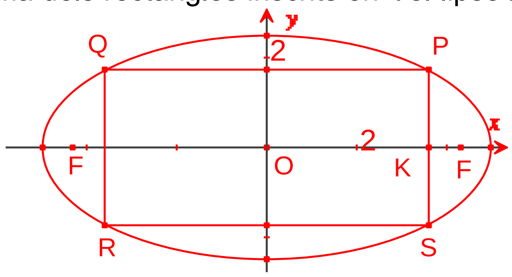
Calculem $S(5\sqrt{2})$



L’àrea màxima és:
$S(5\sqrt{2}) = 100\ cm^2$

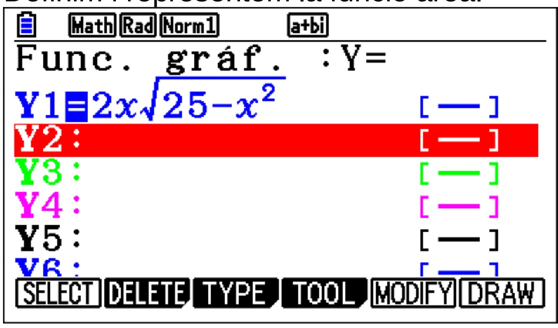
Les dimensions del rectangle d’àrea màxima són:
$\overline{AB} = 10\sqrt{2}, \overline{AD} = 5\sqrt{2}$
$\overline{AB}: \overline{AD} = 2: 1$

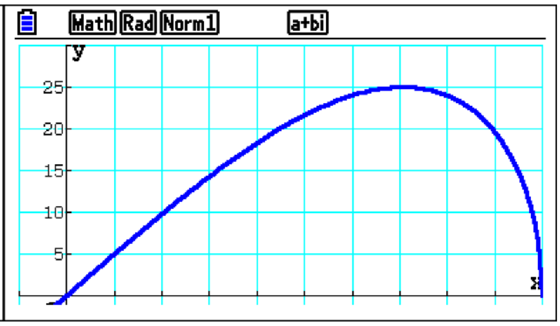
Problema 26
Determineu l'àrea màxima dels rectangles inscrits en l'el·lipse $x^2 + 4y^2 = 25$.



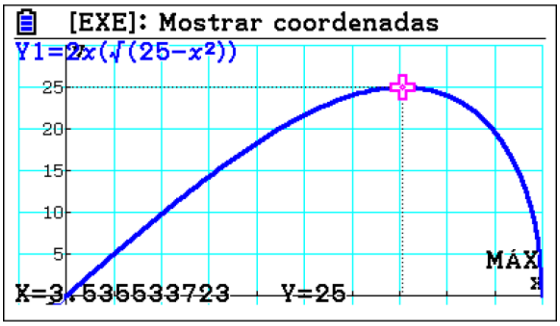
Solució:
L'expressió reduïda de l'el·lipse $x^2 + 4y^2 = 25$ és:
$$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{5}{2}\right)^2} = 1$$
El semieix major és $a = 5$
El semieix menor és $b = \frac{5}{2}$
Siga O el centre de l'el·lipse.
Siga $PQRS$ el rectangle inscrit en l'el·lipse.
Siga $\overline{OK} = x$
$$\overline{KP} = \frac{\sqrt{25 - x^2}}{2}$$
Els costats del rectangle mesuren:
$\overline{PQ} = 2x, \overline{PS} = \sqrt{25 - x^2}$
L'àrea del rectangle $PQRS$ és:
$S(x) = 2x\sqrt{25 - x^2}, x \in [0, 5]$

Obrim el *Menú Gráfico*:
Definim i representem la funció àrea.



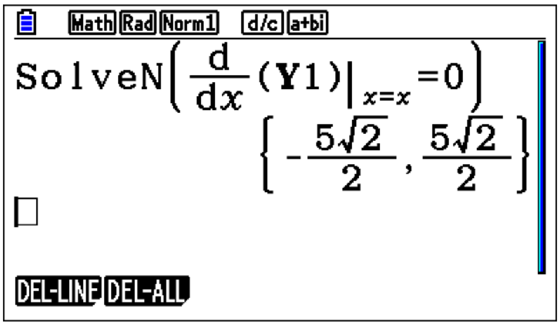


Amb la funció *G-Solv*, determinem el màxim de la funció:

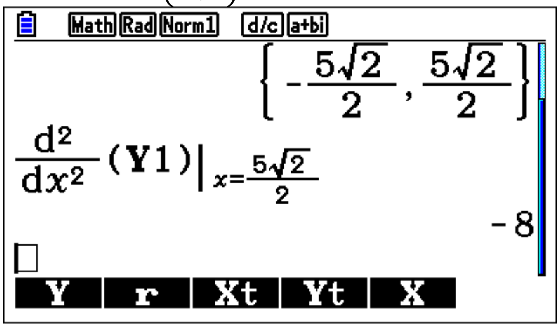


El màxim de l'àrea s'assoleix quan $x \approx 2.5356$ l'àrea màxima és $S = 25$
Obrim el *Menú Ejec-Mat:*

Resolem l'equació $S'(x)=0$

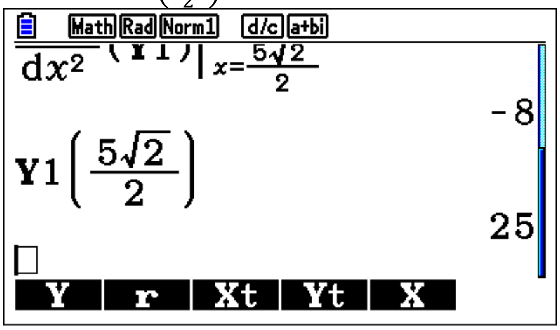


Calculem $S"\left(5\sqrt{2}\right)$



El màxim s'assoleix quan $x=\frac{5\sqrt{2}}{2}$

Calculem $S\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$



L'àrea màxima és:

$$S\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)=25$$

Les dimensions del rectangle d'àrea màxima són:

$$\overline{PQ}=5\sqrt{2},\overline{PS}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

Generalització:

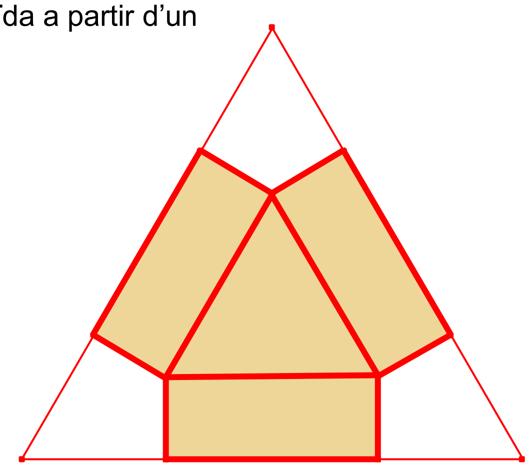
L'àrea màxima dels rectangles inscrits en l'el·lipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ és:

$S_{màx}=2ab$, les dimensions dels costats del rectangle $PQRS$ són $\overline{PQ}=a\sqrt{2},\overline{PS}=b\sqrt{2}$

La proporció entre les àrees del rectangle d'àrea màxima i de l'el·lipse és:

$$\frac{S_{màx}}{S_e}=\frac{2ab}{\pi\cdot ab}=\frac{2}{\pi}$$

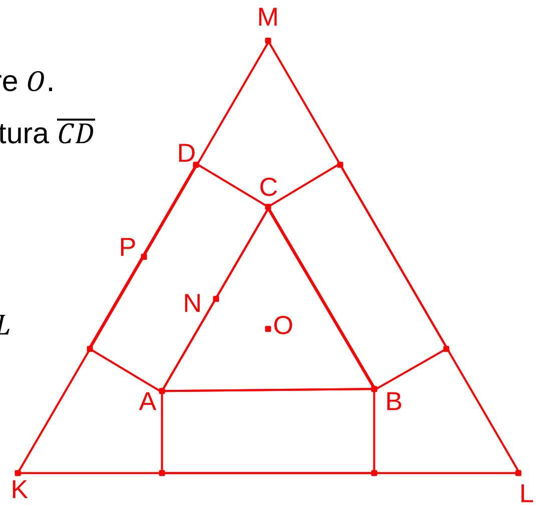
Problema 27
Determineu el volum màxim d'una caixa sense tapa construïda a partir d'un triangle equilàter de costat 30 cm.



Solució:

Siga $\overset{\Delta}{KLM}$ el triangle equilàter de costat $\overline{KL} = 30$ de centre O.

La caixa és un prisma regular triangular de base $\overset{\Delta}{ABC}$ i altura $\overline{CD}$



Siga $x = \overline{AC}$.
Siga P el punt mig del costat $\overline{KM}$
Siga N el punt mig del costat $\overline{AC}$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{KPL}$

$$\overline{PL} = \frac{\sqrt{3}}{2}30 = 15\sqrt{3}$$

Aplicant la propietat del baricentre:

$$\overline{PO} = \frac{1}{3}\overline{PL} = 5\sqrt{3}$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ANB}$

$$\overline{NB} = \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

Aplicant la propietat del baricentre:

$$\overline{NO} = \frac{1}{3}\overline{NB} = \frac{\sqrt{3}}{6}x$$

L'altura del prisma és:

$$\overline{CD} = \overline{PN} = \overline{PO} - \overline{NO} = \sqrt{3}\left(\frac{30-x}{6}\right)$$

L'àrea de la base del prisma és:

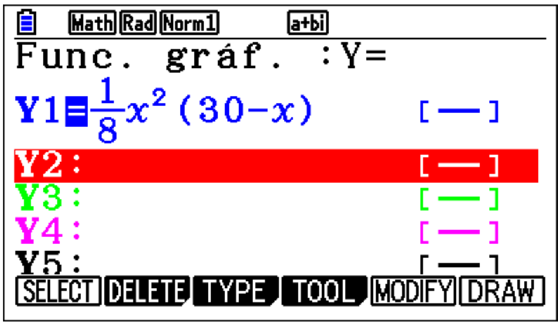
$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$$

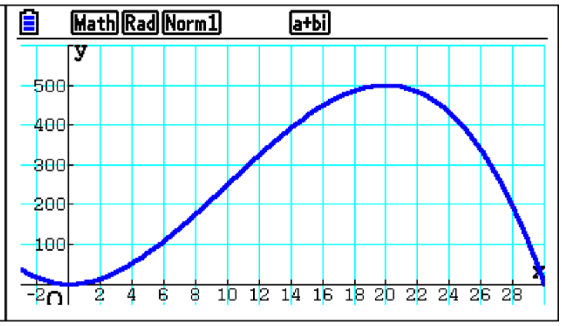
El volum del prisma és:

$$V = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2\sqrt{3}\left(\frac{30-x}{6}\right)$$

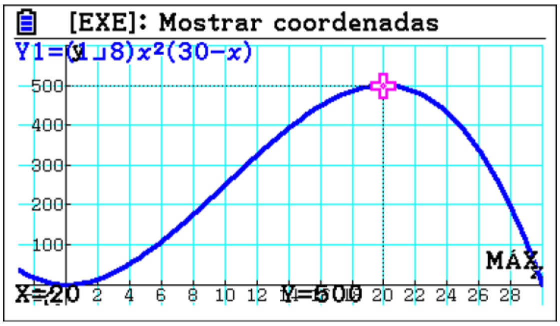
$$V = \frac{1}{8}x^2(30-x), x \in [0,30]$$

Obrim el *Menú Gráfico*.
Definim i representem la funció volum.





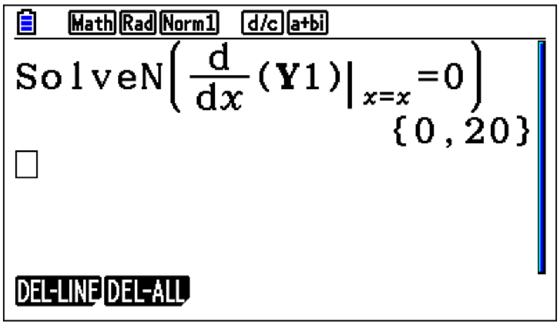
Amb la funció *G-Solv*, determinem el màxim de la funció volum.



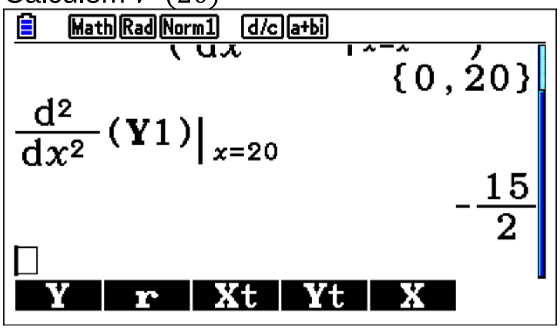
El volum màxim de la caixa s’assoleix quan $x = 20\ cm$ i el volum màxim és $V_{màx} = 500\ cm^3$

$$\overline{MD} = \frac{30-20}{2} = 5\ cm$$

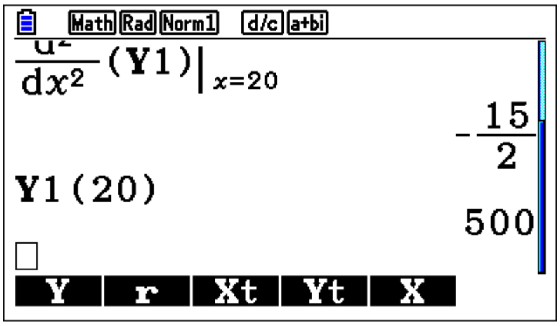
Obrim el *Menú Ejec-Mat*
Resolem l’equació $V'(x) = 0$



Calculem $V''(20)$



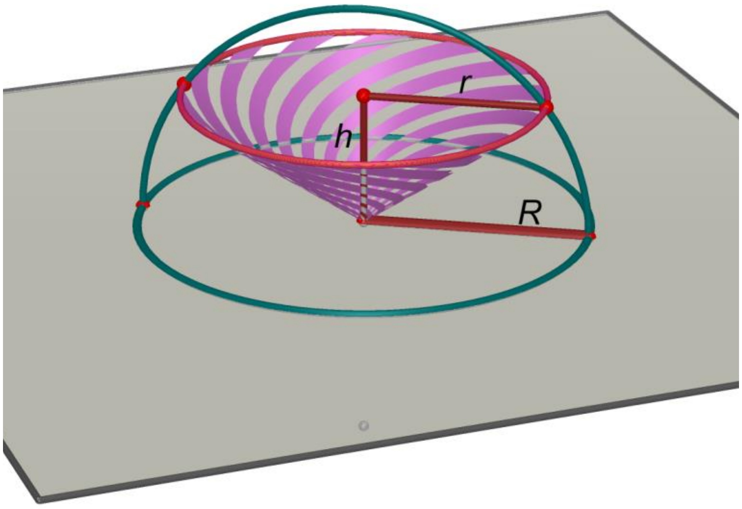
El volum màxim de la caixa s’assoleix quan $x = 20\ cm$
Calculem el volum màxim



El volum màxim és $V_{màx} = 500\ cm^3$

Problema 28

De tots els cons inscrits en una semiesfera de radi $R = 10$ (veure figura), determineu les dimensions del de major volum. Calculeu el volum màxim



Solució:
Siga r el radi del con.
Siga h l'altura del con.

El volum del con és:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

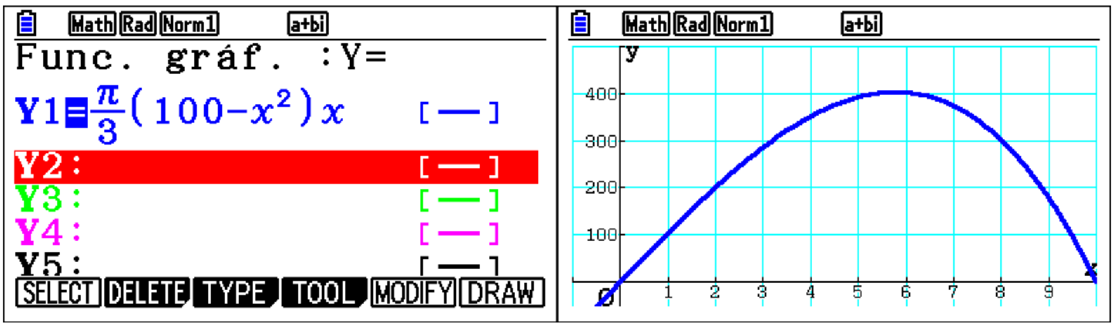
El radi i l'altura del con formen amb el radi de l'esfera un triangle rectangle.
Aplicant el teorema de Pitàgores:

$$r^2 + h^2 = 10^2$$
$$r^2 = 100 - h^2$$

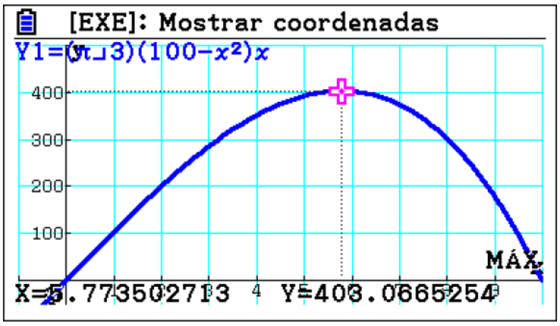
El volum del con és:

$$V = \frac{1}{3}\pi(100 - h^2)h, \qquad h \in [0, 10]$$

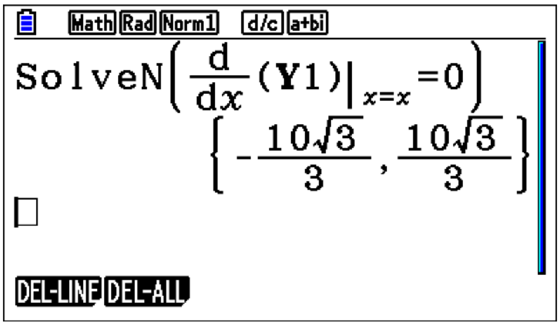
Obrim el *Menú Gráfico*.
Definim i representem la funció volums del con.



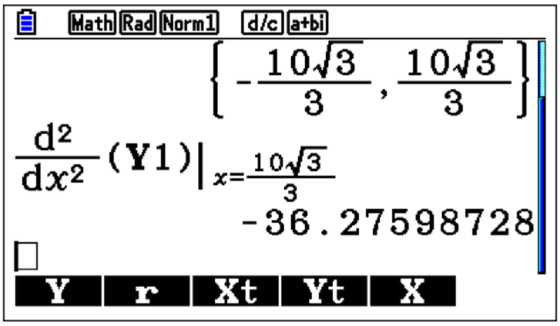
Amb la funció *G-Solv*, determinem el màxim de la funció



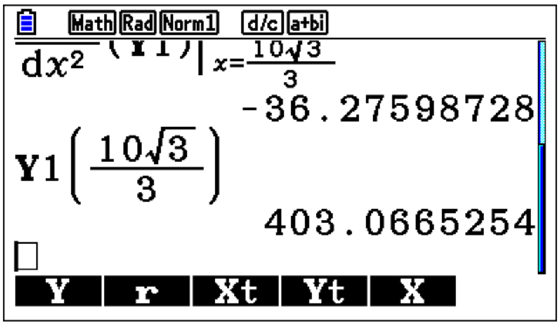
El volum màxim del con s'assoleix quan $h \approx 5.7735\ cm$
El volum màxim és $V_{màx} \approx 403.0665$
Obrim el *Menú Ejec-Mat*
Resolem l'equació $V'(h) = 0$



Calculem $V''\left(\frac{10\sqrt{3}}{3}\right)$



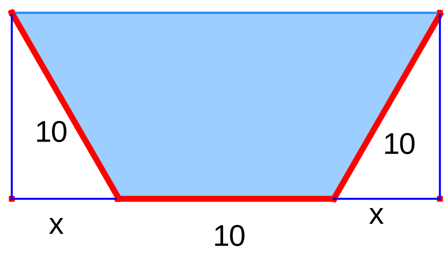
Calculem $V\left(\frac{10\sqrt{3}}{3}\right)$



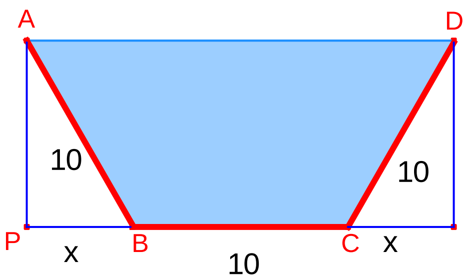
El volum màxim del con s'assoleix quan $h = \frac{10\sqrt{3}}{3} \approx 5.7735\ cm$
El volum màxim és $V_{màx} \approx 403.0665$
El radi és $r = \frac{10\sqrt{6}}{3}$

Problema 29
Es desitja construir una canaleta, per recollir aigua, la secció del qual és com la figura. La base i els costats han de mesurar 10 cm i es tracta de donar-li una inclinació adequada als costats per obtenir una secció d'àrea màxima. Es demana:

d) Determinar l'altura del canalet en funció de x (veure figura)
e) Determinar l'àrea de la secció de la canaleta en funció de x
f) Determinar el valor de x que fa màxima l'àrea.



Solució:
a)



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{APB}$ l'altura de la canaleta és:

$\overline{AP} = \sqrt{100 - x^2}, \qquad x \in [0, 10]$

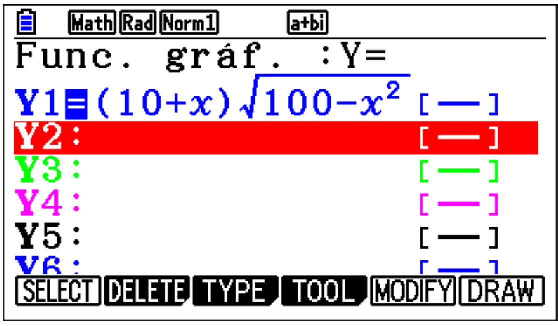
b)
La figura és un trapezi isòsceles.
L'àrea és:

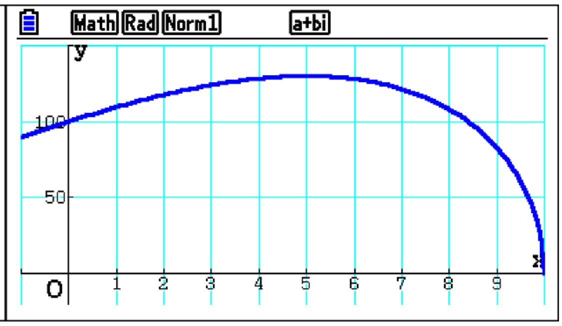
$$S_{ABCD} = \frac{\overline{BC} + \overline{AD}}{2}\overline{AP}$$

$$S(x) = \frac{20 + 2x}{2}\sqrt{100 - x^2}, \quad x \in [0, 10]$$

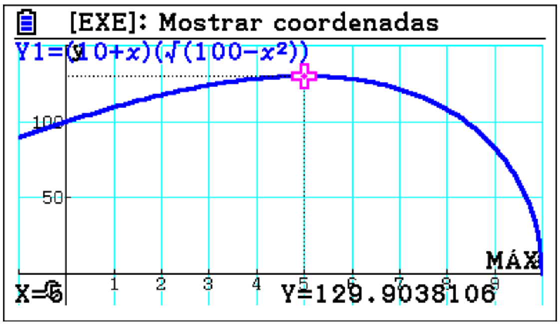
$$S(x) = (10 + x)\sqrt{100 - x^2}$$

Obrim el *Menú Gráfico*.
Definim i representem la funció àrea.



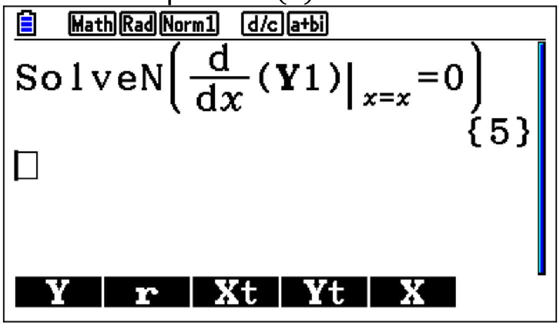


Amb la funció *G-Solv*, determinem el màxim de la funció àrea.

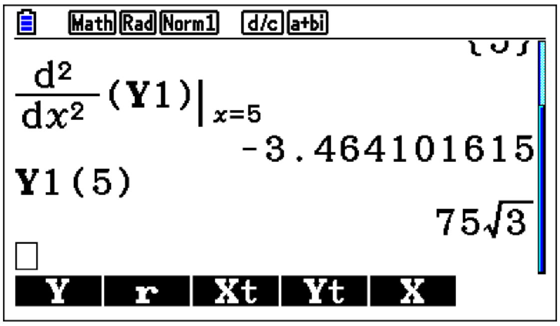


El màxim de la funció s’assoleix quan $x = 5\ cm$
L’àrea màxima és $S = 129.90\ cm^2$

Obrim el *Menú Ejec-Mat*
Resolem l’equació $S'(x) = 0$



Calculem $S"(5)$ i $S(5)$



El màxim de la funció s’assoleix quan $x = 5\ cm$
L’àrea màxima és $S = 75\sqrt{3} \approx 129.90\ cm^2$

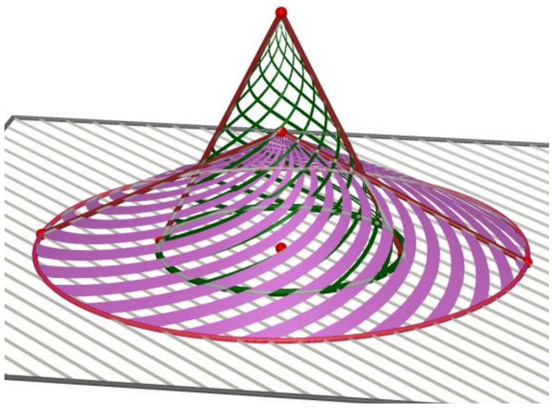
Solució algebraica:
$S(x) = (10 + x)\sqrt{100 - x^2}$
$S(x) = \sqrt{(10 + x)^2(100 - x^2)}$
$S(x) = \sqrt{-x^4 - 20x^3 + 2000x + 10000}$

El màxim de la funció àrea s’assoleix en el màxim de la funció
$f(x) = -x^4 - 20x^3 + 2000x + 10000\ x \in [0, 10]$
$f'(x) = -4x^3 - 60x^2 + 2000$
Resolem l’equació $f'(x) = 0$ amb la regla de Ruffini.

$x = 5\ cm$
$f"(x) = -12x - 120x$
$f"(5) < 0$
$f(0) = 10000, f(10) = 0$
$f(5) = 16875$

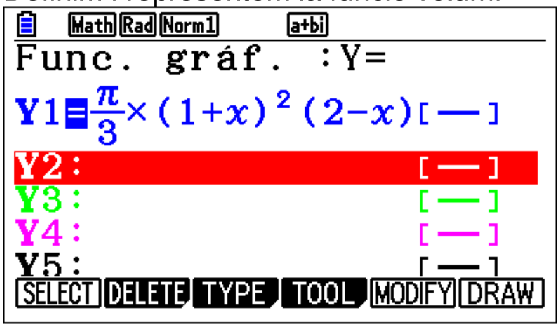
El màxim de la funció àrea s'assoleix quan $x = 5\ cm$
L'àrea màxima és.
L'àrea màxima és $S = 75\sqrt{3} \approx 129.90\ cm^2$

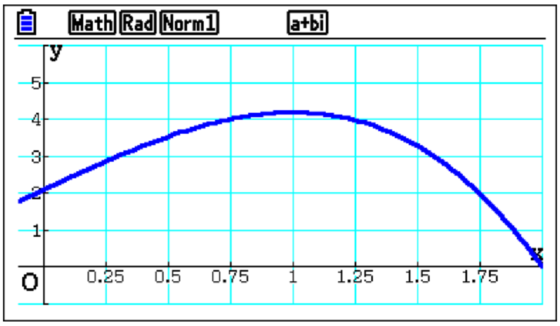
Problema 30
Donat un con de radi 1 i altura 2, incrementem el radi de la base x i reduïm l'altura x.
Quin és el valor de x que fa màxim el nou volum del con?



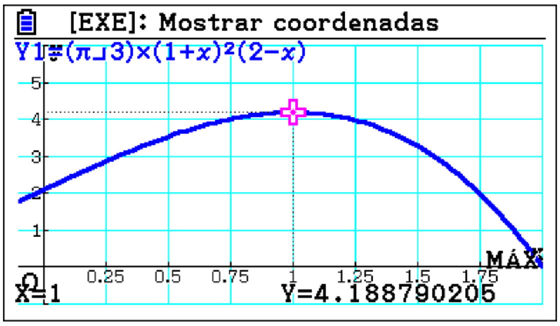
Solució:
El nou radi és $r = 1 + x$ i l'altura $h = 2 - x$.
El volum del con és:
$$V(x) = \frac{\pi}{3}(1+x)^2(2-x), \qquad x \in [0, 2]$$

Obrim el *Menú Gráfico*.
Definim i representem la funció volum.

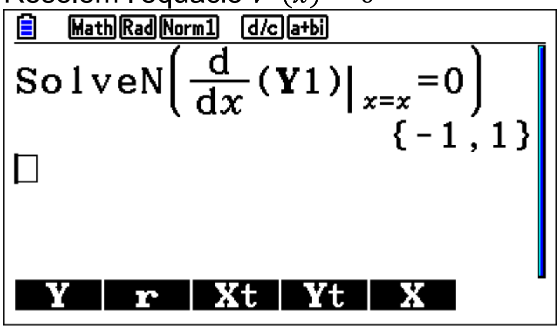




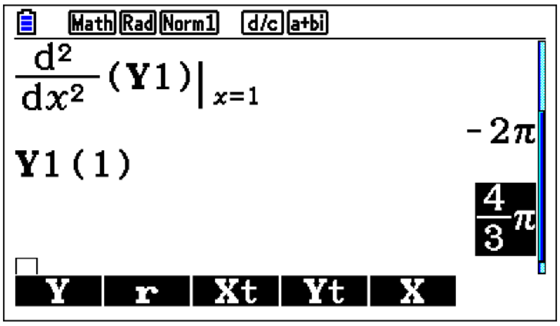
Amb la funció *G-Solv*, determinem el màxim de la funció:



El volum màxim s'assoleix quan $x = 1$ i el volum màxim és, $V_{màx} = V(1) = \frac{4\pi}{3} \approx 4.1888$
Obrim el *Menú Ejec-Mat*
Resolem l'equació $V'(x) = 0$



Calculem $V"(1)$,, $V(1)$



El volum màxim s'assoleix $x = 1$ i el volum màxim és, $V_{màx} = V(1) = \frac{4}{3}\pi$.

Solució 2:
$V(x) = \frac{\pi}{3}(-x^3 + 3x + 2), \qquad x \in [0, 2]$
Derivant la funció:
$V'(x) = \pi(-x^2 + 1)$.
$V'(x) = 0$, $-x^2 + 1 = 0$. Resolent l'equació:
$x = 1$.
$V''(x) = -2\pi x$.
$V''(1) = -2\pi < 0$. Aleshores, $x = 1$, és un màxim relatiu estricte.

El volum màxim s'assoleix $x = 1$ i el volum màxim és, $V_{màx} = V(1) = \frac{4\pi}{3}$.

Solució 3:
$V(x) = \frac{\pi}{3}(1 + x)^2(2 - x) = \frac{\pi}{3}4\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x\right)(2 - x), x \in [0, 2]$

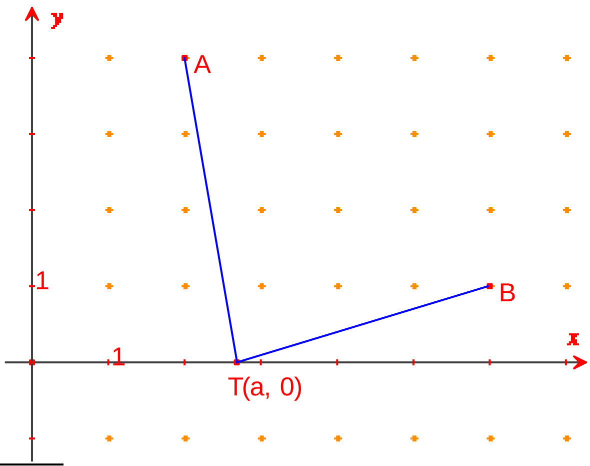
Aplicant la desigualtat entre la mitjana aritmètica i la geomètrica:

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x\right)(2 - x) \le \left(\frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x\right) + (2 - x)}{3}\right)^3 = 1$$

Aleshores:
$V(x) \le \frac{4\pi}{3}$

La igualtat s'assoleix quan
$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x = 2 - x$
És a dir, quan $x = 1$
El volum màxim és
$V = \frac{4\pi}{3}$

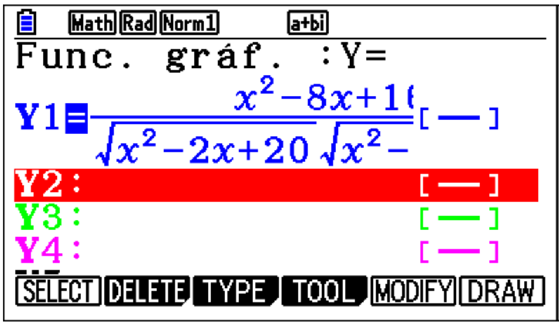
Problema 31
Donats els punts $A(2,4), B(6,1)$.
Determineu el punt de l'eix d'abscisses amb el qual és veu el segment $\overline{AB}$ sota un angle màxim.

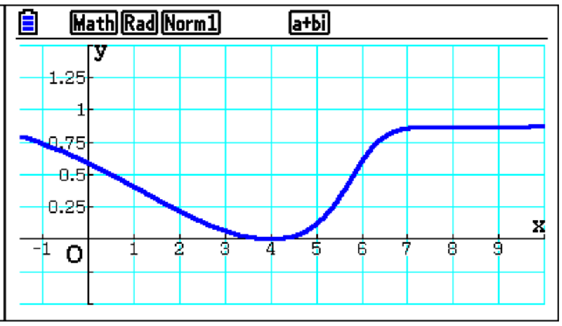


Solució 1:

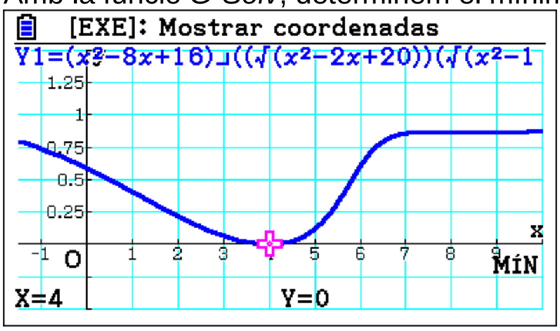
Siga $T(a,0)$.
Siga $\alpha = \angle ATB$
$\overrightarrow{TA} = (2-a,4), \overrightarrow{TB} = (6-a,1)$
Calculem el producte escalar dels dos vectors:
$\overrightarrow{TA} \cdot \overrightarrow{TB} = a^2 - 8a + 16 = \sqrt{(2-a)^2 + 4^2}\sqrt{(6-a)^2 + 1^2}\cos\alpha$
Aleshores:
$$\cos\alpha = \frac{a^2 - 8a + 16}{\sqrt{a^2 - 2a + 20}\sqrt{a^2 - 12a + 37}}$$

La funció $f(x) = \cos x$ és decreixent en $[0,\pi]$
Aleshores el màxim de l'angle s'assoleix en el mínim de la funció:
$$g(a) = \frac{a^2 - 8a + 16}{\sqrt{a^2 - 2a + 20}\sqrt{a^2 - 12a + 37}}$$
Obrim el Menú Gráfico.
Definim i representem la funció $g(a)$





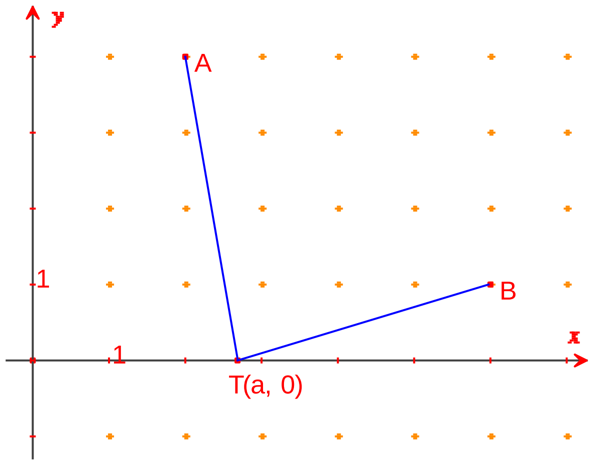
Amb la funció *G-Solv*, determinem el mínim de la funció:



El màxim del angle s'assoleix quan $a = 4$, és a dir, en el punt $T(4,0)$
Solució 2:
Siga $T(a,0)$.
Siga $\alpha = \angle ATB$

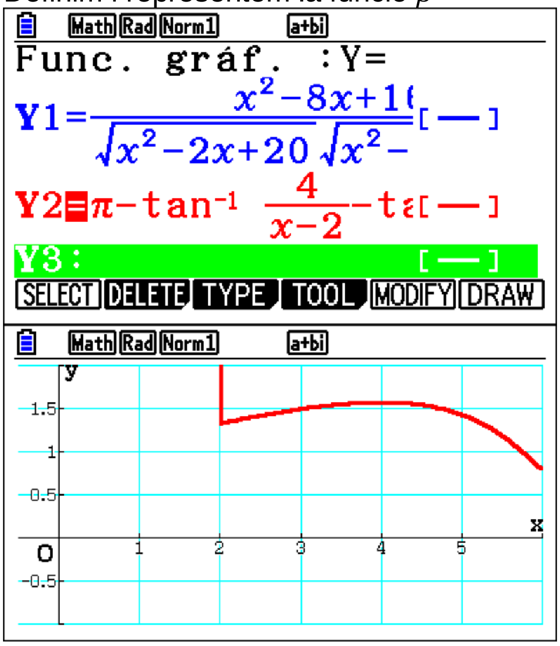
Calculem el producte escalar dels dos vectors:
$\overrightarrow{TA}\cdot\overrightarrow{TB}=a^2-8a+16=\sqrt{(2-a)^2+4^2}\sqrt{(6-a)^2+1^2}\cos\alpha$
Aleshores:
$$\cos\alpha=\frac{a^2-8a+16}{\sqrt{a^2-2a+20}\sqrt{a^2-12a+37}}$$

La funció $f(x)=\cos x$ és decreixent en $[0,\pi]$
Aleshores el màxim de l'angle s'assoleix en el mínim de la funció:
$$g(a)=\frac{a^2-8a+16}{\sqrt{a^2-2a+20}\sqrt{a^2-12a+37}}=\frac{(a-4)^2}{\sqrt{a^2-2a+20}\sqrt{a^2-12a+37}}\geq 0$$
El mínim de la funció $g(x)$ s'assoleix quan numerador és zero:
És a dir, quan $a=4$,
Aleshores el màxim angle s'assoleix quan $T(4,0)$

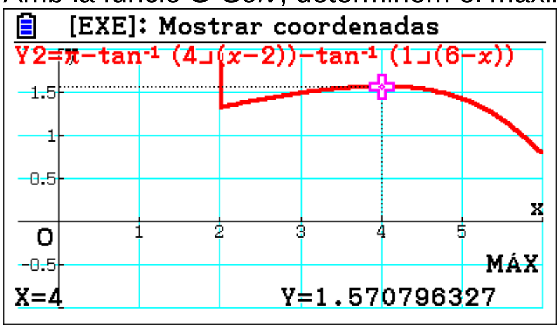


Solució 3:
Siga $T(a,0), a\in[2,6]$.
Siga $\beta=\angle ATB$
Aplicant raons trigonomètriques:
$$\beta=\pi-\arctan\frac{4}{a-2}-\arctan\frac{1}{6-a}, a\in[2,6]$$

Definim i representem la funció β



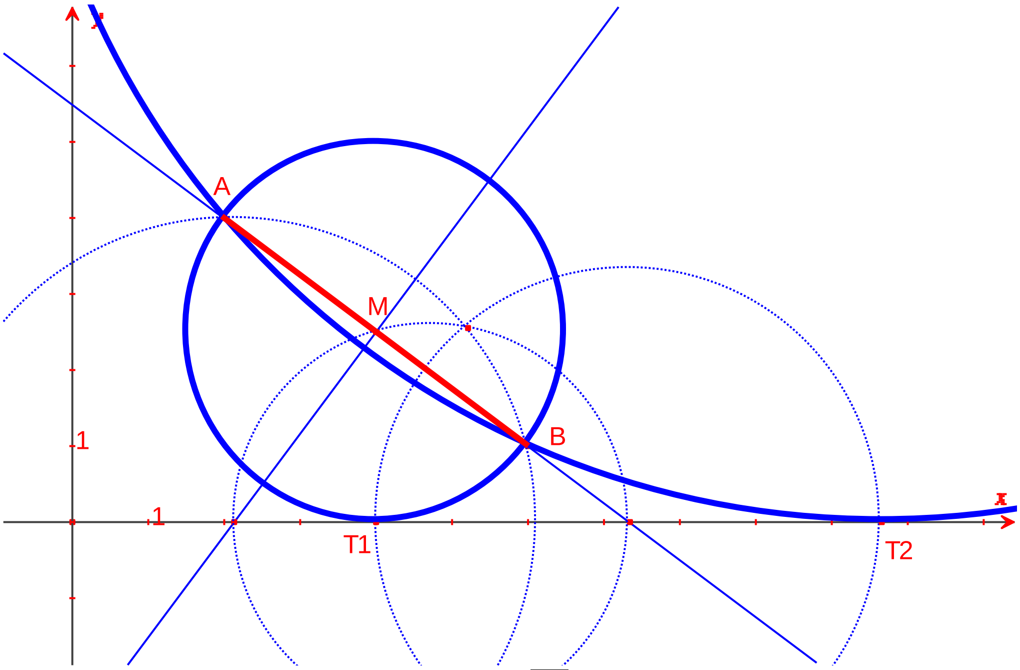
Amb la funció *G-Solv*, determinem el màxim de la funció.



El màxim del angle s'assoleix quan $a=4$, és a dir, en el punt $T(4,0)$

L'angle màxim és $\beta = \frac{\pi}{2} \approx 1.5708\, rad$

Solució 4.



La solució és l'arc capaç del el segment $\overline{AB}$ tangent a l'eix d'abscisses.

El punt mig del el segment $\overline{AB}$ té coordenades $M\left(4, \frac{5}{2}\right)$:

La recta mediatriu del el segment $\overline{AB}$ té equació:

$$y = \frac{4}{3}x - \frac{17}{6}, \qquad 8x - 6y - 17 = 0$$

El centre de la circumferència que passa pels punts A, B té el centre en la recta mediatriu. Les coordenades del centre O són:

$$O\left(x, \frac{4}{3} - \frac{17}{6}\right)$$

La distància del centre O al punt A és igual a la distància del centre o a l'eix d'abscisses:

$$\sqrt{(x-2)^2 + \left(\frac{4}{3}x - \frac{17}{6} - 4\right)^2} = \left|\frac{4}{3}x - \frac{17}{6}\right|$$

Resolent l'equació:

$$x = 4, \frac{32}{3}$$

Els dos valors són màxims relatius.

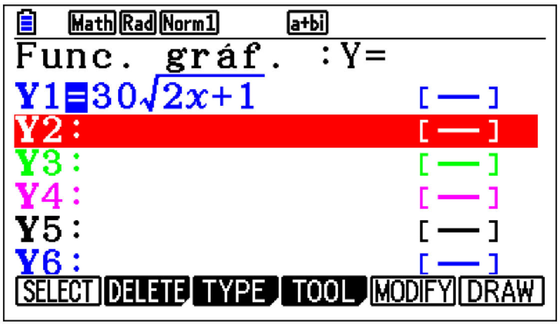
Les coordenades dels punts són $T_1(4,0), T_2\left(\frac{32}{3}, 0\right)$.

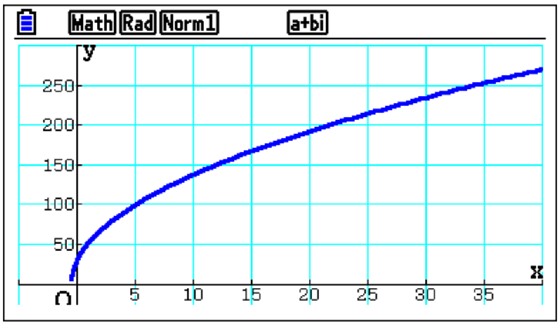
$\angle AT_1B = 90°, \angle AT_2B \approx 12°41'$

Aleshores, el màxim del angle s'assoleix quan $a = 4$, és a dir, en el punt $T(4,0)$ i l'angle màxim és de $90°$.

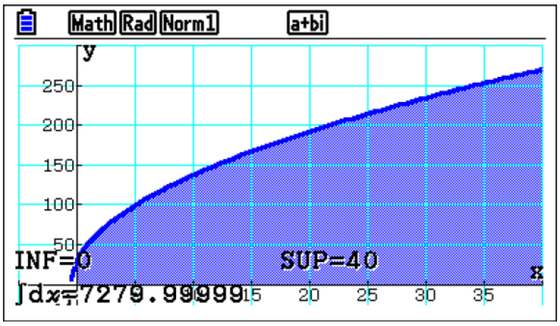
Problema 32
En el plànol XY està dibuixada una parcel·la A els límits de la qual són dos carrers d’equacions $x = 0$ i $x = 40$, respectivament, una carretera d’equació $y = 0$, i el tram del curs d’un riu, d’equació $f(x) = 30\sqrt{2x + 1}$, amb $0 \leq x \leq 40$, sent positiu el signe de l’arrel quadrada.
Es pretén urbanitzar un rectangle R inscrit en la parcel·la A, de manera que els vèrtexs de R siguen els punts $(x, 0), (x, f(x)), (40, f(x)), (40, 0)$
Calculeu raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:
a) Àrea de la parcel·la A.
b) Els vèrtexs del rectangle R al que correspon l’àrea màxima.
c) El valor d’aquesta àrea màxima.
Pau’s València juliol 2013

Solució:
a)
Obrim el *Menú Gráfico*.
Definim i representem la funció $f(x) = 30\sqrt{2x + 1}$



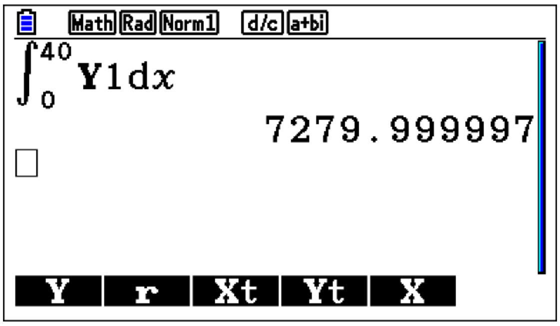


L’àrea de la parcel·la A és:
$$\int_0^{40} 30\sqrt{2x + 1}dx$$
Amb la funció *G-Solv*, calculem l’àrea.



L’àrea és $S_A = 7280$

Obrim el *Menú Ejec-Mat*
Calculem : $\int_0^{40} 30\sqrt{2x+1}dx$



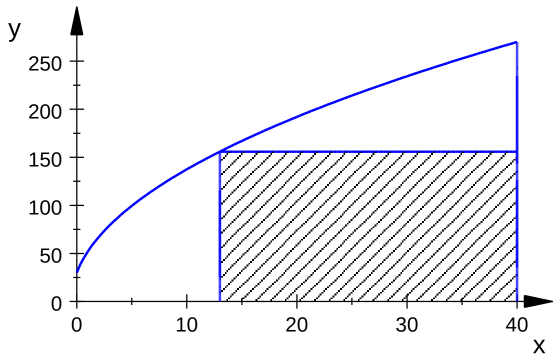
L'àrea és $S_A = 7280$

a) Analíticament

Calculem la integral indefinida $\int 30\sqrt{2x+1}dx$
Efectuant el canvi de variable $2x+1=t^2$:
$dx = t \cdot dt$

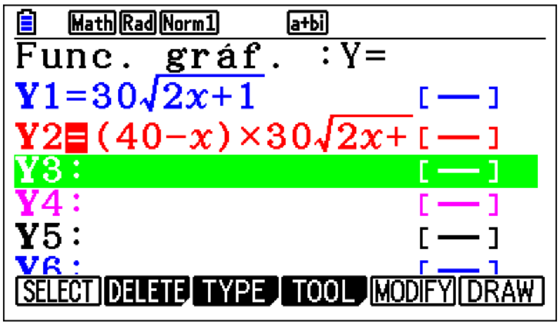
$$\int 30\sqrt{2x+1}dx = 30\int t^2 dt = 10t^3 + C = 10\sqrt{(2x+1)^3} + C$$

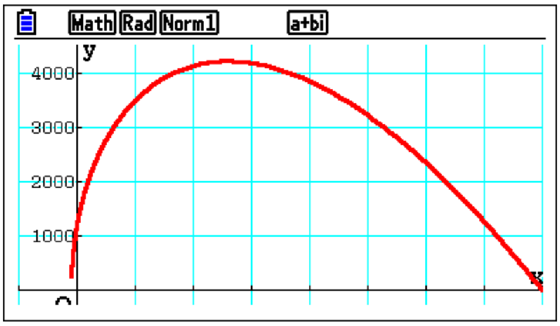
$$\int_0^{40} 30\sqrt{2x+1}dx = \left(10\sqrt{(2x+1)^3}\right)\Big|_0^{40} = 7280\ u^2$$



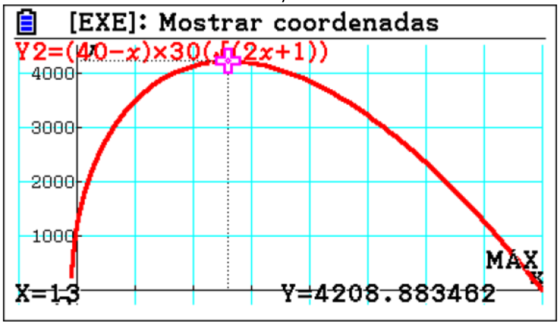
b)
La base del rectangle és $40-x$ i l'altura és $f(x)$. La funció àrea és:
$R(x) = (40-x)\cdot 30\sqrt{2x+1}, \qquad x \in [0,40]$

Obrim el *Menú Gráfico*.
Definim i dibuixem la funció àrea $R(x)$



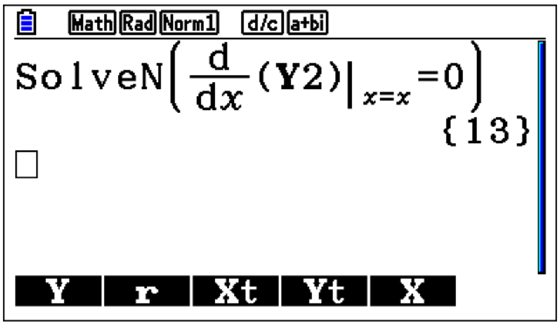


Amb la funció *G-Solv*, determinem el màxim de la funció:

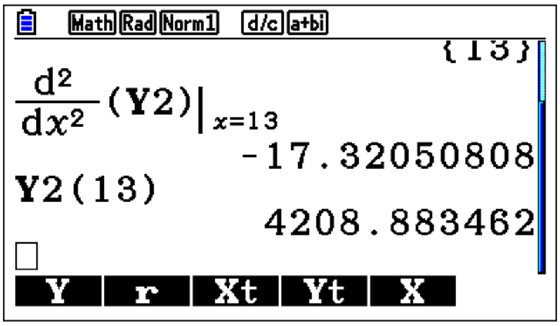


El màxim s'assoleix quan $x = 13$ i l'àrea màxima és $R_{màx} = 4208.8835$

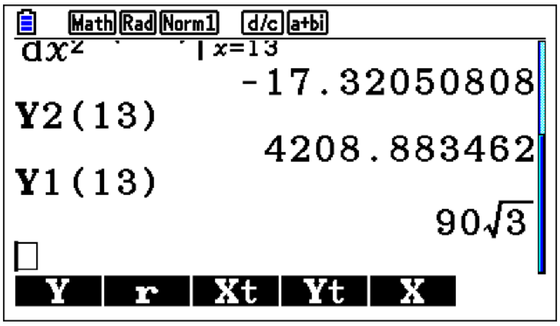
Obrim el *Menú Ejec-Mat*
Resolem l'equació $R'(x) = 0$



Calculem $R"(13), R(13)$



El màxim s'assoleix quan $x = 13$ i l'àrea màxima és $R_{màx} = 4208.8835$
Calculem els vèrtexs del rectangle d'àrea màxima



$f(13) = 90\sqrt{3}$
Els vèrtexs del rectangle d'àrea màxima són:
$(13, 0), (13, 90\sqrt{3}), (40, 90\sqrt{3}), (40, 0)$

b) Analíticament

Determinem el màxim d'aquest funció amb ajut del càlcul diferencial:

$R'(x) = -\dfrac{30(x-40)}{\sqrt{2x+1}} - 30\sqrt{2x+1}$

$R'(x) = -\dfrac{30(3x-39)}{\sqrt{2x+1}}$

Resolem l'equació $R'(x) = 0$

$3x - 39 = 0$

$x = 13$

Estudiant el signe de la primera derivada:

La funció és estrictament creixent en $x \in]0, 13[$ i estrictament decreixent en $x \in]13, 40[$.

Aleshores, $x = 13$ és un màxim de la funció.

$f(13) = 90\sqrt{3}$

Els vèrtexs del rectangle d'àrea màxima són:

$(13, 0), \left(13, 90\sqrt{3}\right), \left(40, 90\sqrt{3}\right), (40, 0)$

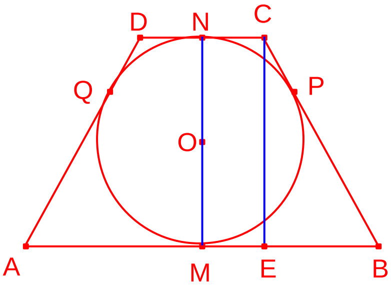
c)

L'àrea del rectangle d'àrea màxima és:

$R(13) = 2430\sqrt{3} \approx 420835\ u^2$

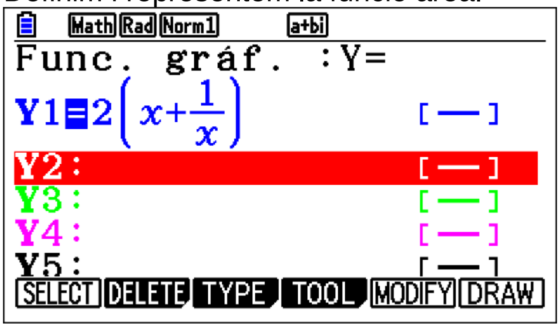
Problema 33
Determineu les mesures del trapezi isòsceles d'àrea mínima circumscrit a una circumferència de radi 1 m.

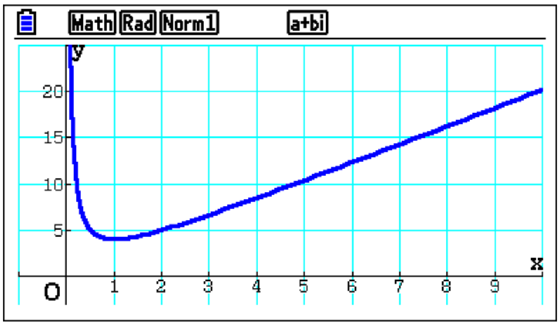
Solució:
Siga el trapezi $ABCD$ circumscrit a la circumferència de radi 1.
Siguen M, N, P, Q els punts de tangència.
Siga $a = \overline{BM} = \overline{BP} = \overline{AM} = \overline{AQ}$
Siga $b = \overline{DN} = \overline{DQ} = \overline{CN} = \overline{CP}$
$\overline{MN} = 2$
L'àrea del trapezi és:



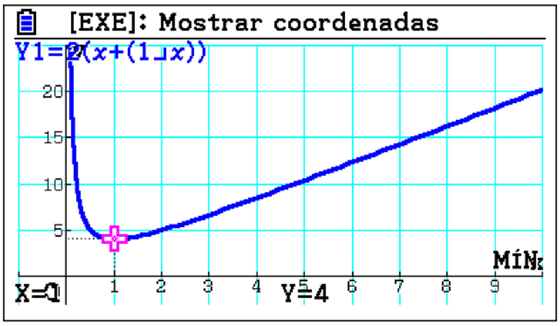
$$S(a,b) = \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2} \cdot \overline{MN}$$
$$S(a,b) = \frac{2a + 2b}{2} \cdot 2 = 2(a+b)$$
Siga E la projecció de C sobre el costat $\overline{AB}$
$\overline{CE} = 2, \overline{BE} = a - b, \overline{BC} = a + b.$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BEC}$:
$(a+b)^2 = (a-b)^2 + 2^2$
Simplificant:
$ab = 1$, aleshores:
$$b = \frac{1}{a}$$
Substituint en l'expressió de l'àrea:
$$S(a) = 2\left(a + \frac{1}{a}\right), \qquad a > 0$$
Obrim el *Menú Gráfico*:
Definim i representem la funció àrea.





Amb la funció G-*Solv*, determinem el mínim de la funció.



El mínim s'assoleix quan $a = 1\ m$ i l'àrea mínima és $S(1) = 4\ m^2$
Per tant, la mínima àrea del trapezi isòsceles circumscrit al cercle de radi 1m s'assoleix quan $\overline{AB} = 2\ m, \overline{CD} = 2\ m$, és a dir quan *ABCD* és un quadrat de costat 2m.

Solució analítica.
L'àrea del trapezi és:
$S(a) = 2\left(a + \frac{1}{a}\right), \qquad a > 0$
$S(a) = 2\left(\frac{a^2 + 1}{a}\right), \qquad a > 0$
Calculem la derivada:
$S'(a) = 2\left(\frac{a^2 - 1}{a^2}\right)$
$S'(a) = 0$ quan $a^2 - 1 = 0$
Resolent l'equació
$a = 1$
$S(\mathrm{a})=\frac{4}{\mathrm{a}^3}, S(1) = 4 > 0$

Aleshores, $a = 1$ és un mínim relatiu estricte.
Per tant, la mínima àrea del trapezi isòsceles circumscrit al cercle de radi 1m s'assoleix quan $\overline{AB} = 2\ m, \overline{CD} = 2\ m$, és a dir quan *ABCD* és un quadrat de costat 2m.
L'àrea mínima és $S(1) = 4\ m^2$.

Problema 34

Quines dimensions ha de tenir un cassó en forma de cilindre d'un litre de capacitat perquè la superfície total siga mínima. Calculeu la superfície mínima

Solució:
$1\ litre \equiv 1000\ cm^3$
Siga r el radi del cilindre i h l'altura.
El volum del cilindre és:
$V = \pi r^2 \cdot h$
$\pi r^2 \cdot h = 1000$

$$h = \frac{1000}{r^2} \qquad (1)$$

La superfície del cassó està formada per un cercle de radi r i un rectangle de base $2\pi r$ i altura h. Aleshores l'àrea total del cilindre és:

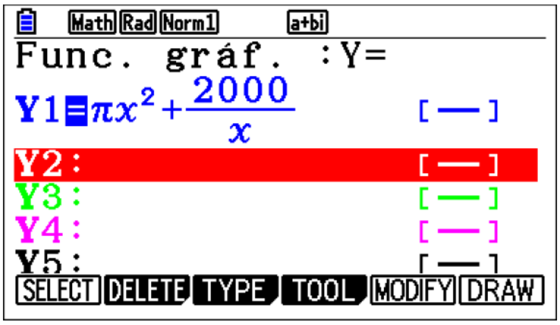
$$S(r,h) = \pi r^2 + 2\pi rh \qquad (2)$$

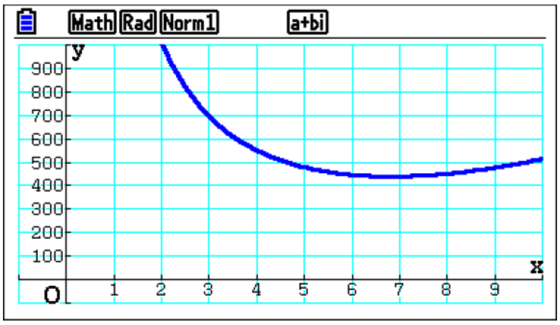
Substituint l'expressió (1) en l'expressió (2), la funció a optimitzar és:

$$S(r) = \pi r^2 + 2\pi r\frac{1000}{\pi r^2}, \quad r > 0$$

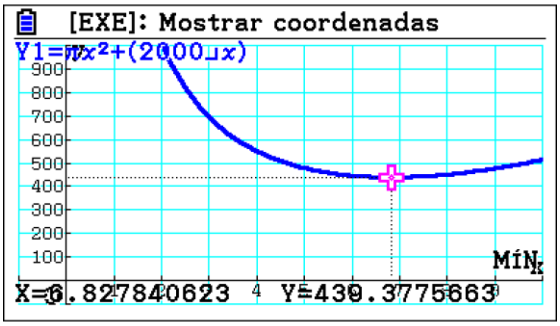
$$S(r) = \pi r^2 + \frac{2000}{r}, \quad r > 0$$

Obrim el *Menú Gráfico*.
Definim i representem la funció àrea.



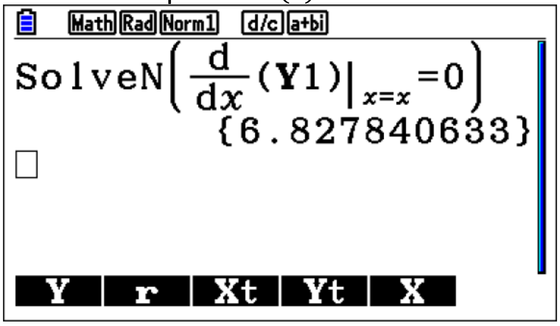


Amb la funció *G-Solv*, determinem el mínim de la funció.

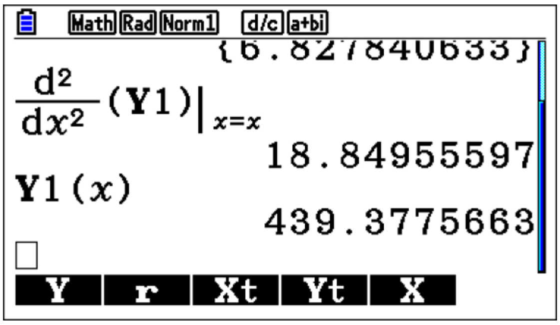


El mínim s'assoleix quan $r \approx 6.8274\ cm$
L'àrea mínima és $S_{mín} \approx 439.3757\ cm^2$

Obrim el *Menú Ejec-Mat*.
Resolem l'equació $S'(r)=0$



Calculem $S''(6.8278), S(6.8278)$



El mínim s'assoleix quan $r \approx 6.8274\ cm$
L'àrea mínima és $S_{mín} \approx 439.3757\ cm^2$

Solució 2:
L'àrea del cassó és:
$S(r)=\pi r^2+2\pi r\frac{1000}{\pi r^2},\quad r>0$
Calculem la derivada de la funció àrea:
$S'(r)=2\pi r-\frac{2000}{r^2}$

Resolem l'equació $S'(x)=0$
$2\pi r^3=2000$
$r=\sqrt[3]{\frac{1000}{\pi}}\approx 6.8274\ cm$
Calculem $S''(r)$
$S''(r)=\frac{2}{\pi}+\frac{4000}{r^3}$
$S''\left(\sqrt[3]{\frac{1000}{\pi}}\right)>0$
Aleshores, $r=\sqrt[3]{\frac{1000}{\pi}}\approx 6.8274\ cm$ és un mínim relatiu estricte.

Les dimensions del cilindre de superfície mínima són:

$$r=\sqrt[3]{\frac{1000}{\pi}}, h=\frac{1000}{\sqrt[3]{\left(\frac{1000}{\pi}\right)}}=\sqrt[3]{\frac{1000}{\pi}}$$

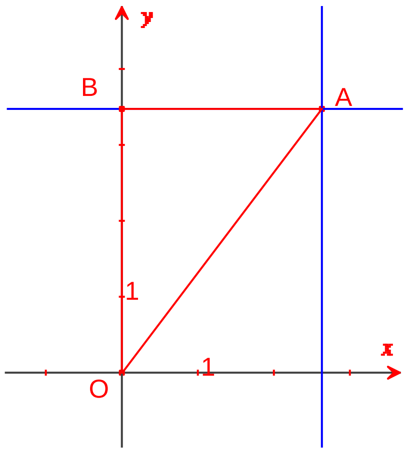
La superfície mínima és:

$$S\left(\sqrt[3]{\frac{1000}{\pi}}\right)=\pi\sqrt[3]{\left(\frac{1000}{\pi}\right)^2}+\frac{2000}{\sqrt[3]{\frac{1000}{\pi}}}\approx 439.3757\ cm^2$$

Notem que

$$\frac{r}{h}=1$$

Problema 35
Es considera el triangle T de vèrtexs $O(0,0), A(x,y), B(0,y)$, en què $x>0, y>0$, i tal que la suma de les longituds dels costats $\overline{OA}$ i $\overline{AB}$ és de 30 metres.
Obteniu raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:
a) L'àrea del triangle T en funció d'x.
b) El valor d'x per al qual aquesta àrea és màxima.
c) El valor d'aquesta àrea màxima.
Pau's València juliol 2017



Solució:
$A(x,y), B(0,y)$

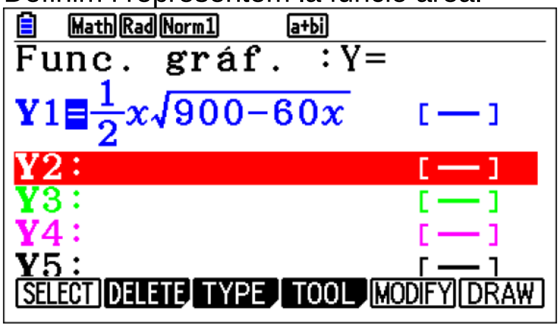
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OAB}$:
$\overline{OA}=\sqrt{x^2+y^2}$

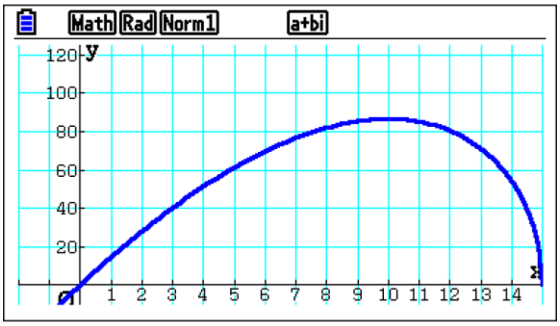
L'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{OAB}$ és:
$S(x,y)=\frac{1}{2}xy$

La suma de les longituds dels costats $\overline{OA}$ i $\overline{AB}$ és de 30 metres.
$\sqrt{x^2+y^2}+x=30$
$\sqrt{x^2+y^2}=30-x$. Elevant al quadrat i simplificant:
$y^2=900-60x$
$y=+\sqrt{900-60x}$

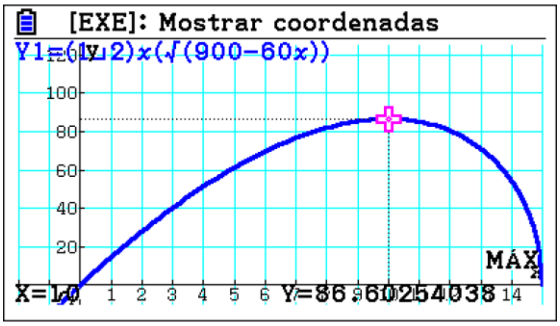
L'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{OAB}$ és:
$S(x)=\frac{1}{2}x\sqrt{900-60x}, \quad 0\le 0\le 15$

Obrim el *Menú Gráfico*.
Definim i representem la funció àrea.



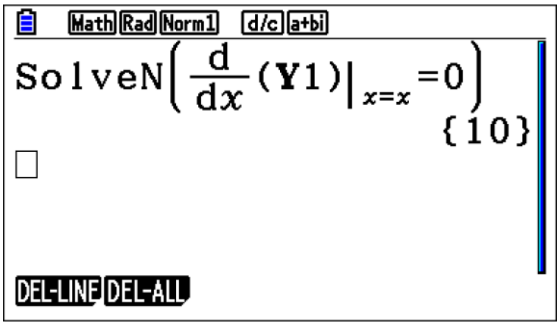


Amb la funció *G-Solv*, determinem el màxim de la funció àrea.

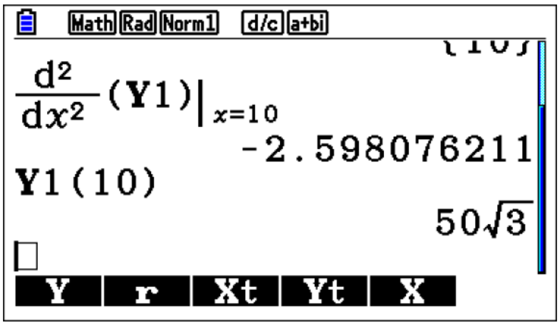


El màxim s'assoleix quan $x=10\ m$, l'àrea màxima és $S_{màx}\approx 85.6025\ m^2$

Obrim el Menú Ejec-Mat.
Resolem l’equació $S'(x) = 0$



Calculem $S"(10), S(10)$



El màxim s’assoleix quan $x = 10\ m$, l’àrea màxima és $S(10)50\sqrt{3} \approx 85.6025\ m^2$

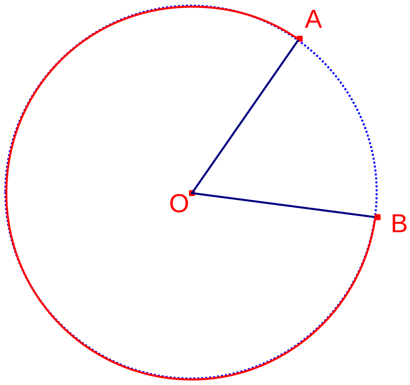
Solució 2. Analítica.
L’àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{OAB}$ és:
$S(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{900 - 60x}, \quad 0 \leq 0 \leq 15$

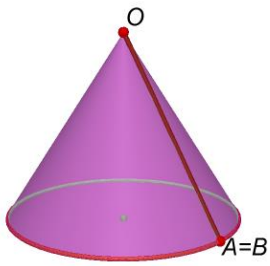
$S(x) = \sqrt{225x^2 - 15x^3}, \quad 0 \leq 0 \leq 15$

Com que la funció la funció $f(x) = \sqrt{x}$ és estrictament creixent el màxim de la funció àrea s’assoleix en el màxim de la funció $g(x) = 225x^2 - 15x^3$

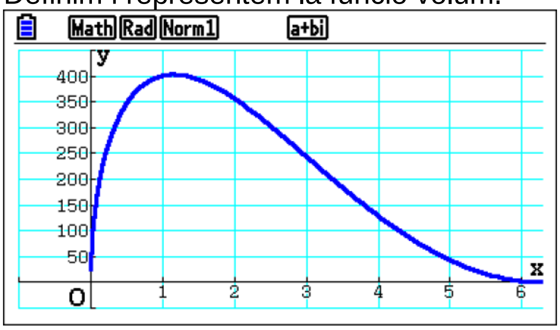
Calculem la derivada de la funció $g(x)$
$g'(x) = -45x^2 + 450x$
Resolem l’equació $g'(x) = 0$
$x = 10$
Calculem $g"(x)$
$g"(x) = -90x + 450$
$g"(10) = -450 < 0$
Aleshores, $x = 10$és un màxim relatiu estricte.
L’àrea màxima és: $S(10)50\sqrt{3} \approx 85.6025\ m^2$

Problema 36
Donada un cercle de radi 10 retallem un sector AOB d'angle $x=\angle AOB$ per formar un con.
a) Calculeu el volum del con en funció de l'angle $x=\angle AOB$.
b) Calculeu el valor de l'angle $x=\angle AOB$ que fa màxim el volum del con.

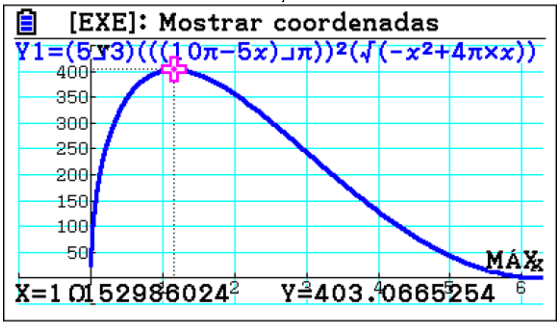




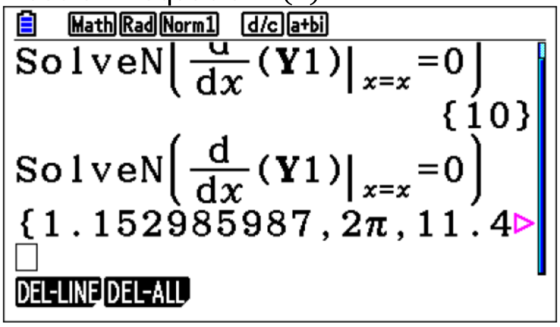
Solució:
Considerem angle $x=\angle AOB$ en mesures radians.
$\overline{OA}=10$ és la generatriu del con.
La longitud de la circumferència de la base del con és:
$2\pi r-10x$
El radi de la base del con és:
$$r=\frac{20\pi-10x}{2\pi}$$
Simplificant:
$$r=\frac{10\pi-5x}{\pi}$$
Aplicant el teorema de Pitàgores l'altura del con és:
$$h=\sqrt{10^2-r^2}=\sqrt{100-\left(\frac{10\pi-5x}{\pi}\right)^2}=\frac{5}{\pi}\sqrt{x^2-4\pi x}$$
El volum del con és:
$$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$$
$$V=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{10\pi-5x}{\pi}\right)^2\frac{5}{\pi}\sqrt{x^2-4\pi x}$$
$$V=\frac{5}{3}\left(\frac{10\pi-5x}{\pi}\right)^2\sqrt{-x^2+4\pi x},\quad 0\le x\le 2\pi$$
Obrim el *Menú Gráfico*.
Definim i representem la funció volum.



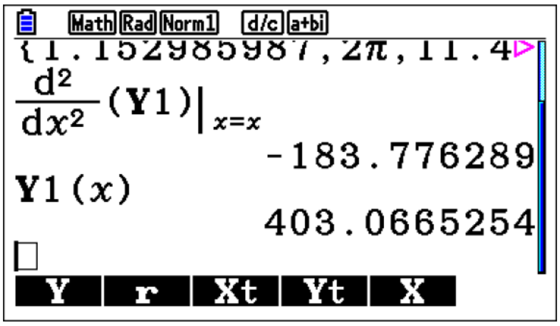
Amb la funció *G-Solv*, determinem el màxim de la funció volum:



El màxim de la funció s’assoleix quan $x \approx 1.0153$ i el volum màxim és $V_{màx} \approx 403.0665$
Obrim el *Menú Ejec-Mat.*
Resolem l’equació $V'(x) = 0$



Calculem $V"(1.0153), V(1.0153)$



El màxim de la funció s’assoleix quan $x \approx 1.1530$ i el volum màxim és $V_{màx} \approx 403.0665$

Solució 2. Analíticament.
La funció volum és:

$$V = \frac{5}{3}\left(\frac{10\pi - 5x}{\pi}\right)^2 \sqrt{-x^2 + 4\pi x}, \quad 0 \le x \le 2\pi$$

$$V = \frac{125}{3\pi^2}\sqrt{(-x^2 + 4\pi x)(2\pi - x)^4}, \quad 0 \le x \le 2\pi$$

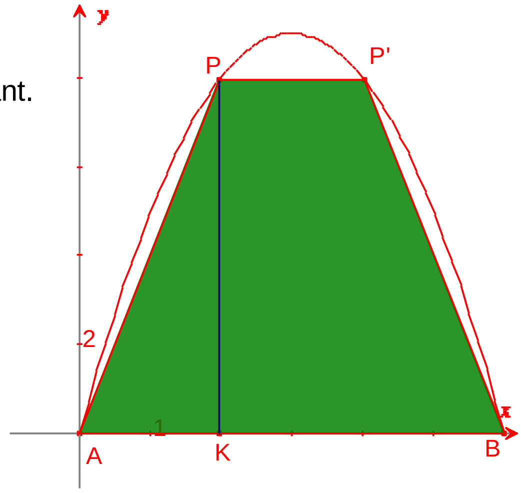
Com que la funció la funció $f(x) = \sqrt{x}$ és estrictament creixent el màxim de la funció àrea s’assoleix en el màxim de la funció $g(x) = (-x^2 + 4\pi x)(2\pi - x)^4$
Calculem $g'(x)$
$g'(x) = (2\pi - x)^3(6x^2 - 24\pi x + 8\pi^2)$
Resolem l’equació $g'(x) = 0$

$$x = \frac{2(3 - \sqrt{6})\pi}{3} \approx 1.1530$$

Estudiant el signe de la primera derivada al voltant de $x = \frac{2(3-\sqrt{6})\pi}{3} \approx 1.1530$, notem que és un màxim relatiu estricte.
El volum màxim és $V\left(\frac{2(3-\sqrt{6})\pi}{3}\right) \approx 403.0665$

Problema 37

Siga la paràbola $y = -x^2 + 6x$.
Feu un estudi de la paràbola. Representeu-la.
Siguen A i B els punts de tall amb l'eix d'abscisses.
Siga P un punt de la paràbola que pertany l primer quadrant.
Siga el trapezi isòsceles $ABP'P$ tal que P' pertany a la paràbola.
Calculeu l'àrea màxima del trapezi $ABP'P$.



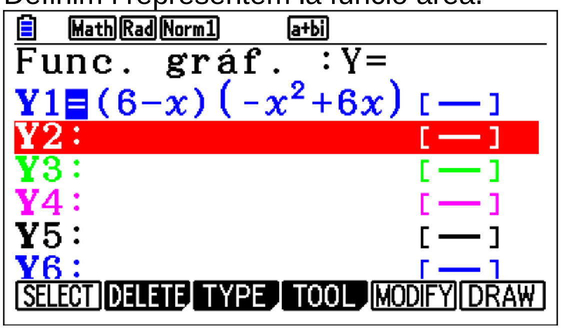
Solució:
La paràbola és convexa.
Per a calcular els punts de tall amb l'eix d'abscisses i el vèrtex resolem l'equació
$x^2 + 6x = 0$
$x(-x + 6) = 0$
Resolent l'equació:
$x = 0, 6$
Les coordenades de A i B són:
$A(0, 0), B(6, 0)$
L'eix de simetria de la paràbola és $x = 3$

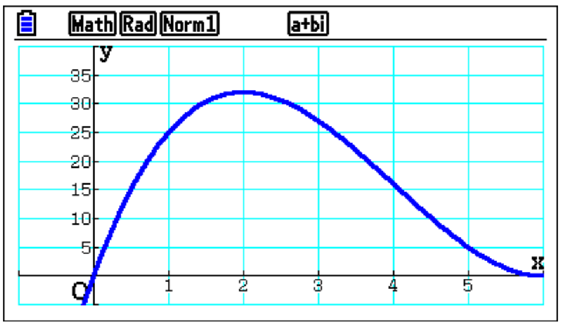
Siga K la projecció de P sobre l'eix d'abscisses.
Siga $x = \overline{AK}$
$\overline{KP} = -x^2 + 6x$

$\overline{PP'} = 6 - 2x$

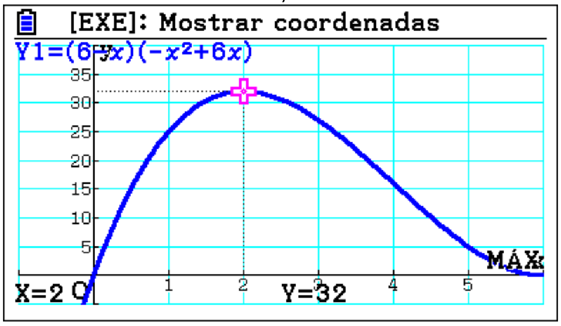
L'àrea del trapezi $ABP'P$ és:
$$S_{ABP'P} = \frac{6 + (6 - 2x)}{2}(-x^2 + 6x)$$
$S(x) = (6 - x)(-x^2 + 6x), \quad x \in [0, 6]$

Obrim el Menú Gráfico
Definim i representem la funció àrea.



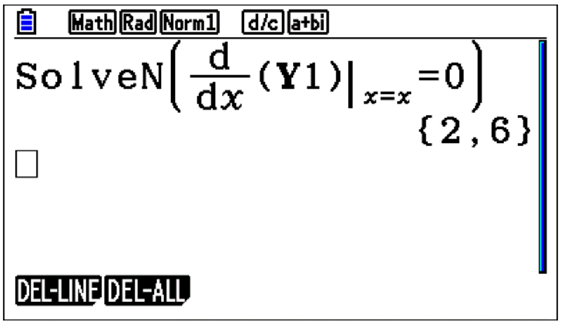


Amb la funció *G-Solv*, determinem el màxim de la funció àrea.

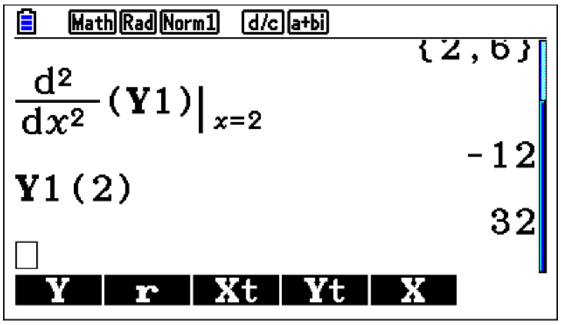


El màxim de la funció s’assoleix quan $x = 2$ i l’àrea màxima és $S_{màx} = 32$

Obrim el *Menú Ejec-Mat*
Resolem l’equació $S'(x) = 0$



Calculem $S"(2), S(2)$



El màxim de la funció s’assoleix quan $x = 2$ i l’àrea màxima és $S_{màx} = 32$

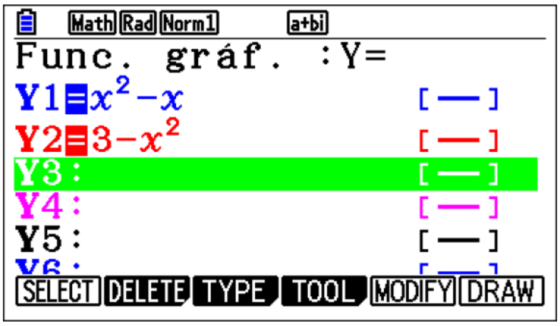
Solució 2. Analíticament.
L’àrea del trapezi és:
$S(x) = (6 - x)(-x^2 + 6x), \quad x \in [0, 6]$
$S(x) = x^3 - 12x^2 + 36x$

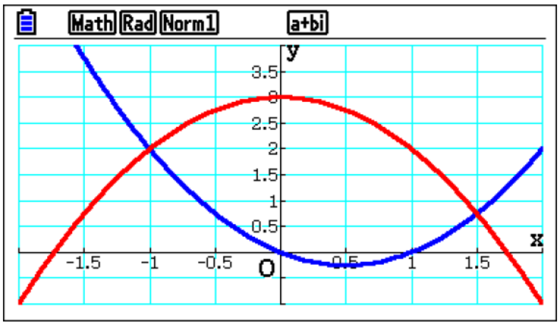
Calculem la derivada de la funció àrea.
$S'(x) = 3x^2 - 24x + 36$
Resolem l’equació $S'(x) = 0$
$x^2 - 8x + 12 = 0$
Les solucions són $x = 2, 6$

Calculem $S''(x)$
$S''(x) = 6x - 24$
$S''(2) = -12 < 0, S''(6) = 12 > 0$
Aleshores,
El màxim de la funció s'assoleix quan $x = 2$ i l'àrea màxima és $S(2) = 32$

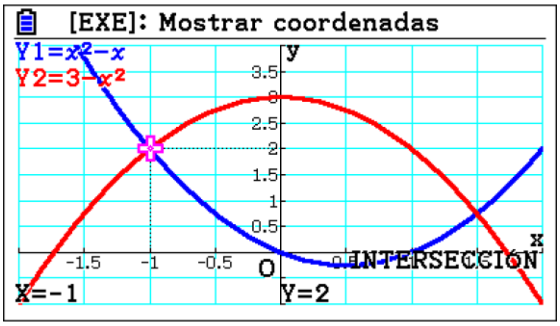
Problema 38
Siguen les paràboles $y = x^2 - x$, $y = 3 - x^2$.
a) Dibuixeu les dues paràboles en el mateix gràfic.
b) Determineu els punts de tall de les dues paràboles.
c) Calculeu la màxima distància vertical entre es dues paràboles compresa entre els dos punts de tall d'ambdues paràboles.

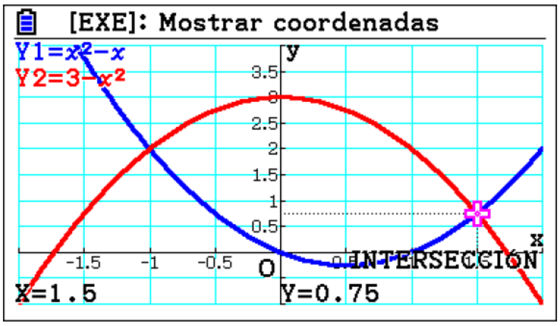
Solució:
a)
Obrim el *Menú Gráfico*.
Definim i representem les dues paràboles.





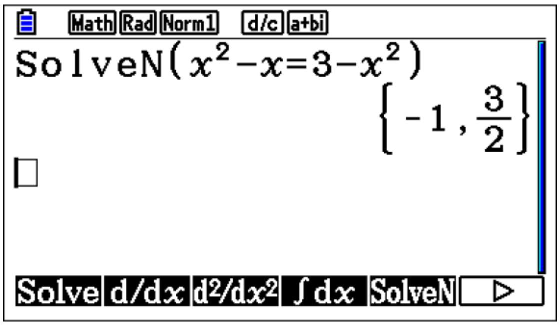
b)
Amb la funció G-Solv, determinem la intersecció de les dues paràboles.



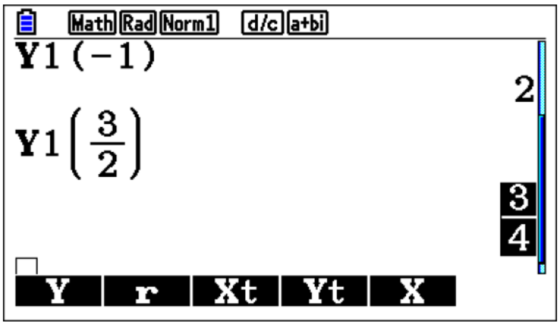


Els punts d'intersecció són $(-1, 2)$, $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{4}\right)$.

Obrim el *Menú Ejec-Mat*.
Resolem l'equació $x^2 - x = 3 - x^2$



Calculem $Y1(-1), Y1\left(\frac{3}{2}\right)$



Els punts d'intersecció són $(-1,2), \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{4}\right)$.

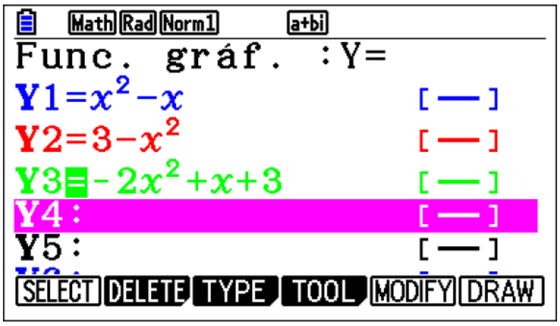
c)

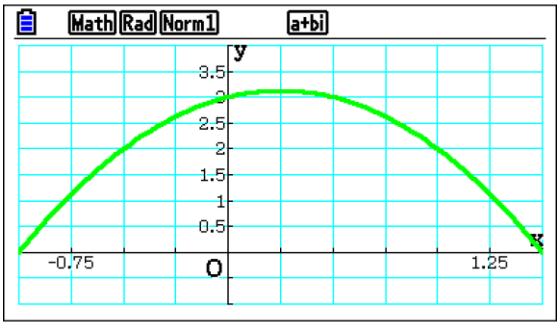
Per de terminar la distància entre les dues paràboles, restarem les imatges entre la paràbola convexa i la còncava:

$f(x) = 3 - x^2 - (x^2 - x)$

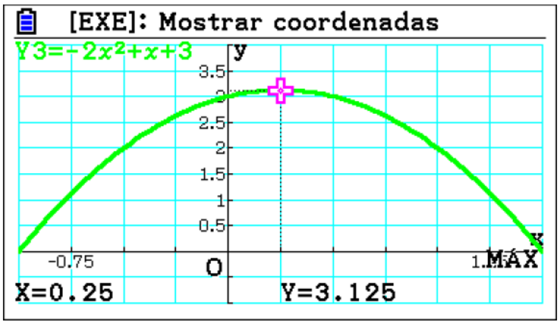
$f(x) = -2x^2 + x + 3, \qquad x \in \left[-1, \frac{3}{2}\right]$

Obrim el *Menú Gráfico*.
Definim i representem la funció distància.

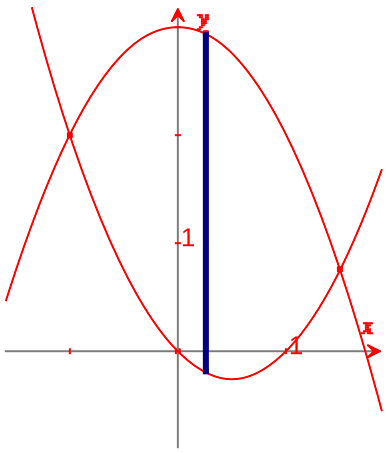




Amb la funció *G-Solv*, determinem el màxim de la funció.



El màxim s'assoleix quan $x = \frac{1}{4}$ i la distància màxima és $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{25}{8}$



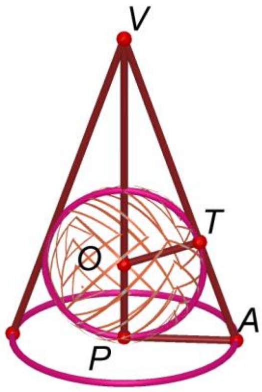
La funció distància és una paràbola convexa.
El màxim s'assoleix en el vèrtex.
Les coordenades del vèrtex són

$V\left(\frac{1}{4}, \frac{25}{8}\right)$

Problema 39
De tots els cons rectes circumscrits a una esfera de radi $r = 2$ determineu les dimensions del que té volum mínim.

Solució.
Considerem una secció axial del con.
La secció passa pel centre O de l'esfera de radi $r = 2$
Siga P el punt de tangència de l'esfera i la base del con.
Siga T el punt de tangència de l'esfera i la superfície lateral del con.
$\overline{OP} = \overline{OT} = 2$

Siga $R = \overline{PA}$ radi cel con.
Siga $h = \overline{PV}$ altura del con
El volum del con és:
$$V = \frac{\pi}{3}R^2h$$

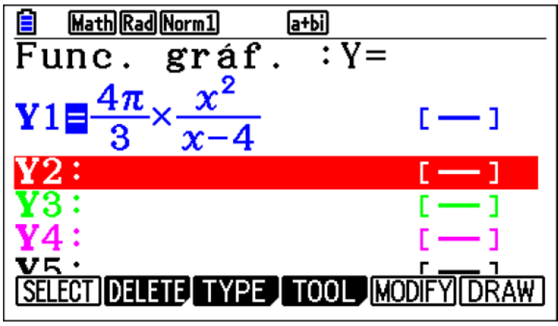


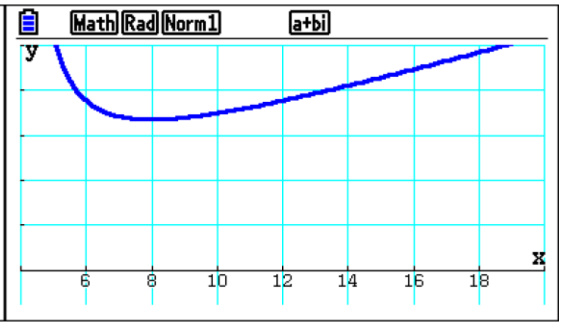
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{APV}$, la generatriu del con mesura:
$$\overline{AV} = \sqrt{R^2 + h^2}$$
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{APV}, \overset{\Delta}{OTV}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{R}{2} = \frac{\sqrt{R^2 + h^2}}{h - 2}$$

Elevant al quadrat i simplificant:
$$R^2 = \frac{4h}{h - 4}$$

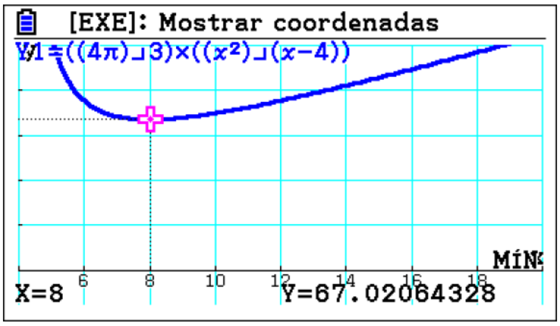
El volum del con és:
$$V(h) = \frac{4\pi}{3}\frac{h^2}{h - 4}, \qquad h \geq 4$$

Obrim el *Menú Gráfico*
Definim i representem la funció volum.



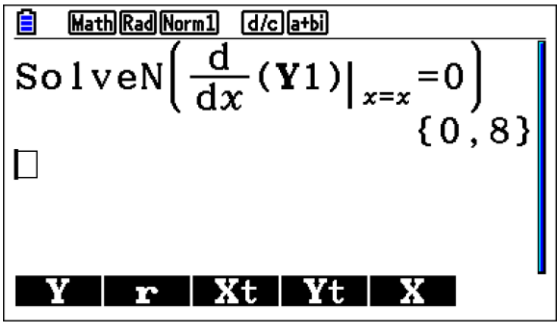


Amb la funció *G-Solv*, determinem el mínim de la funció volum:

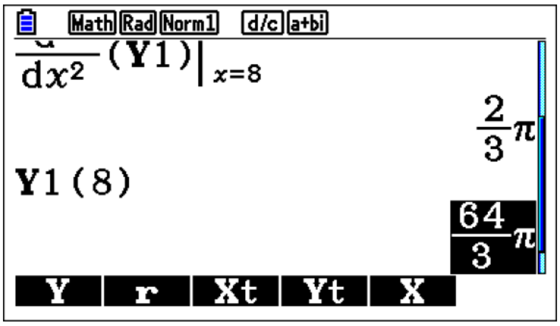


El volum mínim s’assoleix quan $h = 8$, $R^2 = 8$
El volum mínim és $V_{màx} \approx 68.0206$

Obrim el *Menú Ejec-Mat*.
Resolem l’equació $V'(h) = 0$



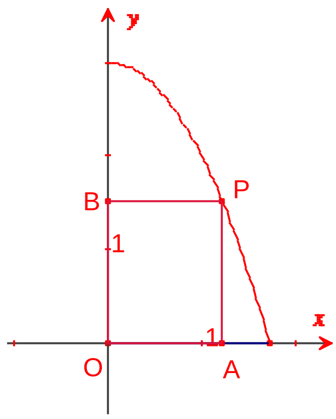
Calculem $V("8), V(8)$



El volum mínim s’assoleix quan $h = 8$, $R^2 = 8$
El volum mínim és $V(8) = \frac{64\pi}{3} \approx 68.0206$

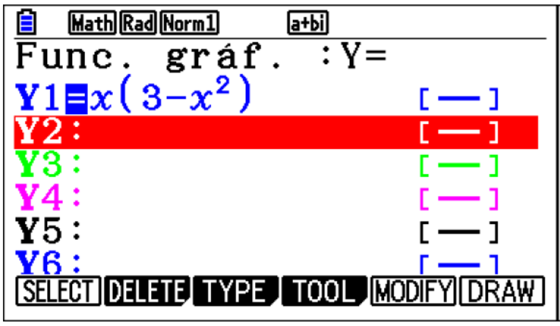
Problema 40
En el primer quadrant representem un rectangle de tal manera que té un vèrtex en l’origen de coordenades i el vèrtex oposat en la paràbola $y=-x^2+3$.
Determineu les dimensions del rectangle a fi que l’àrea siga màxima.

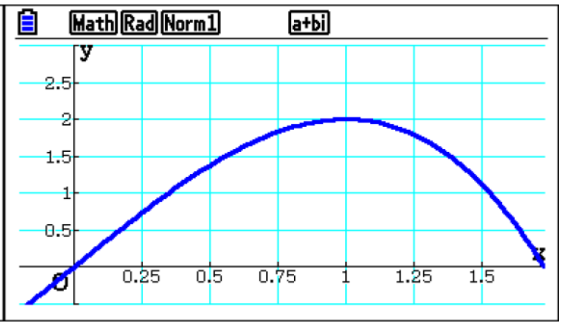
Solució 1:
Determinem la funció $y=-x^2+3$.
És contínua i derivable en $\left]0,\sqrt{3}\right[$.
Definida positiva i decreixent en $\left]0,\sqrt{3}\right[$.



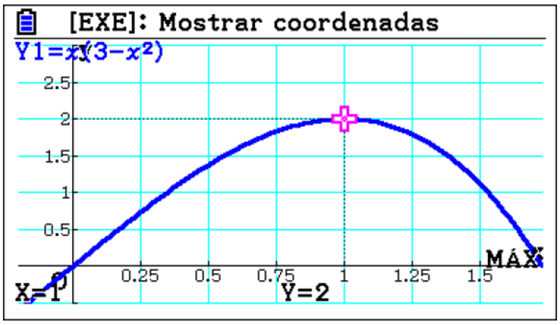
Siga P un punt sobre la corba tal que $x\in\left]0,\sqrt{3}\right[$
Les seues coordenades són
$P(x,3-x^2)$
L’àrea de del rectangle $OAPB$ és:
$S(x)=x(x,3-x^2),\qquad x\in\left]0,\sqrt{3}\right[$

Obrim el *Menú Gráfico*.
Definim i representem la funció àrea.

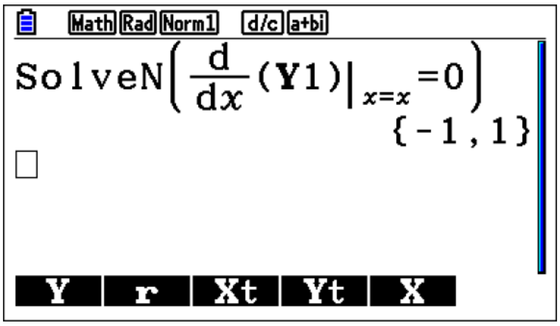




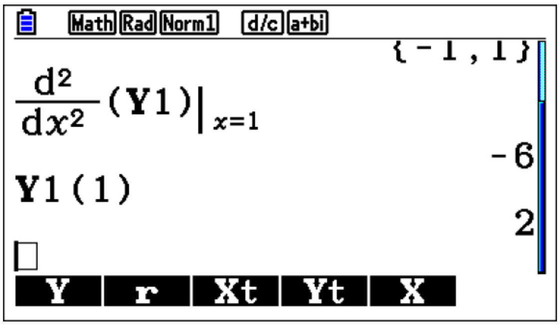
Amb la funció *G-Solv*, determinem el màxim de la funció.



Obrim el *Menú Ejec-Mat.*
Resolem l’equació $S'(x)=0$



Calculem S”$(1), S(1)$



Aleshores, $x = 1$, és un màxim relatiu estricte.

El rectangle d’àrea màxima s’assoleix en el punt $P(1, 2)$ i l’àrea màxima és:
$S(1) = 2$

Solució 2:
L’àrea del rectangle $OAPB$ és:
$S(x) = x(x, 3 - x^2), \qquad x \in \left]0, \sqrt{3}\right[$
$S(x) = -x^3 + 3x, \qquad x \in \left]0, \sqrt{3}\right[$
Calculem la derivada de l’àrea.
$S'(x) = -3x^2 - 3$

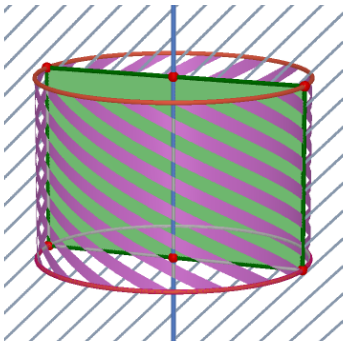
Resolem l’equació $S'(x) = 0$
$3x^2 - 3 = 0$
Aleshores, la solució és $x = 1$

Calculem la segona derivada de la funció àrea:
$S''(x) = -6x$
$S''(1) = -6 < 0$

Aleshores, $x = 1$, és un màxim relatiu estricte.

El rectangle d’àrea màxima s’assoleix en el punt $P(1, 2)$ i l’àrea màxima és:
$S(1) = 2$

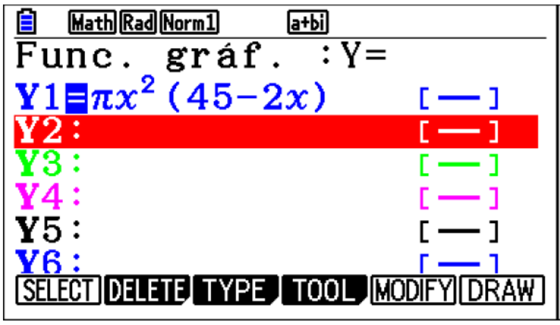
Problema 41
El perímetre de la secció axial d'un cilindre mesura $90\ cm$
Determineu el volum màxim del cilindre.

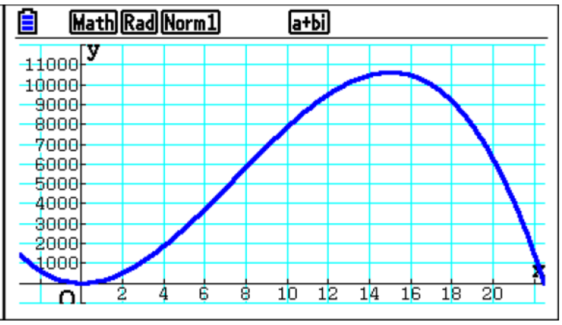


Nota:
Secció axial, és el rectangle determinat per la intersecció del cilindre amb un plànol que passa pels centres de les dues bases.

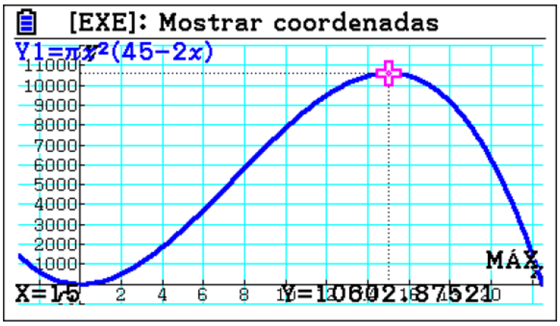
Solució 1:
Siga R el radi del cilindre i h la seua altura.
El perímetre de la secció és:
$4R + 2h = 90$
$h = 45 - 2R$

El volum del cilindre és:
$V(R,h) = \pi R^2 h$
$V(R) = \pi R^2(45 - 2R), \qquad R \in \left[0, \frac{45}{2}\right]$
Obrim el *Menú Gráfico*.
Definim i representem la funció volum.



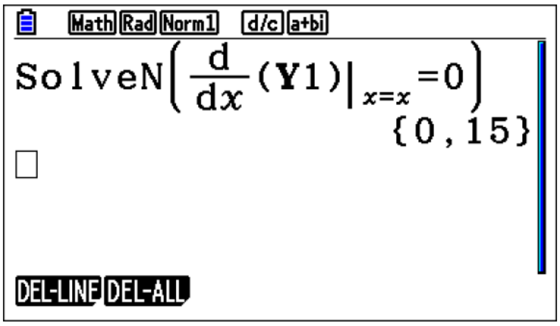


Amb la funció *G-Solv*, determinem el màxim de la funció.

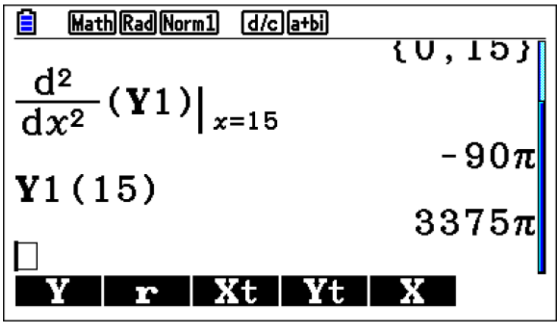


El volum màxim s'assoleix quan $R = 15\ cm, h = 45 - 30 = 15\ cm$
El volum màxim és $V_{màx} \approx 10602.8752\ cm^3$

Obrim el *Menú Ejec-Mat*.
Resolem l'equació $V'(R) = 0$



Calculem $V"(15), V(15)$



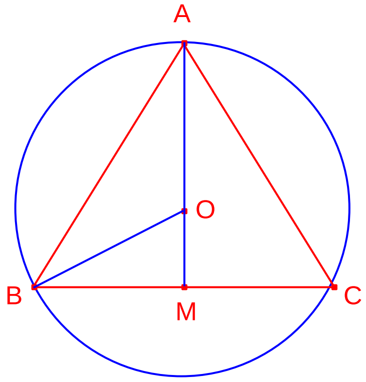
El volum màxim s'assoleix quan $R = 15\ cm, h = 45 - 30 = 15\ cm$
El volum màxim és $V(15) = 3375\pi \approx 10602.8752\ cm^3$

Solució 2
El volum del cilindre és:
$V(R) = \pi R^2(45 - 2R), \qquad R \in \left[0, \frac{45}{2}\right]$
$V(R) = \pi(-2R^3 + 45R^2)$
Calculem la derivada del volum:
$V'(R) = \pi(-6R^2 + 90R)$
Resolem l'equació $V'(R) = 0$
$-6R^2 + 90R = 0$
$R = 15\ cm, h = 15\ cm$
Calculem la segona derivada:
$V"(R) = \pi(-12R + 90)$
$V"(15) - 90\pi < 0$
Aleshores, el màxim del volum s'assoleix quan $R = 15\ cm, h = 15\ cm$
El volum màxim és $V(15) = 15^3\pi \approx 10602.8752\ cm^3$

Problema 42
Determineu les mesures del triangle isòsceles inscrit en una circumferència de radi $R = 10$ tal que la suma de la base i l'altura siga màxima. Calculeu la suma màxima.

Solució 1:

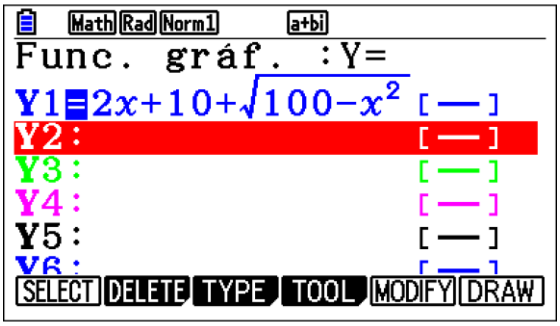
Siga el triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}, \overline{AB} = \overline{AC}$inscrit en la circumferència de centre O i radi $R = 10$.

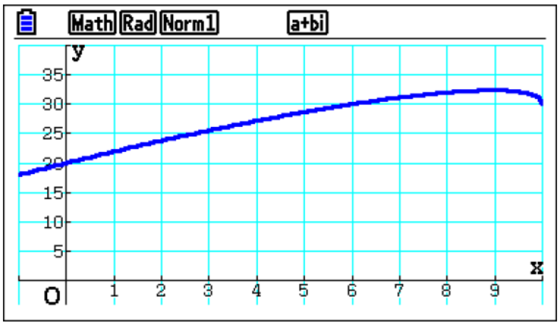


Siga M el punt mig de la base $\overline{BC}$.
Podem suposar que $\overline{AM} \geq \overline{OA} = R = 10$
$\overline{BM} = x, \overline{OM} = y$

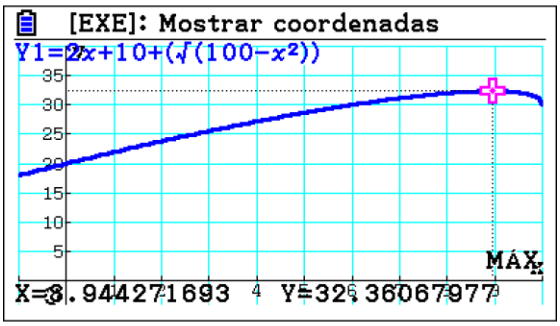
La suma de la base i l'altura és:
$S(x, y) = 2x + y + 10$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BMO}$:
$x^2 + y^2 = 100$
$y = \sqrt{100 - x^2}$
La suma és:
$S(x) = 2x + 10 + \sqrt{100 - x^2}, \qquad x \in [0, 10]$
Obrim el *Menú Gráfico*.
Definim i representem la funció suma.



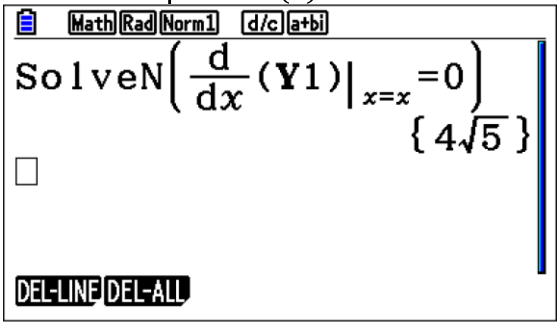


Amb la funció *G-Solv*, determinem el màxim de la funció.

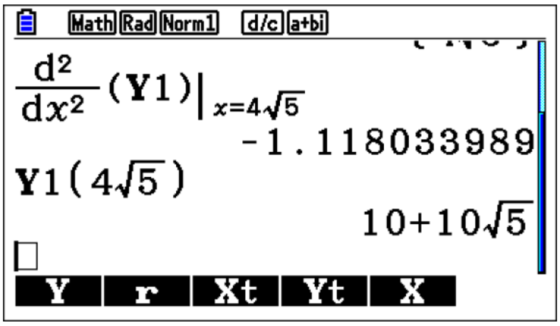


El màxim s'assoleix aproximadament quan $x \approx 8.9443$.
La suma màxima és aproximadament, $S_{màx} \approx 32.3607$

Obrim el *Menú Ejec-Mat*.
Resolem l’equació $S'(x) = 0$



Calculem $S"(4\sqrt{5})$, $S(4\sqrt{5})$

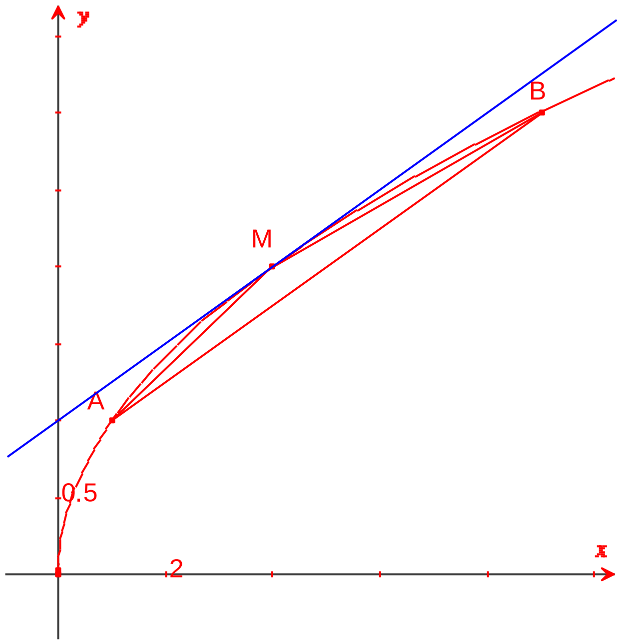


El màxim s’assoleix quan $x = 4\sqrt{5} \approx 8.9443$.
La suma màxima és a, $S(4\sqrt{5}) = 10(1 + \sqrt{5}) \approx 32.3607$

Solució 2:
La funció suma és
$S(x) = 2x + 10 + \sqrt{100 - x^2}, \qquad x \in [0, 10]$
Derivem la funció suma:
$$S'(x) = 2 - \frac{x}{\sqrt{100 - x^2}}$$
Resolem l’equació $S'(x) = 0$
La solució és $x = 4\sqrt{5}$
Calculem la segona derivada de la funció suma:
$$S"(x) = -\frac{100}{(100 - x^2)\sqrt{100 - x^2}}$$
$S"(4\sqrt{5}) < 0$
Aleshores,
El màxim s’assoleix quan $x = 4\sqrt{5} \approx 8.9443$.
La suma màxima és a, $S(4\sqrt{5}) = 10(1 + \sqrt{5}) \approx 32.3607$

Problema 43

Determineu en la gràfica de la funció $y = \sqrt{x}, x \in [1,9]$ un punt M a fi que l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABM}$, siga màxima. A, B són punts de la gràfica amb abscisses 1 i 9, respectivament.



Solució:

Les coordenades dels punts . A, B són:

$A(1,1), B(9,3)$

Les coordenades de M són:

$M(x, \sqrt{x})$

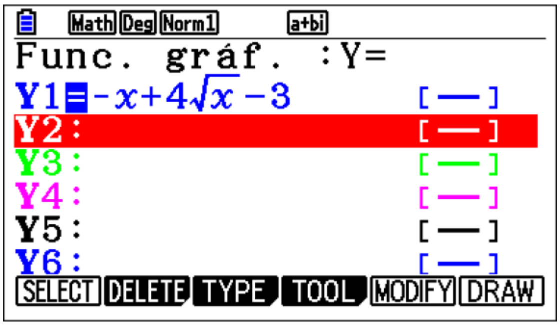
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABM}$ és:

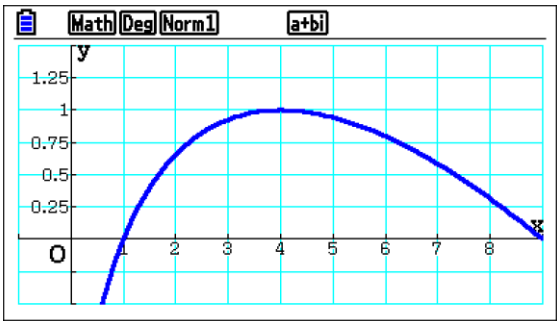
$$S(x) = \frac{1}{2}\left| det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ x & \sqrt{x} & 1 \end{pmatrix} \right|$$

$$S(x) = -x + 4\sqrt{x} - 3, \qquad x \in [1,9]$$

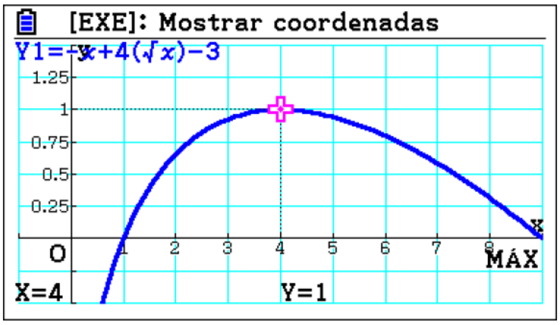
Obrim el *Menú Gráfico*.

Definim i representem la funció àrea.





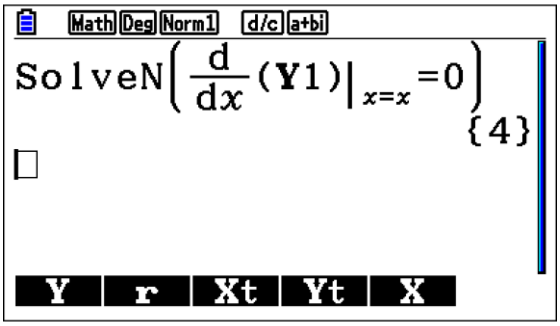
Amb la funció *G-Solv*, determinem el màxim de la funció àrea.



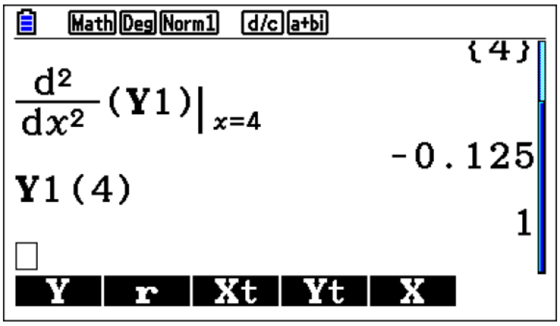
El màxim s'assoleix quan $x = 4$, és a dir, en el punt $M(4,2)$

L'àrea màxima és $S_{màx} = 1$

Obrim el *Menú Ejec-Mat*.
Resolem l’equació $S'(x) = 0$



Calculem $S"(4), S(4)$



El màxim s’assoleix quan $x = 4$, és a dir, en el punt $M(4,2)$
L’àrea màxima és $S(4) = 1$

Solució 2:
La funció àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABM}$ és:
$S(x) = -x + 4\sqrt{x} - 3, \qquad x \in [1, 9]$

Calculem la derivada de la superfície:
$$S'(x) = -1 + \frac{2}{\sqrt{x}}$$
Resolem l’equació $S'(x) = 0$.
$$-1 + \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$$
$x = 4$

Calculem la segona derivada de la funció àrea.
$$S(x) = -\frac{1}{x\sqrt{x}}$$
$$S(4) = -\frac{1}{4} < 0$$
Aleshores, $x = 4$ és un màxim relatiu estricte.

$$S'(x) = -1 + \frac{2}{\sqrt{x}}.$$

$S'(x) = 0$, resolem l’equació: $-1 + \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$, $x = 4$.

Calculem la segona derivada:
$S"(x) = -\frac{1}{x\sqrt{x}}$
$S"(4) = -\frac{1}{8} < 0$
Aleshores, $x = 4$és un màxim relatiu estricte.

El màxim s'assoleix quan $x = 4$, és a dir, en el punt $M(4{,}2)$
L'àrea màxima és $S(4) = 1$

Solució 3:
La funció àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABM}$ és:
$S(x) - x + 4\sqrt{x} - 3, \qquad x \in [1, 9]$

Completant quadrats:
$S(x) = -\left(\sqrt{x} - 2\right)^2 + 1, \qquad x \in [1, 9]$

$S(x) = -\left(\sqrt{x} - 2\right)^2 + 1 \leq 1$

La igualtat s'assoleix quan $\sqrt{x} - 2 = 0$
Resolent l'equació $x = 4$

El màxim s'assoleix quan $x = 4$, és a dir, en el punt $M(4{,}2)$
L'àrea màxima és $S(4) = 1$