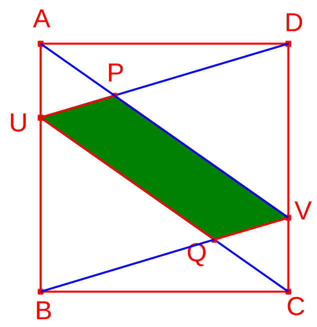
Ricard Peiró i Estruch

Problemes d'optimització 2015

Problema 1
Donat un con de radi 1 i altura 2, incrementem el radi de la base x i reduïm l'altura x.
Quin és el valor de x que fa màxim el nou volum del con.
KöMaL, C1258. Novembre 2014.

Problema 2
Determineu l'àrea màxima del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ si $\overline{AB}=9$ i $\overline{BC}:\overline{CA}=40:41$.

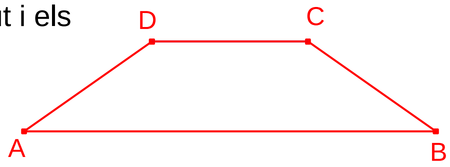
Problema 3
Siga el quadrat ABCD de costat 1.
Siguen U, V dels costats $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, respectivament, tal que $\overline{AU}=\overline{CV}$.
Determineu l'àrea màxima del paral·lelogram PUQV.



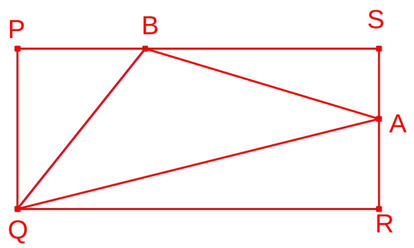
Problema 4
Siguen a, b, c i d quatre rectes paral·leles en aquest ordre.
Siga 1 la distància entre a i b.
Siga 3 la distància entre b i c.
Siga 1 la distància entre c i d.
Considerem els rectangles que tenen exactament un vèrtex en cadascuna de les rectes.
Determineu el rectangle d'àrea mínima.
KöMaL B4691. Febrer 2015.

Problema 5
Determineu el valor mínim de l'expressió $a+b^3$ on a i b són nombres reals positius tql que el seu producte és 1.
Crux CC97.

Problema 6
De tots els trapezis isòsceles tal que el costat paral·lel menut i els costats no paral·leles són iguals a c, determineu el d'àrea màxima.



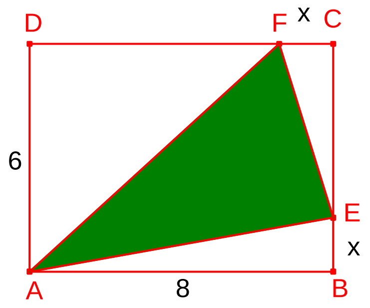
Problema 7
En la figura, PQRS és un rectangle d'àrea 10.
Siga A un punt del costat $\overline{RS}$ i B un punt del costat $\overline{PS}$ tal que l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{QAB}$ és 4.
Determineu el menor valor possible per a $\overline{PB}+\overline{RA}$.



Problema 8

Entre tots els triangles isòsceles determineu el que el quocient entre el radi de la circumferència inscrita i circumscrita siga màxim.
KöMaL, C1285, març 2015.

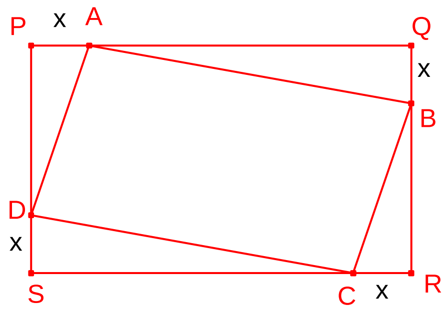
Problema 9



Siga el rectangle ABCD de costats $\overline{AB}=8$, $\overline{AD}=6$.
Siguen E i F dels costats $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, respectivament tal que $\overline{BE}=\overline{CE}=x$.

Determineu el valor de x a fi que l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{AEF}$ siga mínima.

Problema 10



PQ = 10   PS = 6

Siga el rectangle PQRS de costats $\overline{PQ}=10$, $\overline{PS}=6$.
Siguen A, B, C, D de costats $\overline{PQ}$. $\overline{QR}$, $\overline{RS}$, $\overline{SP}$, respectivament, tals que $\overline{PA}=\overline{QB}=\overline{RC}=\overline{SD}=x$.
Determineu el valor de x a fi que l'àrea del quadrilàter ABCD siga mínima.

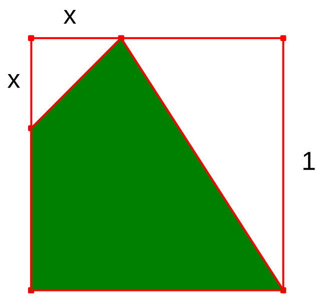
Problema 11

Donats els punts $A(2,4)$, $B(6,1)$.

Determineu el punt de l'eix d'abscisses amb el qual és veu el segment $\overline{AB}$ sota un angle màxim.
KöMaL, C1291.

Problema 12

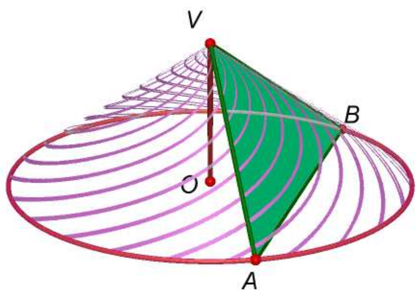
Determineu el valor de x a fi que l'àrea ombrejada siga màxima.



Problema 13

La base menor d'un trapezi isòsceles mesura 7 i cadascun dels costats oblics 15.
Determineu la mesura de la base major a fi que l'àrea del trapezi siga màxima.

Problema 14



Siga un con de revolució de vèrtex V, altura h i radi R.

1.- Determineu en la circumferència de la base una corda $\overline{AB}$ tal que l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{AVB}$ vinga donada per la distància x del centre de la base a la corda $\overline{AB}$.

2.- Determineu els costats i els angles del triangle $\overset{\Delta}{AVB}$ a fi que la seua àrea siga màxima.

Problema 15

Una esfera de radi R és tallada per un plànol horitzontal, creant un casquet esfèric d'altura $H < R$.

Siga el cilindre inscrit en el casquet d'altura y i radi x i d'eix vertical passant pel pol del casquet.

a) Determineu el volum del cilindre en funció de R, H i y.

b) Si $H = \frac{R}{2}$, Determineu en funció de H el valor de y a fi que el volum del cilindre siga màxim.

Solucions

Problema 1
Donat un con de radi 1 i altura 2, incrementem el radi de la base x i reduïm l'altura x.
Quin és el valor de x que fa màxim el nou volum del con.
KöMaL, C1258. Novembre 2014.

Solució 1:
El nou radi és $r = 1 + x$ i l'altura $r = 2 - x$.
El volum del con és:

$$V(x) = \frac{\pi}{3}(1+x)^2(2-x),\ x \in [0, 2].$$

$$V(x) = \frac{\pi}{3}\left(-x^3 + 3x + 2\right).$$

Derivant la funció:

$$V'(x) = \pi\left(-x^2 + 1\right).$$

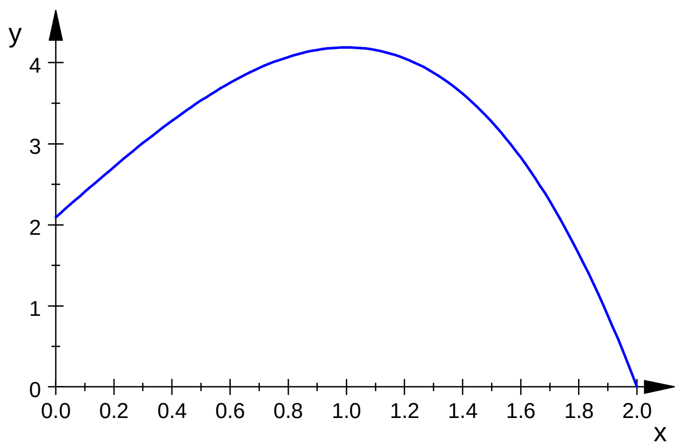
$V'(x) = 0$, $-x^2 + 1 = 0$. Resolent l'equació:

$x = 1$.

$V''(x) = -2\pi x$.

$V''(1) = -2\pi < 0$. Aleshores, $x = 1$, és un màxim relatiu estricte.

El volum màxim s'assoleix $x = 1$ i el volum màxim és, $V_{màx} = V(1) = \dfrac{4\pi}{3}$.



Problema 2

Determineu l'àrea màxima del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ si $\overline{AB} = 9$ i $\overline{BC} : \overline{CA} = 40 : 41$.

Solució:

Siga $\overline{BC} = 40x, \overline{CA} = 41x$.

Aplicant la fórmula d'Heró l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$$S(x) = \frac{\sqrt{(9+81x)(x+9)(-x+9)(-9+81x)}}{4}, \quad x \in \left[\frac{1}{9}, 9\right].$$

$$S(x) = \frac{\sqrt{-6561x^4 + 531522x^2 - 6561}}{4}.$$

Considerem la funció, $f(x) = \sqrt{-6561x^4 + 531522x^2 - 6561}$, $x \in \left[\frac{1}{9}, 9\right]$.

El màxim de la funció f(x) s'assoleix quan:

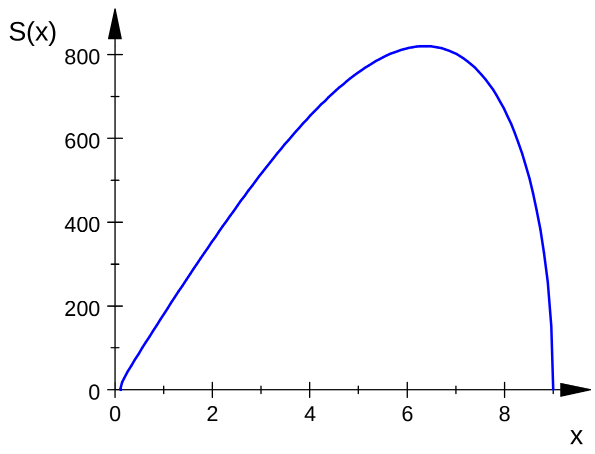
$$x^2 = \frac{-531522}{2(-6561)}.$$

$$x = \frac{\sqrt{3281}}{9} \approx 6.36.$$

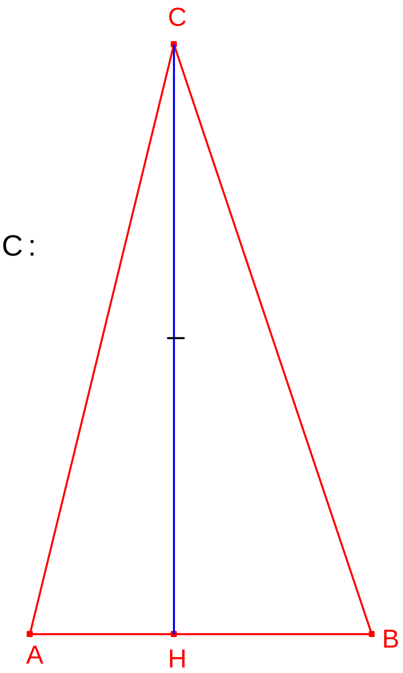
El màxim de la funció S(x) s'assoleix quan $x = \frac{\sqrt{3281}}{9} \approx 6.36$

L'àrea màxima àrea és:

$$S\left(\frac{\sqrt{3281}}{9}\right) = 820.$$



Solució 2:



Siga $\overline{BC}=40x, \overline{CA}=41x$.

Siga $\overline{CH}=h$ altura del triangle.

Siga $\overline{AH}=y$, $\overline{BH}=9-y$.

Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangles $\overset{\Delta}{AHC}$, $\overset{\Delta}{BHC}$:

$h^2=(40x)^2-y^2=(41x)^2-(9-y)^2$.

$y=\dfrac{9(1-x^2)}{2}$.

$h^2=1600x^2-\dfrac{81}{4}\left(1-x^2\right)^2$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$S(x)=\dfrac{1}{2}9\cdot h=\dfrac{9}{4}\sqrt{-81x^4+6562x^2-81}$.

Siga $f(x)=-81x^4+6562x^2-81$.

El màxim de la funció f(x) s'assoleix quan:

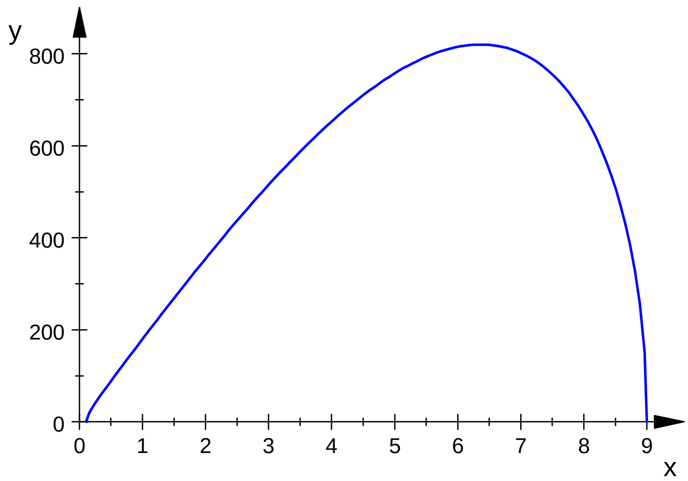
$x^2=\dfrac{-6562}{2(-811)}$.

$x=\dfrac{\sqrt{3281}}{9}\approx 6.36$.

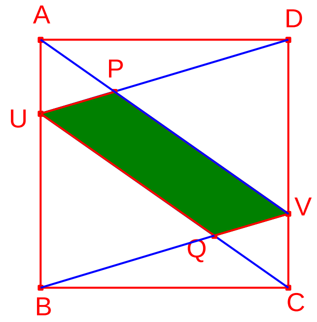
El màxim de la funció S(x) s'assoleix quan $x=\dfrac{\sqrt{3281}}{9}\approx 6.36$.

L'àrea màxima és:

$S\left(\dfrac{\sqrt{3281}}{9}\right)=820$.



Problema 3



Siga el quadrat ABCD de costat 1.

Siguen U, V dels costats $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, respectivament, tal que $\overline{AU}=\overline{CV}$.

Determineu l'àrea màxima del paral·lelogram PUQV.

Solució:

Siga $\overline{AU}=x$. $\overline{BU}=\overline{DV}=1-x$.

$S_{ADU}=S_{BCV}=\dfrac{x}{2}$. $S_{VDA}=S_{UBC}=\dfrac{1-x}{2}$

Siga S l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{AUP}$. Siga T l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{APD}$.

$$S+T=\frac{x}{2} \qquad (1)$$

Els triangles $\overset{\Delta}{AUP}$, $\overset{\Delta}{VDP}$ són semblants i de raó $x:1-x$.

$$S_{VDP}=\left(\frac{1-x}{x}\right)^2 S.$$

$$S_{VDP}+T=\frac{1-x}{2}.$$

$$\left(\frac{1-x}{x}\right)^2 S+T=\frac{1-x}{2} \qquad (2)$$

Resolent el sistema format per les expressions (1) (2):

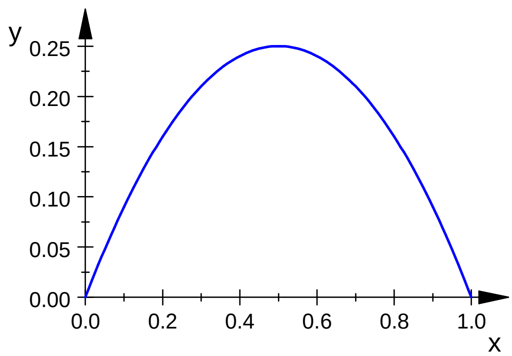
$$\begin{cases} S=\dfrac{x^2}{2} \\ T=\dfrac{(1-x)^2}{2} \end{cases}.$$

L'àrea del paral·lelogram PUQV és igual a l'àrea del quadrat ABCD menys els doble de les àrees dels triangles S_{ADU}, S_{VDP}.

$$S(x)=1-\left(2\frac{x}{2}+2\frac{(1-x)^2}{2}\right).$$

$S(x)=-x^2+x$. La funció és una paràbola convexa. El màxim s'assoleix quan $x=\dfrac{1}{2}$.

L'àrea màxima és $S\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4}$.



Problema 4

Siguen a, b, c i d quatre rectes paral·leles en aquest ordre.
Siga 1 la distància entre a i b.
Siga 3 la distància entre b i c.
Siga 1 la distància entre c i d.
Considerem els rectangles que tenen exactament un vèrtex en cadascuna de les rectes.
Determineu el rectangle d'àrea mínima.
KöMaL B4691. Febrer 2015.

Solució:
Siguen P, Q, R, S punts de les rectes a, b, d, c, respectivament, tal que PQRS és un rectangle.
Siguen K, L les projeccions de S sobre les rectes a, d, respectivament.
$\overline{SK}=4$, $\overline{SL}=1$.
Siga $\alpha=\angle LRS$.
Aleshores, $\angle PSK=\alpha$.

Aplicant raons trigonomètriques als triangles rectangles $\overset{\Delta}{RLS}$, $\overset{\Delta}{SKP}$:

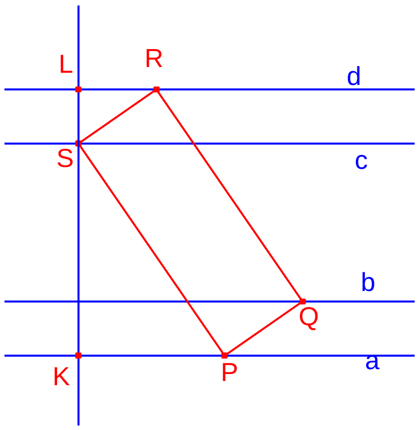
$$\overline{RS}=\frac{1}{\sin\alpha},\ \overline{PS}=\frac{4}{\cos\alpha}.$$

L'àrea del rectangle PQRS:

$$S_{PQRS}=\overline{PS}\cdot\overline{RS}.$$

$$f(\alpha)=\frac{4}{\cos\alpha}\frac{1}{\sin\alpha},\ \alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right].$$

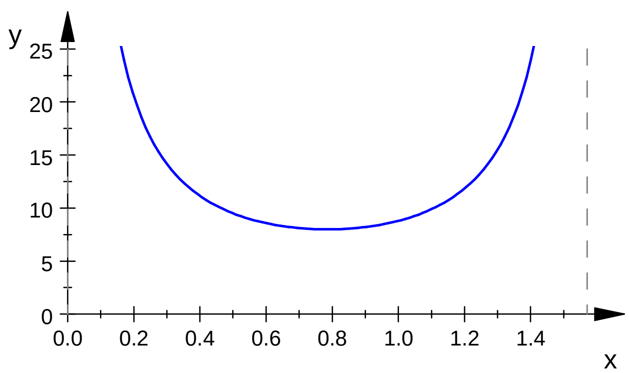
$$f(\alpha)=\frac{8}{\sin 2\alpha}.$$



El màxim s'assoleix quan $2\alpha=\frac{\pi}{2}$.

$$\alpha=\frac{\pi}{4}.$$

L'àrea màxima és $S_{màx}=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=8$.



$$y=\frac{8}{\sin 2x}$$

Problema 5

Determineu el valor mínim de l'expressió $a+b^3$ on a i b són nombres reals positius tql que el seu producte és 1.

Crux CC97.

Solució:

$b=\frac{1}{a}$.

$f(a)=a+\left(\frac{1}{a}\right)^3,\ a>0$.

$f(a)=\frac{a^4+1}{a^3}$.

$f'(a)=\frac{a^4-3}{a^4}$.

$f'(a)=0$. Resolent l'equació:

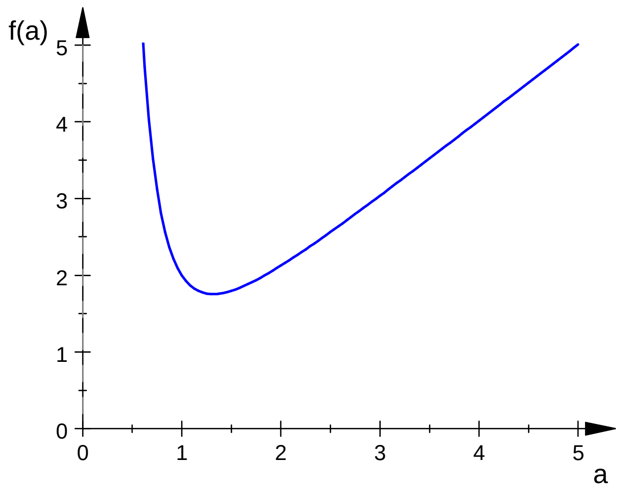
$a=\sqrt[4]{3}$.

$f''(a)=\frac{12}{a^5}$. $f''\left(\sqrt[4]{3}\right)>0$.

Aleshores, $a=\sqrt[4]{3}$ és un mínim relatiu de la funció.

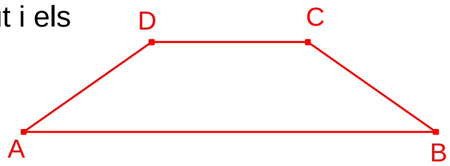
El mínim de l'expressió $a+b^3$ s'assoleix quan $a=\sqrt[4]{3}$, $b=\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$.

El valor mínim és $\sqrt[4]{3}+\frac{1}{\sqrt[4]{3^3}}=\frac{4}{3}\sqrt[4]{3}\approx 1.7548$.



Problema 6

De tots els trapezis isòsceles tal que el costat paral·lel menut i els costats no paral·leles són iguals a c, determineu el d'àrea màxima.



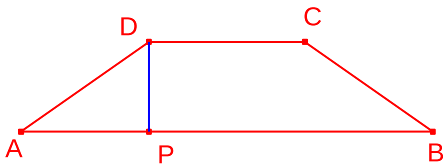
Solució:

Siga el trapezi isòsceles ABCD de costats paral·lels $\overline{AB}, \overline{CD}$.

$\overline{CD} = \overline{AD} = \overline{BC} = c$.

Siga $\angle DAB = \alpha$.

Siga P la projecció de D sobre la base $\overline{AB}$.



Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{APD}$:

$\overline{PD} = c \cdot \sin\alpha$, $\overline{AP} = c \cdot \cos\alpha$.

$\overline{AB} = \overline{CD} + 2\overline{AP} = c + 2c \cdot \cos\alpha$.

L'àrea del trapezi ABCD és:

$$S_{ABCD} = \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2}\overline{PD}.$$

$$S(\alpha) = c^2(1+\cos\alpha)\sin\alpha,\ \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

$$S'(\alpha) = c^2\left(2\cos^2\alpha + \cos\alpha - 1\right).$$

$S'(\alpha) = 0$, $2\cos^2\alpha + \cos\alpha - 1 = 0$. Resolent l'equació:

$$\alpha = \frac{\pi}{3}.$$

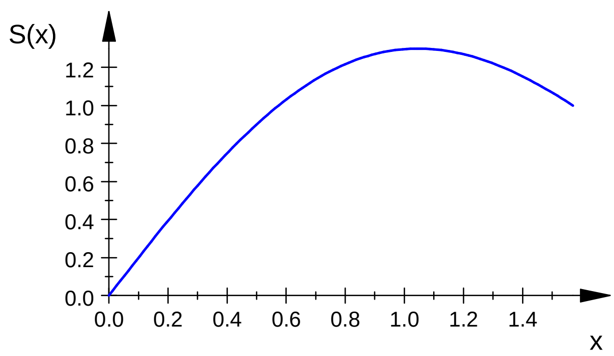
$$S''(\alpha) = c^2(-2\cos\alpha \cdot \sin\alpha - \sin\alpha).$$

$$S''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -c^2 \cdot \sqrt{3} < 0.$$

Aleshores, $\alpha = \frac{\pi}{3}$ és un màxim relatiu.

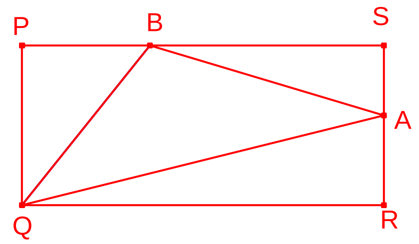
$$S\left(\frac{\pi}{3}\right) = c^2 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

El màxim s'assoleix quan $\alpha = \frac{\pi}{3}$ i l'àrea màxima és $S\left(\frac{\pi}{3}\right) = c^2 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{4}$.



$$S(x) = (1+\cos x)\sin x$$

Problema 7



En la figura, PQRS és un rectangle d'àrea 10.

Siga A un punt del costat $\overline{RS}$ i B un punt del costat $\overline{PS}$ tal que l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{QAB}$ és 4.

Determineu el menor valor possible per a $\overline{PB}+\overline{RA}$.

Solució 1:

Siga $\overline{QR}=a$.

$\overline{PQ}=\frac{10}{a}$.

Siga $\overline{RA}=x$, $\overline{PB}=y$.

La suma de les àrees dels triangles rectangles $\overset{\Delta}{PQB}$, $\overset{\Delta}{QRA}$, $\overset{\Delta}{ABS}$ és 6:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{10}{a}y+ax+(a-y)\left(\frac{10}{a}-x\right)\right)=6.$$

Simplificant:

$xy=2$, $y=\frac{2}{x}$.

$\overline{RA}+\overline{PB}=x+y=x+\frac{2}{x}$.

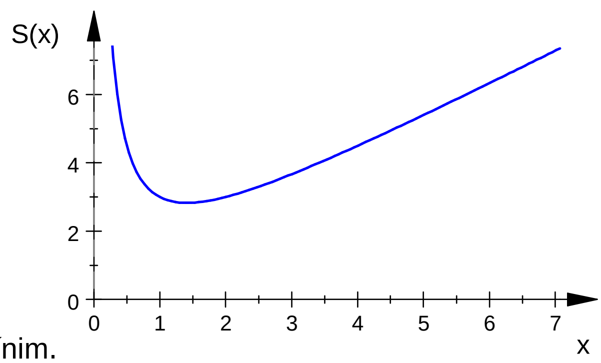
Aplicant la desigualtat entre la mitjana aritmètica i geomètrica:

$x+y=x+\frac{2}{x}\geq 2\sqrt{x\frac{2}{x}}$, la igualtat s'assoleix quan $x=\frac{2}{x}$.

$x+y=x+\frac{2}{x}\geq 2\sqrt{2}$, la igualtat s'assoleix quan $x=y=\sqrt{2}$.

Solució 2:

La funció a optimitzar és:



$S(x)=x+\frac{2}{x}$.

$S'(x)=1-\frac{2}{x^2}$.

$S'(x)=0$. Resolent l'equació: $x=\sqrt{2}$.

$S''(x)=\frac{4}{x^3}$. $S''\left(\sqrt{2}\right)>0$, aleshores, $x=\sqrt{2}$ és un mínim.

El valor màxim és $S\left(\sqrt{2}\right)=2\sqrt{2}$.

Nota: el valor de la base ha de complir, $\sqrt{2}\leq\overline{QR}\leq 5\sqrt{2}$.

Problema 8

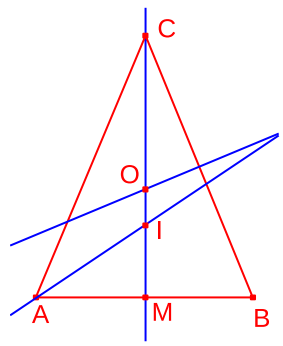
Entre tots els triangles isòsceles determineu el que el quocient entre el radi de la circumferència inscrita i circumscrita siga màxim.
KöMaL, C1285, març 2015.

Solució 1:
Siguen r, R els radis de la circumferència inscrita i circumscrita, respectivament.

S iga el triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overline{AC}=\overline{BC}=a$, $\overline{AB}=c$.

Siguen I, O l'incentre i el circumcentre del triangle. Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$.

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:



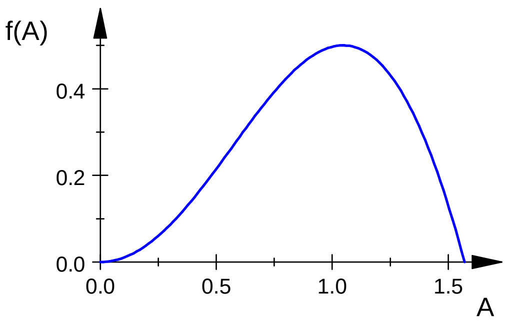
$\frac{c}{\sin 2A}=2R$. Aleshores, $R=\frac{c}{2\sin 2A}$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMI}$:

$\frac{2r}{c}=tg\frac{A}{2}=\frac{\sin A}{1+\cos A}$. Aleshores, $r=\frac{c\cdot\sin A}{2(1+\cos A)}$.

$$\frac{r}{R}=\frac{\frac{c\cdot\sin A}{2(1+\cos A)}}{\frac{c}{2\sin 2A}}=\sin 2A\frac{\cos A}{1+\cos A}$$. Simplificant:

$f(A)=\frac{r}{R}=2\cos A(1-\cos A)$, $O\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.



$f'(A)=\sin A(-2+4\cos A)$

$f'(A)=0$, $\sin A(-2+4\cos A)=0$.

$\cos A=\frac{1}{2}$, $A=\frac{\pi}{3}$.

$f''(A)=\cos A+4\cos 2A$. $f''\left(\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}+4\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{3}{2}<0$.

Aleshores, $A=\frac{\pi}{3}$ és un màxim relatiu estricte.

El màxim s'assoleix quan $A=\frac{\pi}{3}$ i el valor màxim és $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$. (és a dir quan el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és equilàter).

Solució 2:
Siguen r, R els radis de la circumferència inscrita i circumscrita, respectivament.

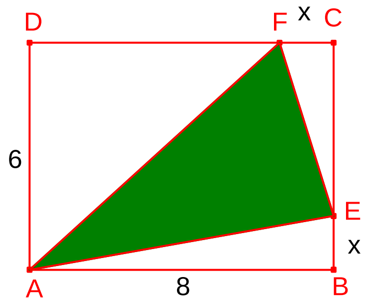
Siga el triangle qualsevol $\overset{\Delta}{ABC}$. Siguen I, O l'incentre i el circumcentre del triangle.
Aplicant el teorema d'Euler:

$\overline{OI}^2=R(R-2r)$.

$R(R-2r)\geq 0$, la igualtat s'assoleix quan el triangle és equilàter.

$R^2\geq 2Rr$. $\frac{r}{R}\leq\frac{1}{2}$. La igualtat s'assoleix quan el triangle és equilàter.

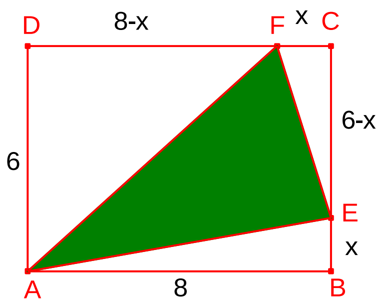
Problema 9



Siga el rectangle ABCD de costats $\overline{AB}=8$, $\overline{AD}=6$.
Siguen E i F dels costats $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, respectivament tal que $\overline{BE}=\overline{CE}=x$.

Determineu el valor de x a fi que l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{AEF}$ siga mínima.

Solució:



L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{AEF}$ és igual a l'àrea del rectangle ABCD menys la suma de les àrees dels triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABE}$, $\overset{\Delta}{BCF}$, $\overset{\Delta}{ADF}$:

$$S_{AEF}=8\cdot 6-\frac{1}{2}\left(8x+x(6-x)+6(8-x)\right).$$

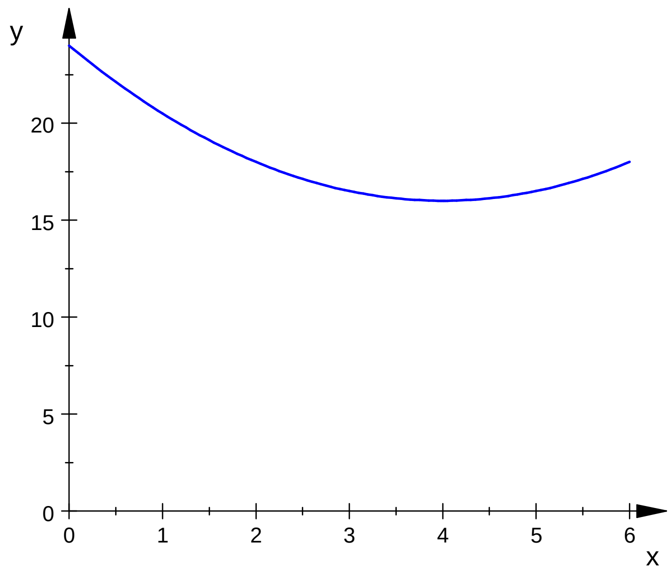
$$S(x)=\frac{1}{2}x^2-4x+24,\ x\in[0,6].$$

La funció és una paràbola còncava.
El mínim s'assoleix en el vèrtex:

$$x=\frac{-(-4)}{2\frac{1}{2}}=4\in[0,6].$$

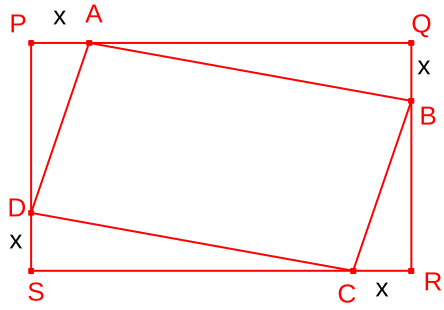
L'àrea mínima és:

$$S(4)=16.$$



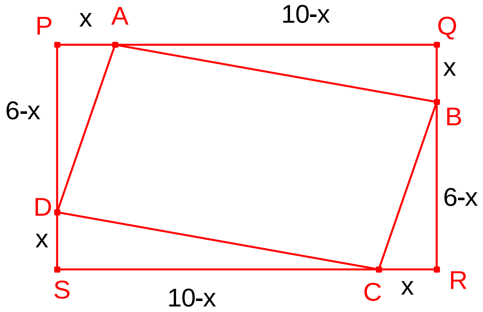
Problema 10

Siga el rectangle PQRS de costats $\overline{PQ}=10$, $\overline{PS}=6$.
Siguen A, B, C, D de costats $\overline{PQ}$. $\overline{QR}$, $\overline{RS}$, $\overline{SP}$, respectivament, tals que $\overline{PA}=\overline{QB}=\overline{RC}=\overline{SD}=x$.
Determineu el valor de x a fi que l'àrea del quadrilàter ABCD siga mínima.



PQ = 10   PS = 6

Solució:



L'àrea del quadrilàter ABCD és igual a l'àrea del rectangle PQRS menys la suma de les àrees dels triangles rectangles $\overset{\Delta}{PAD}$, $\overset{\Delta}{QAB}$, $\overset{\Delta}{RCB}$, $\overset{\Delta}{RCB}$, $\overset{\Delta}{SCD}$:

$S_{ABCD}=10\cdot 6-\left(x(6-x)+x(10-x)\right)$.

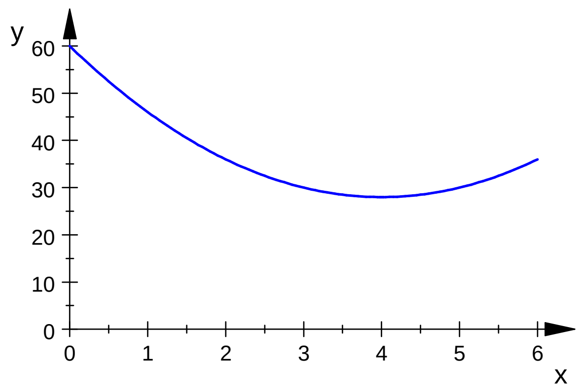
$S(x)=2x^2-16x+60$, $x\in[0,6]$.

La funció és una paràbola còncava.
El mínim s'assoleix en el vèrtex:

$$x=\frac{-(-16)}{2\cdot 2}=4\in[0,6].$$

L'àrea mínima és:

$S(4)=28$.

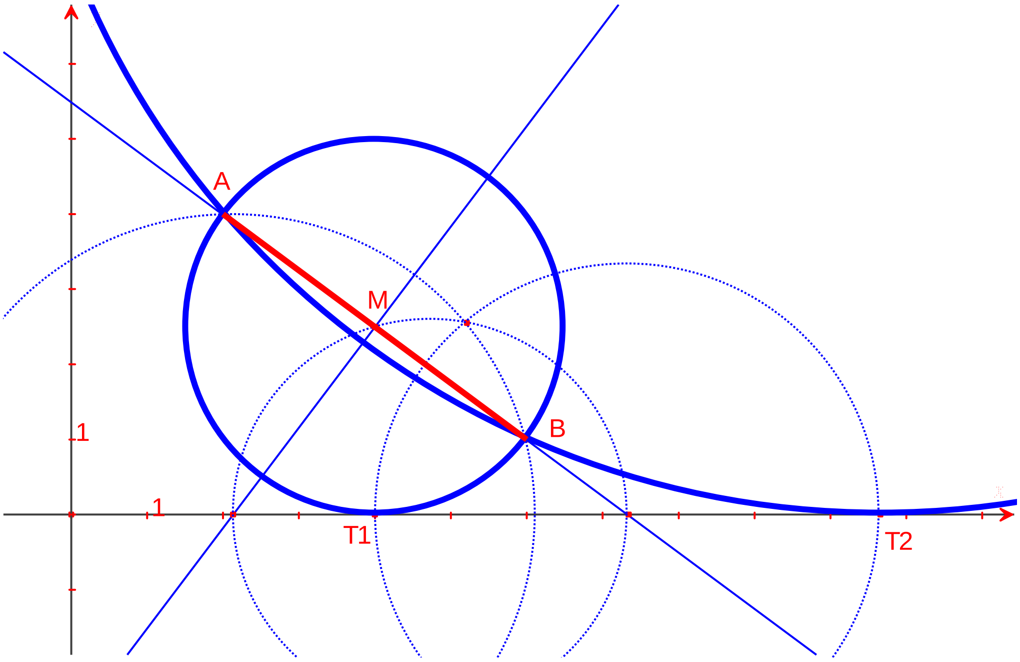


Problema 11

Donats els punts $A(2,4)$, $B(6,1)$.

Determineu el punt de l'eix d'abscisses amb el qual és veu el segment $\overline{AB}$ sota un angle màxim.
KöMaL, C1291.

Solució 1.



La solució és l'arc capaç del el segment $\overline{AB}$ tangent a l'eix d'abscisses.

El punt mig del el segment $\overline{AB}$ té coordenades: $M\left(4,\dfrac{5}{2}\right)$.

La recta mediatriu del el segment $\overline{AB}$ té equació:

$y=\dfrac{4}{3}x-\dfrac{17}{6}$, o bé, $8x-6y-17=0$.

El centre de la circumferència que passa pels punts A, B té el centre en la recta mediatriu. Les coordenades del centre O són:

$O\left(x,\dfrac{4}{3}x-\dfrac{17}{6}\right)$.

La distància del centre O al punt A és igual a la distància del centre o a l'eix d'abscisses:

$$\sqrt{(x-2)^2+\left(\frac{4}{3}x-\frac{17}{6}-4\right)^2}=\left|\frac{4}{3}x-\frac{17}{6}\right|.$$

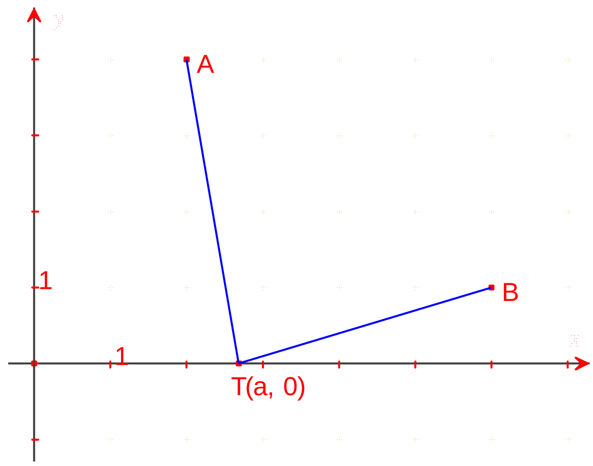
Resolent l'equació:

$x=4,\dfrac{32}{3}$. Els dos valors són màxims relatius.

Les coordenades dels punts són $T_1(4,0)$, $T_2\left(\dfrac{32}{3},0\right)$.

$\angle AT_1A=90^o$, $\angle AT_2A\approx 12^o40'49$. Aleshores el màxim absolut és $T_1(4,0)$.

Solució 2:



Siga $T(a,0)$.

Siga $\alpha = \angle ATB$

$\overrightarrow{TA} = (2-a, 4)$, $\overrightarrow{TB} = (6-a, 1)$.

$\overrightarrow{TA} \cdot \overrightarrow{TB} = a^2 - 8a + 16 = \sqrt{(2-a)^2 + 4^2}\sqrt{(6-a)^2 + 1^2}\cos\alpha$.

$$\cos\alpha = \frac{a^2 - 8a + 16}{\sqrt{a^4 - 18a^3 + 105a^2 - 388a + 740}}.$$

La funció $f(x) = \cos x$ és decreixent en $[0, \pi]$.

Aleshores el màxim de l'angle s'assoleix en el mínim de la funció:

$$g(a) = \frac{a^2 - 8a + 16}{\sqrt{a^4 - 18a^3 + 105a^2 - 388a + 740}}.$$

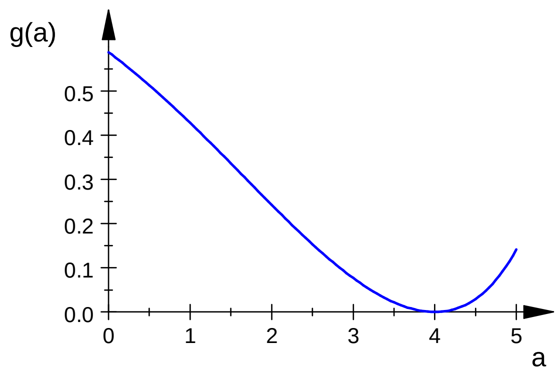
$$g'(a) = \frac{8a^4 - 23a^3 - 198a^2 + 1352a - 2816}{(a^4 - 18a^3 + 105a^2 - 388a + 74)\sqrt{a^4 - 18a^3 + 105a^2 - 388a + 740}}.$$

$g'(a) = 0$.

Resolent l'equació:

$a = 4$.

Estudiant el signe de la primera derivada en un entorn de $a = 4$, aquest valor és un mínim relatiu.



Solució 3:

Siga $T(a,0)$.

Siga $\alpha = \angle ATB$

$\overrightarrow{TA} = (2-a, 4)$, $\overrightarrow{TB} = (6-a, 1)$.

$\overrightarrow{TA} \cdot \overrightarrow{TB} = a^2 - 8a + 16 = \sqrt{(2-a)^2 + 4^2}\sqrt{(6-a)^2 + 1^2}\cos\alpha$.

$$\cos\alpha = \frac{a^2 - 8a + 16}{\sqrt{a^4 - 18a^3 + 105a^2 - 388a + 740}}.$$

La funció $f(x) = \cos x$ és decreixent en $[0, \pi]$.

Aleshores el màxim de l'angle s'assoleix en el mínim de la funció:

$$g(a) = \frac{a^2 - 8a + 16}{\sqrt{a^4 - 18a^3 + 105a^2 - 388a + 740}} = \frac{(a-4)^2}{\sqrt{a^4 - 18a^3 + 105a^2 - 388a + 740}} \geq 0.$$

El mínim s'assoleix quan $a = 4$.

L'angle major s'assoleix quan $a = 4$, és a dir en el punt $T(4, 0)$.

Solució 4:

Siga $T(a,0)$. $a \in [2,6]$.

Siga $\alpha = \angle ATB$.

$$\alpha = \pi - \operatorname{arctg}\frac{4}{a-2} - \operatorname{arctg}\frac{1}{6-a}, \ a \in [2,6].$$

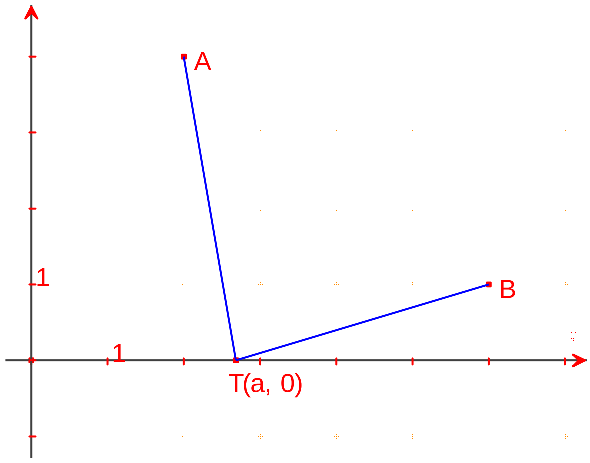
Derivant la funció:

$$\alpha' = \frac{4}{(a-2)^2+16} - \frac{1}{(6-a)^2+1}.$$

$$\alpha' = \frac{3a^2-44a+128}{\left((a-2)^2+16\right)\left((6-a)^2+1\right)}.$$

$\alpha' = 0$.

$a = 4$.

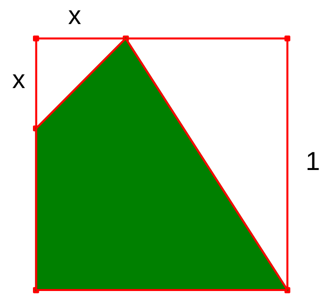


Estudiant el signe de la primera derivada, $a = 4$ és un màxim relatiu estricte.

L'angle major s'assoleix quan $a = 4$, és a dir en el punt $T(4,0)$.

Problema 12

Determineu el valor de x a fi que l'àrea ombrejada siga màxima.

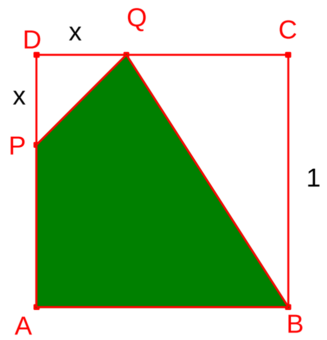


Solució:

Siga ABCD el quadrat de costat 1.

Siga $\overline{DP} = \overline{DQ} = x$.

$\overline{QC} = 1 - x$.



L'àrea ombrejada és igual a l'àrea del quadrat ABCD menys la suma de les àrees dels triangles rectangles $\overset{\Delta}{PDQ}$, $\overset{\Delta}{QCB}$:

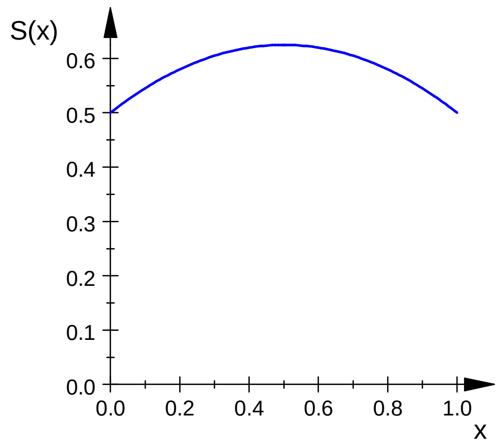
$$S_{ombrejada} = 1^2 - \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1(1-x)}{2}\right) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}.$$

Siga la funció $S(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$, $x \in [0, 1]$.

La funció és una paràbola convexa.

El màxim s'assoleix en el vèrtex:

$$x = \frac{-\frac{1}{2}}{2\left(\frac{-1}{2}\right)} = \frac{1}{2}.$$



L'àrea màxima és $S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{8}$.

Problema 13

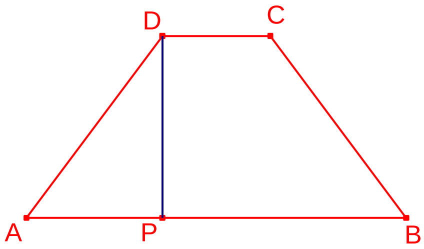
La base menor d'un trapezi isòsceles mesura 7 i cadascun dels costats oblics 15. Determineu la mesura de la base major a fi que l'àrea del trapezi siga màxima.

Solució:

Siga ABCD el trapezi isòsceles de base menor $\overline{CD}=7$, i costats iguals $\overline{AD}=\overline{BC}=15$.

Siga $\alpha=\angle DAB=\angle CBA$.

Siga P la projecció de D sobre la base major $\overline{AB}$.



$\overline{AP}=7+2\cdot 15\cos\alpha$.

$\overline{DP}=15\sin\alpha$ altura del trapezi.

L'àrea del trapezi ABCD és:

$S(\alpha)=(7+15\cos\alpha)15\sin\alpha$, $\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

$S'(\alpha)=15(-15\sin^2\alpha+7\cos\alpha+15\cos^2\alpha)$.

$S'(\alpha)=15(-15+7\cos\alpha+30\cos^2\alpha)$.

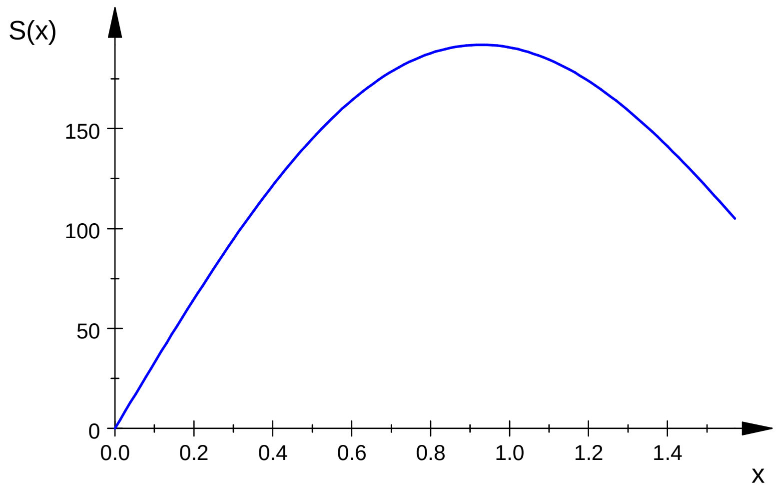
$S'(\alpha)=0$.

$-15+7\cos\alpha+30\cos^2\alpha=0$. Resolent l'equació.

$\cos\alpha=\frac{3}{5}$. Aleshores, $\sin\alpha=\frac{4}{5}$.

$S'(\alpha)=15(-7\sin\alpha-60\cos\alpha\cdot\sin\alpha)$.

Per a $\cos\alpha=\frac{3}{5}$, $\sin\alpha=\frac{4}{5}$, $S'(\alpha)<0$. Aleshores, és un màxim relatiu estricte.



L'àrea màxima és, $S_{màx}=\frac{7+25}{2}15\frac{4}{5}=192$.

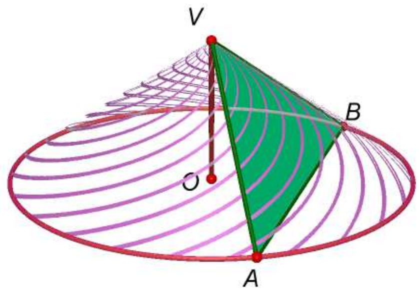
En aquest cas, $\overline{AP}=7+2\cdot 15\frac{3}{5}=25$.

Problema 14

Siga un con de revolució de vèrtex V, altura h i radi R.

1.- Determineu en la circumferència de la base una corda $\overline{AB}$ tal que l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{AVB}$ vinga donada per la distància x del centre de la base a la corda $\overline{AB}$.

2.- Determineu els costats i els angles del triangle $\overset{\Delta}{AVB}$ a fi que la seua àrea siga màxima.

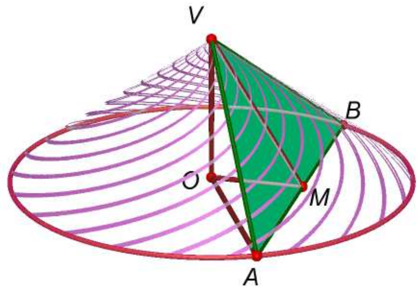


Solució:

Siga $\overline{OV} = h$ altura del con.

Siga M el punt mig de la cors $\overline{AB}$.

$\overline{OM} = x$



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AOV}$:

$\overline{AV} = \overline{BV} = \sqrt{h^2 + R^2}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MOV}$:

$\overline{MV} = \sqrt{h^2 + x^2}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMO}$:

$\overline{AM} = \sqrt{R^2 - x^2}$. Aleshores, $\overline{AB} = 2\sqrt{R^2 - x^2}$.

$S_{AVB} = \frac{1}{2} 2\sqrt{R^2 - x^2}\sqrt{x^2 + h^2}$.

La funció àrea és: $S(x) = \sqrt{R^2 - x^2}\sqrt{x^2 + h^2}$, $x \in [0, R]$

Derivem la funció:

$$S'(x) = \frac{-2x^3 + (R^2 - h^2)x}{\sqrt{R^2 - x^2}\sqrt{x^2 + h^2}}.$$

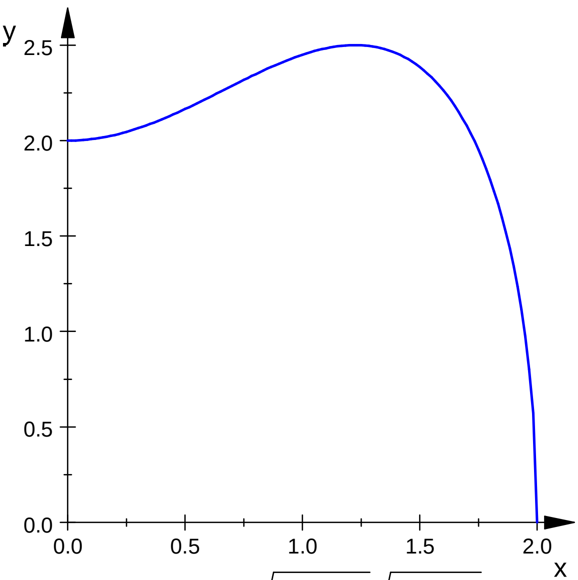
$S'(x) = 0$, $x = 0$, $x = \sqrt{\frac{R^2 - h^2}{2}}$.

Distingirem dos casos.

Cas 1

Suposem que $R \geq h$.

Estudiant el signe la primera derivada, $x = 0$ és un mínim relatiu estricte i $x = \sqrt{\frac{R^2 - h^2}{2}}$ és un màxim relatiu estricte.



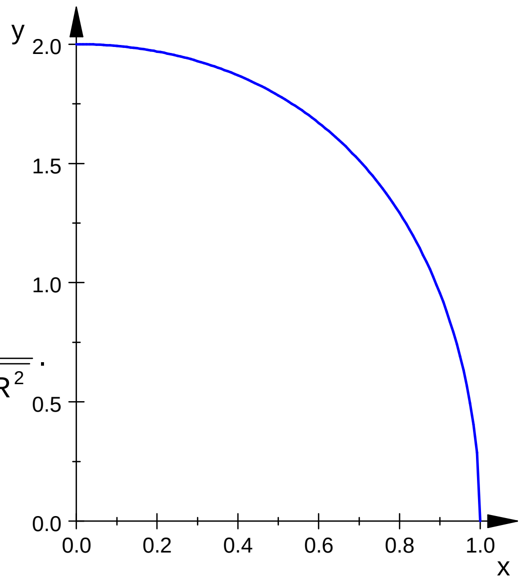
$S(x) = \sqrt{2^2 - x^2}\sqrt{x^2 + 1^2}$

Quan $x = \sqrt{\frac{R^2 - h^2}{2}}$, $\overline{AV} = \overline{BV} = \sqrt{h^2 + R^2}$, $\overline{AB} = \sqrt{2(h^2 + R^2)}$.

Notem que $\overline{AV}^2 + \overline{BV}^2 = \overline{AB}^2$, aleshores, $\overset{\Delta}{AVB}$ és un triangle rectangle isòsceles.

Cas 2

Suposem que $R < h$.
$S'(x) = 0$, només quan, $x = 0$.



$S(x) = \sqrt{2^2 - x^2}\sqrt{x^2 + 1^2}$

Estudiant el signe la primera derivada, $x = 0$ és un màxim relatiu estricte.

Quan $x = 0$, $\overline{AV} = \overline{BV} = \sqrt{h^2 + R^2}$, $\overline{AB} = 2R$.

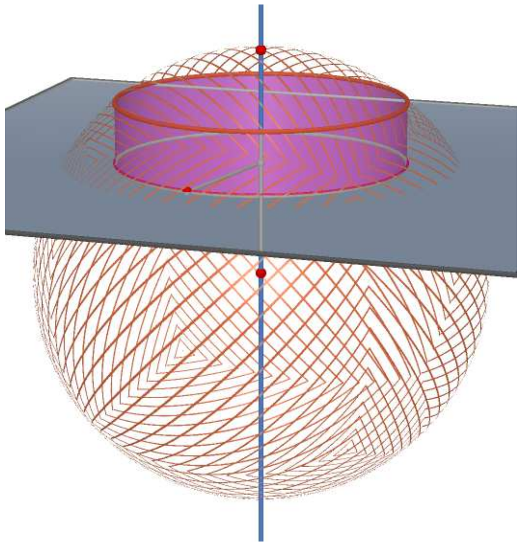
Siga $\alpha = \angle AVM$, $\sin\alpha = \dfrac{R}{\sqrt{h^2 + R^2}}$, $\cos\alpha = \dfrac{h}{\sqrt{h^2 + R^2}}$

$\sin 2\alpha = \dfrac{2Rh}{\sqrt{h^2 + R^2}}$, aleshores, $2\alpha = \angle AVB = \arcsin\dfrac{2Rh}{\sqrt{h^2 + R^2}}$.

$\angle VAB = \angle VBA = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{2Rh}{\sqrt{h^2 + R^2}}$

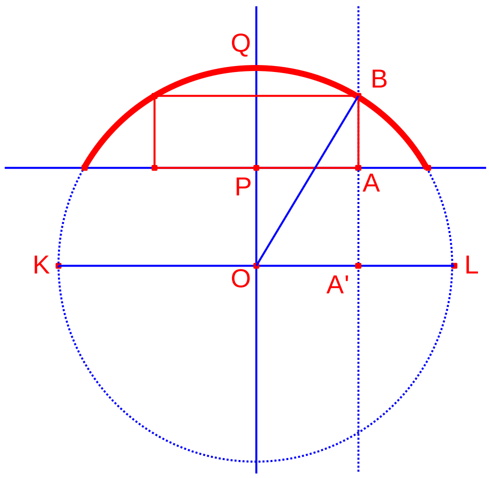
Problema 15

Una esfera de radi R és tallada per un plànol horitzontal, creant un casquet esfèric d'altura $H < R$.
Siga el cilindre inscrit en el casquet d'altura y i radi x i d'eix vertical passant pel pol del casquet.
a) Determineu el volum del cilindre en funció de R, H i y.
b) Si $H = \frac{R}{2}$, Determineu en funció de H el valor de y a fi que el volum del cilindre siga màxim.



Solució:
Considerem la secció del casques formada per un plànol que passa pel pol del casquet i perpendicular a la base.
Siga $\overline{PQ} = H$ altura del casquet.
Siga $x = \overline{PA}$ radi del cilindre. Siga $y = \overline{AB}$ altura del cilindre.
Siga A' la projecció de A sobre el diàmetre de la circumferència de centre = (centre de l'esfera).
$\overline{AA'} = R - H$. $\overline{A'B} = y + R - H$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OA'B}$:
$R^2 = x^2 + (y + R - H)^2$.
$x^2 = -y^2 + (2H - 2R)y + 2RH - H^2$.



a)
El volum del cilindre és:
$V = \pi x^2 y = \pi\left(-y^3 + (2H - 2R)y^2 + (2RH - H^2)y\right)$.

b)
Si $H = \frac{R}{2}$, aleshores el volum del cilindre és:
$V(y) = \pi\left(-y^3 - 2Hy^2 + 3H^2 y\right)$, $y \in [0, H]$. Derivant la funció:
$V'(y) = \pi\left(-3y^2 - 4Hy + 3H^2\right)$.
$V'(y) = 0$, $-3y^2 - 4Hy + 3H^2 = 0$. Resolent l'equació:

$$y = \frac{-2 + \sqrt{13}}{3} H.$$

$V''(y) = \pi(-6y - 4H)$, $V''\left(\frac{-2 + \sqrt{13}}{3} H\right) < 0$, aleshores, $y = \frac{-2 + \sqrt{13}}{3} H$ és un màxim relatiu estricte.

El volum màxim del cilindre s'assoleix quan $y = \frac{-2 + \sqrt{13}}{3} H$. El volum màxim és

$$V_{màx} = \frac{2\pi\left(-35 + 13\sqrt{13}\right)}{27} H^3 \approx 2.7628 H^3.$$