Problema A.1. 2013 juliol

Comproveu raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat, que:

a) Si el producte de dues matrius quadrades A i B és commutatiu és a dir, que $AB = BA$, aleshores es dedueix que $A^2B^2 = (AB)^2$.

b) Que la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 10 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix}$ satisfà la relació $A^2 - 3A + 2I = O$, sent I i O, respectivament, les matrius d'ordre 3×3 unitat i nul·la, i que una matriu A tal que $A^2 - 3A + 2I = O$ té matriu inversa.

c) Calculeu raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat, els valors α i β que fan que $A^3 = \alpha A + \beta I$

Solució:

a)

$A^2B^2 = AABB = A(AB)B = A(BA)B = (AB)(AB) = (AB)^2$.

b)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 10 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 10 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 30 \\ 0 & -9 & 19 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - 3A + 2I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 30 \\ 0 & -9 & 19 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 10 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si $A^2 - 3A + 2I = O$, aleshores:

$A(A - 3I) = -2I$. Calculant determinants:

$|A| \cdot |A - 3)| = |-2I| = -8$.

Aleshores, $|A| \neq 0$, per tant, la matriu A té inversa.

c).

Si $A^2 - 3A + 2I = O$, aleshores:

$A^2 = 3A - 2I$.

Multiplicant per A:

$A^2A = (3A - 2I)A$.

$A^3 = 3A^2 - 2A$.

$A^3 = 3(3A - 2I) - 2A$.

$A^3 = 7A - 6I$.

Aleshores, $\alpha = 7, \beta = -6$.

Problema A.2. 2013 juliol

Tenim les rectes $r_1 \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\alpha \\ y = \alpha \\ z = 2 - \alpha \end{cases}$ i $r_2 \equiv \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 + \beta \\ z = -1 - 2\beta \end{cases}$, sent α i β paràmetres reals.

Calculeu raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:

a) Unes equacions implícites de r_1

b) La justificació que les rectes r_1 i r_2 estan contingudes en un plànol Π i l'equació d'aquest plànol Π.

c) L'àrea del triangle de vèrtexs P, Q i R, sent, $P(-1, 0, 1)$, $Q(0, 1, 2)$ i R el punt d'intersecció de les rectes r_1 i r_2.

Solució:

a)

L'equació de r_1 està en forma paramètrica. De la segona equació $\alpha = y$.

Substituint el paràmetre en la primera i segona equació:

$r_1 \equiv \begin{cases} x - 2y - 1 = 0 \\ y + z - 2 = 0 \end{cases}$.

b)

Un punt de la recta r_1 és $A(1, 0, 2)$ i el vector director és $v = (2, 1, -1)$.

Un punt de la recta r_2 és $B(-1, 1, -1)$ i el vector director és $w = (0, 1, -2)$.

$\{v, w\}$ són linealment independent, aleshores són secant o és creuen.

$\overrightarrow{AB} = (-2, 1, -3)$

Estudiem el determinant format per $\{v, w, \overrightarrow{AB}\}$.

$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0$, aleshores, $\{v, w, \overrightarrow{AB}\}$ són linealment dependents, aleshores rectes r_1 i r_2 estan contingudes en un plànol Π.

La seua equació és: $\Pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z-2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$. Simplificant: $\Pi \equiv -x + 4y + 2z - 3 = 0$.

c)

Calculem el punt intersecció R les rectes r_1 i r_2, igualant les coordenades de les seues equacions paramètriques:

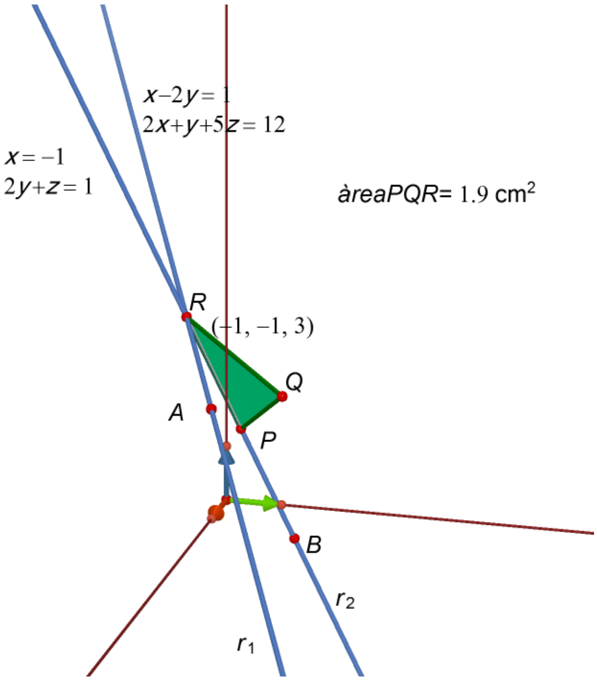
$\begin{cases} 1 + 2\alpha = -1 \\ \alpha = 1 + \beta \\ 2 - \alpha = -1 - 2\beta \end{cases}$. Resolent el sistema: $\begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = -2 \end{cases}$

Aleshores, de coordenades de R són: $R(-1, -1, 3)$.

L'àrea del triangle de vèrtexs P, Q i R és: $S_{PQR} = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}\right\|$.

$\overrightarrow{PQ} = (1, 1, 1)$, $\overrightarrow{PR} = (0, -1, 2)$. $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 3i - 2j - k = (3, -2, -1)$.

$S_{PQR} = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}\right\| = \frac{1}{2}\sqrt{3^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \frac{\sqrt{14}}{2}$.



x−2y = 1
2x+y+5z = 12
x = −1
2y+z = 1
àreaPQR= 1.9 cm2
R
(−1, −1, 3)
Q
A
P
B
r2
r1

Problema A.3. 2013 juliol

Es donen les funcions $f(x)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ i $g(x)=\ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

Determineu raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:

a) Les derivades de les funcions f(x) i g(x).

b) Els dominis de les funcions f(x) i g(x).

c) L'expressió simplificada de la funció $f(x)+g(x)$ i el recorregut d'aquesta funció $f(x)+g(x)$.

Solució:

a)

$$f'(x)=\frac{1}{2}\frac{1}{\frac{1+x}{1-x}}\frac{1(1-x)-(-1)(1+x)}{(1-x)^2}=\frac{1}{(1+x)(1-x)}=\frac{1}{1-x^2}.$$

$$g(x)=\ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

$$g'(x)=\frac{1}{2}\frac{1}{\frac{1-x}{1+x}}\frac{-1(1+x)-1(1-x)}{(1+x)^2}=\frac{-1}{(1+x)(1-x)}=\frac{-1}{1-x^2}.$$

b)

El domini de f(x) és:

$$Dom(f(x))=\left\{x\in R\ /\ \frac{1+x}{1-x}>0\wedge 1-x\neq 0\right\}=\left]-1,1\right[.$$

$$Dom(g(x))=\left\{x\in R\ /\ \frac{1-x}{1+x}>0\wedge 1+x\neq 0\right\}=\left]-1,1\right[.$$

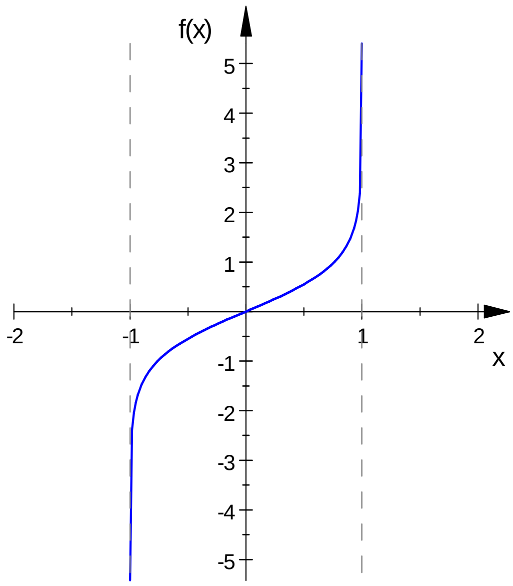
c)

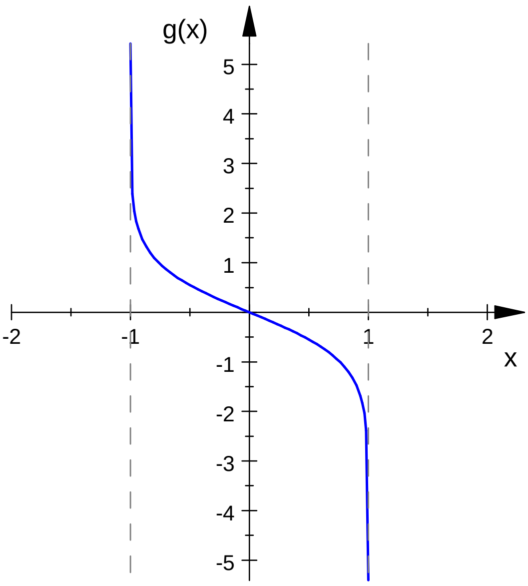
El domini de $f(x)+g(x)$ és $Dom(f(x))\cap Dom(g(x))=\left]-1,1\right[$.

$$f(x)+g(x)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\frac{1}{2}\left(\ln(1+x)-\ln(1-x)\right)+\frac{1}{2}(\ln(1+x)-\ln(1.x))=0.$$

Aleshores, $f(x)+g(x)=0$, $x\in\left]-1,1\right[$. (funció constant).

El recorregut és $\{0\}$.





Problema B.1. 2013 juliol

Es dóna el sistema d'equacions $\begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=1 \\ 3x+5y+z=1 \end{cases}$, on a és un paràmetre real.

Calculeu raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:

a) Totes les solucions del sistema quan $a=7$

b) Els valors de a per als quals el sistema és compatible indeterminat.

c) Els valors de a per als quals el sistema és compatible determinat.

Solució:

Calcularem el determinant de la matriu de coeficients i la matriu ampliada amb ajut de determinants.

La matriu de coeficients és $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, la matriu ampliada és $A'=\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 \end{array}\right)$.

Notem que la 4ª columna de la matriu ampliada és igual a la 3ª columna.

Aleshores, $\text{rang}(A)=\text{rang}(A')$ aleshores el sistema és compatible per a tots els valors de a.

$|A|=a^2-8a+7$.

$|A|=0$ si $a^2-8a+7=0$. Resolent l'equació: $a=1,7$.

Aleshores, $a=1,7$, $\text{rang}(A)<3$.

$\text{rang}(A)=\text{rang}(A')<3=\text{num. incògnites}$. El sistema és compatible indeterminat.

$|A|\neq 0$ si $a^2-8a+7\neq 0$. Resolent l'equació: $a\neq 1,7$.

Aleshores, $a=1,7$, $\text{rang}(A)=3$.

$\text{rang}(A)=\text{rang}(A')=3=\text{num. incògnites}$. El sistema és compatible determinat.

Resolem el sistema per a $a=7$, que és compatible indeterminat.

Considerem el menor de la matriu A format per la 2ª i 3ª fila i 2ª i 3ª columna:

$\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}=2$, aleshores, $\text{rang}(A)=\text{rang}A'=2$.

La primera equació del sistema inicial és dependent de les altres dues. Aleshores la podem eliminar.

El sistema inicial és equivalent a: $\begin{cases} 7y+z=1-x \\ 5y+z=1-3x \end{cases}$. $\begin{cases} x=\beta \\ y=\dfrac{\begin{vmatrix} 1-\beta & 1 \\ 1-3\beta & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}}=\beta \\ z=\dfrac{\begin{vmatrix} 7 & 1-\beta \\ 5 & 1-3\beta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}}=1-8\beta \end{cases}$

Problema B.2. 2013 juliol

Es donen les rectes $r \equiv \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y + z = 1 \end{cases}$ i $s \equiv x - 1 = y - 2 = z$.

Determineu raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:

a) Un punt i un vector director de cadascuna de les dues rectes.

b) La distància entre les rectes r i s, justificant que les rectes r i s es creuen.

c) Unes equacions de la recta t que passa pel punt $\left(\frac{45}{57}, -\frac{14}{57}, 0\right)$ i és perpendicular a les rectes r i s.

Solució:

a)

L'equació de la recta r està en forma general, passem-la a la forma paramètrica.

$$r \equiv \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y + z = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = \alpha \\ y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\alpha \\ z = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\alpha \end{cases}.$$

Un punt de la recta r és $P\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ i un vector director $v = (2, -1, -3)$.

L'equació de la recta s està en forma contínua.

Un punt de la recta s és $Q(1, 2, 0)$ i un vector director $w = (1, 1, 1)$.

b)

$$\overrightarrow{PQ} = \left(1, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

$\{v, w\}$ són linealment independents, aleshores, les rectes es tallen o és creuen.

Estudiem la linealitat dels vectors $\{v, w, \overrightarrow{PQ}\}$:

$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -7 \neq 0$. Aleshores, $\{v, w, \overrightarrow{PQ}\}$ són linealment independents, per tant, les rectes r i s es creuen.

b)

La distància entre les rectes r i s: $d(r, s) = \dfrac{\left|\left[v, w, \overrightarrow{PQ}\right]\right|}{\|v \times w\|}$

$v \times w = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2i - 5j + 3k = (2, -5, 3)$. $\|v \times w\| = \sqrt{38}$

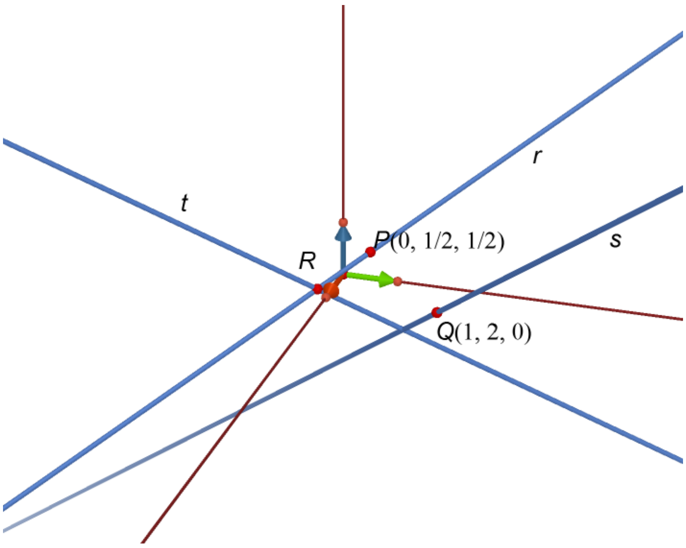
$\left|\left[v, w, \overrightarrow{PQ}\right]\right| = 7$.

$$d(r, s) = \frac{\left|\left[v, w, \overrightarrow{PQ}\right]\right|}{\|v \times w\|} = \frac{7}{\sqrt{38}}.$$

c)

L'equació de la recta r que passa pel punt $\left(\frac{45}{57}, -\frac{14}{57}, 0\right)$ i és perpendicular a les rectes r i s té vector director $v \times w = (2, -5, 3)$. La seua equació és:

$$t \equiv \frac{x - \frac{41}{57}}{2} = \frac{y + \frac{14}{57}}{-5} = \frac{z - 0}{3}.$$



Problema B.2. 2013 juliol

En el plànol XY està dibuixada una parcel·la A els límits de la qual són dos carrers d'equacions $x = 0$ i $x = 40$, respectivament, una carretera d'equació $y = 0$, i el tram del curs d'un riu, d'equació $y = f(x) = 30\sqrt{2x+1}$, amb $0 \le x \le 40$, sent positiu el signe de l'arrel quadrada.

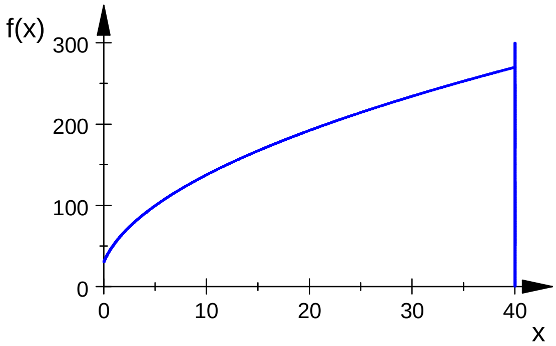
Es pretén urbanitzar un rectangle R inscrit en la parcel·la A, de manera que els vèrtexs de R siguen els punts $(x, 0)$, $(x, f(x))$, $(40, f(x))$, $(40, 0)$

Calculeu raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:

a) Àrea de la parcel·la A.

b) Els vèrtexs del rectangle R al que correspon l'àrea màxima.

c) El valor d'aquesta àrea màxima.



Solució:

a)

L'àrea de la parcel·la A és:

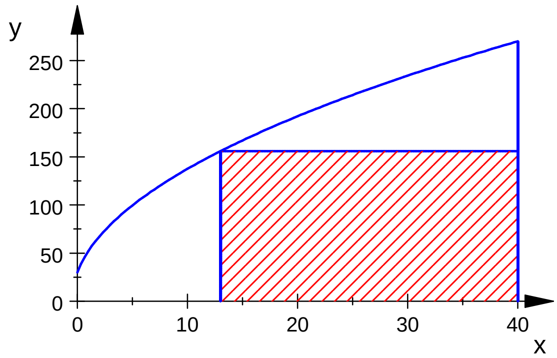
$\int_0^{40} 30\sqrt{2x+1}\,dx$.

Calculem la integral indefinida $\int 30\sqrt{2x+1}\,dx$ efectuant el canvi de variable $2x+1 = t^2$:

$dx = t \cdot dt$.

$$\int 30\sqrt{2x+1}\,dx = 30\int t^2\,dt = 10t^3 + C = 10\sqrt{(2x+1)^3} + C.$$

$$\int_0^{40} 30\sqrt{2x+1}\,dx = \left(10\sqrt{(2x+1)^3}\right)\Bigg|_0^{40} = 7290u^2.$$



b)

La base del rectangle és $40 - x$ i l'altura és f(x). La funció àrea és:

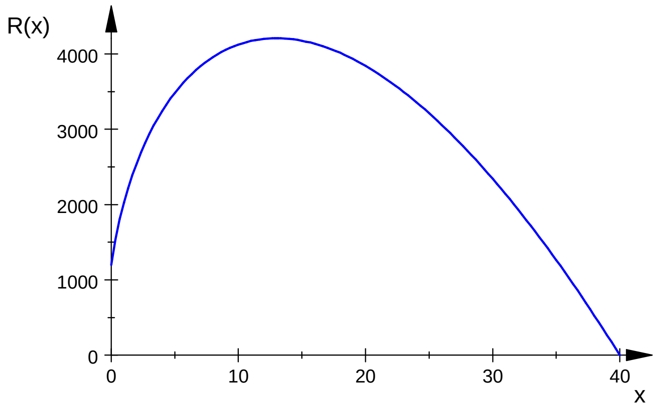
$R(x) = (40-x)\cdot 30\sqrt{2x+1}$, $x \in [0, 40]$.

Determinem el màxim d'aquest funció amb ajut del càlcul diferencial:

$$R'(x) = -\frac{30(x-40)}{\sqrt{2x+1}} - 30\sqrt{2x+1}$$

$$R'(x) = -\frac{30(3x-39)}{\sqrt{2x+1}}.$$

$R'(x) = 0$, $x = 13$.



Estudiant el signe de la primera derivada:

La funció és estrictament creixent en $x \in [0, 13]$ i estrictament decreixent en $x \in [13, 40]$.

Aleshores, $x = 13$ és un màxim de la funció.

$f(13) = 90\sqrt{3}$.

Els vèrtexs del rectangle d'àrea màxima són:

$(13, 0)$, $(13, 90\sqrt{3})$, $(40, 90\sqrt{3})$, $(40, 0)$.

c)

L'àrea del rectangle d'àrea màxima és: $R(13) = 2430\sqrt{3} \approx 4208.88u^2$.