Ricard Peiró i Estruch

Problemes d'optimització 2017

Problema 1

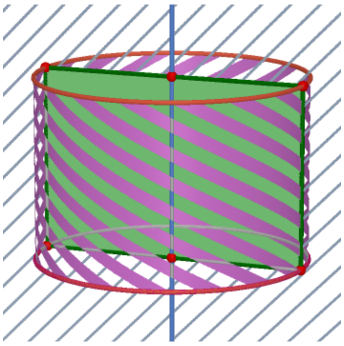
Siga $\overset{\Delta}{ABC}$ un triangle rectangle d'àrea constant S.
Siguen D, E, F els centres dels quadrats dibuixats sobre l'exterior dels costats del triangle.

Calculeu les dimensions del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ que fa mínima l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{DEF}$.

Calculeu l'àrea mínima de $\overset{\Delta}{DEF}$.

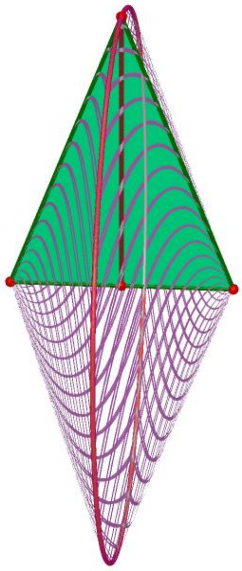
Problema 2

La secció axial d'un cilindre el seu perímetre mesura 90cm.
Determineu el volum màxim del cilindre.



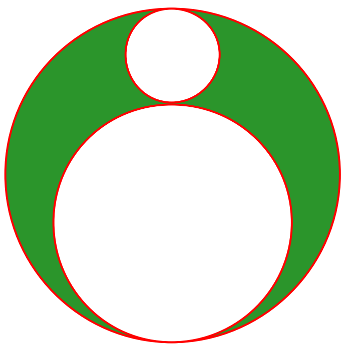
Problema 3

Un triangle isòsceles de perímetre 20 cm és gira sobre la seua base.
Quina és el màxim volum possible del doble con obtingut.
KöMaL, C1377



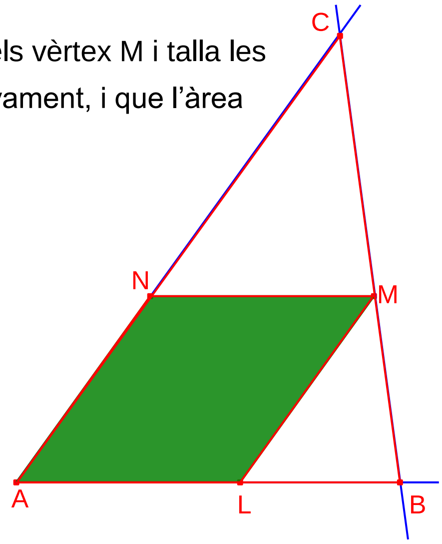
Problema 4

En la figura hi ha una circumferència de radi R i dues circumferències tangents que tenen el centre en un diàmetre (veure figura).
Quina és la màxima area ombrejada de la figura al variar les circumferències interiors?.



Problema 5

Donat el paral·lelogram ALMN determineu la recta que passa pels vèrtex M i talla les prolongacions dels costats $\overline{AL}$, $\overline{AN}$ en els punts B i C, respectivament, i que l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ siga mínima.

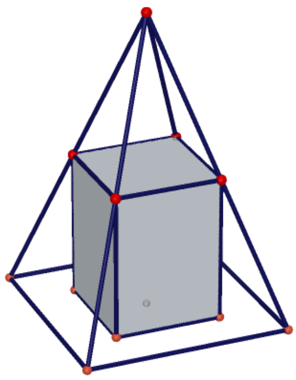


Problema 6

Determineu les mesures del triangle isòsceles inscrit en una circumferència de radi R tal que la suma de la base i l'altura siga màxima. Calculeu la suma màxima.

Problema 7

Donada la piràmide quadrangular regular d'aresta de la base a i altura h, determineu les dimensions del prisma quadrangular regular (base un quadrat) inscrit en la piràmide de volum màxim.



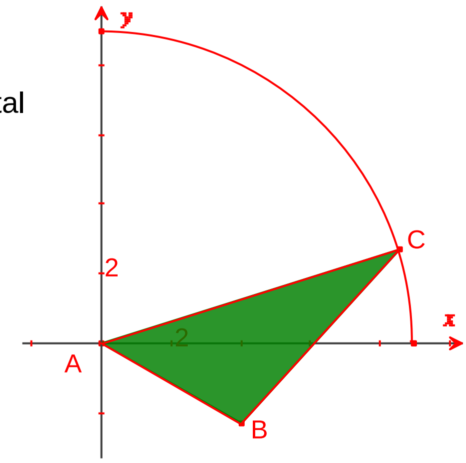
Problema 8

Considerem els punts $A(0,0)$, $B\left(4,-\frac{4}{\sqrt{3}}\right)$.

Determineu el punt C, del primer quadrat de $x^2+y^2=81$ tal que és màxima l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

Calculeu l'àrea i el perímetre d'aquest triangle.

Calendari, març 2017.



Problema 9

El costat desigual d'un triangle isòsceles mesura 12 m, i l'altura sobre aquest costat és de 5 m.

a) Donat un punt arbitrari sobre aquesta altura, obtingueu una expressió de la suma de les distàncies d'aquest punt a cada un dels vèrtexs del triangle.

b) Determineu els punts sobre l'altura que compleixen que la suma de les distàncies als tres vèrtexs del triangle siga màxima i els punts per als quals siga mínima.

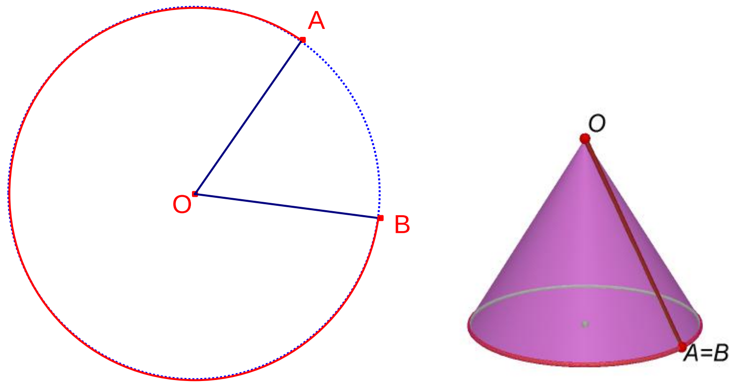
Pau's 2000 Catalunya.

Problema 10

Donat un cercle de radi 10 retallem un sector AOB d'angle $x = \angle AOB$ per formar un con.

a) Calculeu el volum del con en funció de l'angle $x = \angle AOB$.

b) Calculeu el valor de l'angle $x = \angle AOB$ que fa màxim el volum del con.



Problema 1

Siga $\overset{\Delta}{ABC}$ un triangle rectangle d'àrea constant S.
Siguen D, E, F els centres dels quadrats dibuixats sobre l'exterior dels costats del triangle.

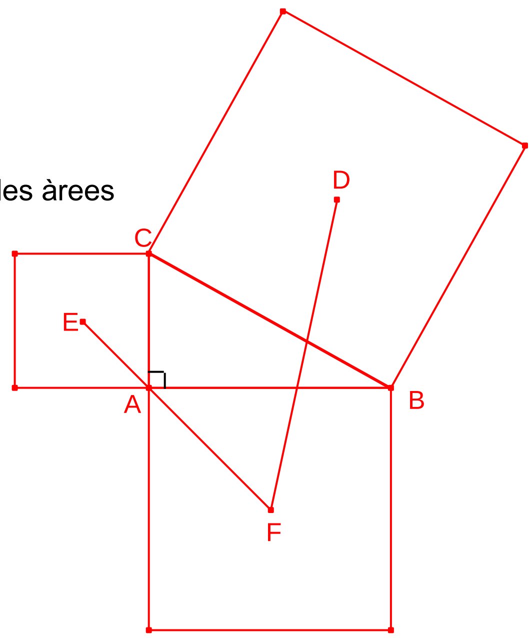
Calculeu les dimensions del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ que fa mínima l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{DEF}$.

Calculeu l'àrea mínima de $\overset{\Delta}{DEF}$.

Solució:

Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $A = 90^o$. $S_{ABC} = \frac{1}{2}bc = S$.

Siguen D, E, F els centres dels quadrats dibuixats sobre els costats $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$, respectivament.
Notem que E, A i F estan alineats.



$\overline{CE} = \overline{AE} = \frac{\sqrt{2}}{2}b$, $\overline{AF} = \overline{BF} = \frac{\sqrt{2}}{2}c$, $\overline{CD} = \overline{BD} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$.

$\angle ECD = 90^o + C$, $\angle BBD = 90^o + B$

L'àrea del pentàgon CEFBD és igual a la quarta part de les àrees dels tres quadrats més l`àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$$S_{CEFBD} = \frac{1}{4}\left(a^2 + b^2 + c^2\right) + \frac{1}{2}bc.$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{CDE}$ és:

$$S_{CDE} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}b\frac{\sqrt{2}}{2}a \cdot \sin(90^o + C) = \frac{1}{4}ab\frac{b}{a} = \frac{1}{4}b^2.$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{FBD}$ és:

$$S_{FBD} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}c\frac{\sqrt{2}}{2}a \cdot \sin(90^o + B) = \frac{1}{4}ac\frac{c}{a} = \frac{1}{4}c^2.$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{DEF}$ és igual a l'àrea del pentàgon CEFBD menys la suma de les àrees dels triangles $\overset{\Delta}{CDE}$, $\overset{\Delta}{FBD}$:

$$S_{DEF} = S_{CEFBD} - \left(S_{CDF} + S_{FBD}\right) = \frac{1}{4}\left(a^2 + b^2 + c^2\right) + \frac{1}{2}bc - \left(\frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{4}c^2\right).$$

$$S_{DEF} = \frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{2}bc = \frac{1}{4}(b+c)^2.$$

Aplicant la desigualtat entre la mitjana aritmètica i geomètrica:
$b + c \geq 2\sqrt{bc}$, la igualtat s'assoleix quan $b = c$.

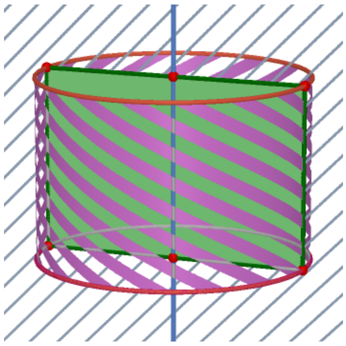
$$S_{DEF} = \frac{1}{4}(b+c)^2 \geq \frac{1}{4}\left(2\sqrt{bc}\right)^2 = 2\left(\frac{1}{2}bc\right) = 2S.$$

El triangle que fa mínima l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{DEF}$ és el triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$, $b = c = \sqrt{2S}$,

L'àrea mínima de $\overset{\Delta}{DEF}$ és $S_{DEF} = 2S$.

Problema 2

La secció axial d'un cilindre el seu perímetre mesura 90cm.
Determineu el volum màxim del cilindre.



Solució:
La secció axial és la que passa per l'eix de simetria i que talla el cilindre en un rectangle de costats el diàmetre del cilindre i la seua altura.

Siga R el radi del cilindre i h la seua altura.
El perímetre de la secció és:

$4R + 2h = 90$.

$h = 45 - 2R$.

El volum del cilindre és:

$V(R,h) = \pi R^2 h$.

$V(R) = \pi R^2(45 - 2R)$, $R \in \left[0, \frac{45}{2}\right]$.

Derivant la funció:

$V'(R) = \pi(-6R^2 + 90R)$.

$V'(R) = 0$. Resolent l'equació:

$R = 15\text{cm}$, $h = 15\text{cm}$.

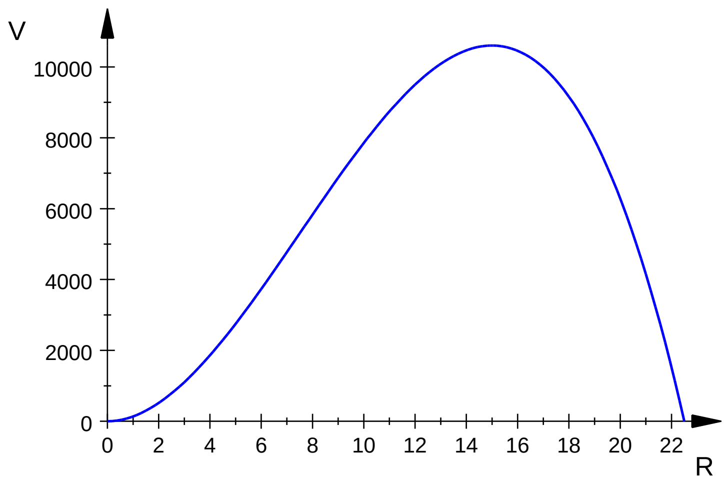
Calculem la segona derivada:

$V''(R) = \pi(-12R + 90)$.

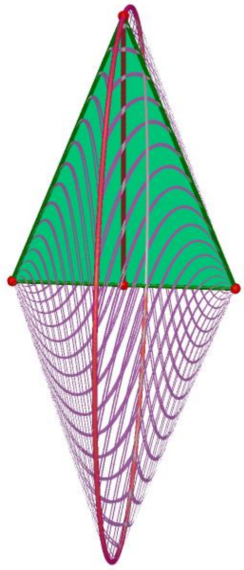
$V''(15) = -90\pi < 0$.

Aleshores, en $R = 15\text{cm}$ s'assoleix el màxim del volum.

El volum màxim és: $V(15) = 15^3\pi \approx 10602.88\text{cm}^3$.



Problema 3
Un triangle isòsceles de perímetre 20 cm és gira sobre la seua base.
Quina és el màxim volum possible del doble con obtingut.
KöMaL, C1377



Solució 1:

Siga el triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$ de base $\overline{AB} = 2x$. Els costats iguals mesuren $\overline{CA} = \overline{CB} = 10 - x$.

L'altura del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és el radi del doble con.

Siga R l'altura del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

$R^2 = (10 - x)^2 - x^2$.

$R^2 = 20(5 - x)$. El volum del doble con és:

$V = \frac{\pi}{3} R^2 2x$.

$V = \frac{\pi}{3} 20(5 - x)2x$. $V = \frac{40\pi}{3}(5 - x)x$, $x \in [0, 5]$.

Aplicant la desigualtat de la mitjana aritmètica i geomètrica:

$$V = \frac{40\pi}{3}(5 - x)x \le \frac{40\pi}{3}\left(\frac{5 - x + x}{2}\right)^2 = \frac{250\pi}{3}.$$

La igualtat s'assoleix quan $5 - x = x$, és a dir, quan la base és $2x = 5$ i els costats iguals $\overline{CA} = \overline{CB} = 10 - x = \frac{15}{2}$.

Solució 2:

El volum del doble con és, $V = \frac{40\pi}{3}(5 - x)x = \frac{40\pi}{3}\left(-x^2 + 5x\right)$, $x \in [0, 5]$.

La funció és una paràbola convexa. El màxim s'assoleix en el vèrtex $x = \frac{5}{2}$.

En aquest cas el volum màxim és, $V_{màx} = \frac{40\pi}{3}\left(5 - \frac{5}{2}\right)\frac{5}{2} = \frac{250\pi}{3}$.

Solució 3:

El volum del doble con és, $V = \frac{40\pi}{3}(5 - x)x = \frac{40\pi}{3}\left(-x^2 + 5x\right)$, $x \in [0, 5]$.

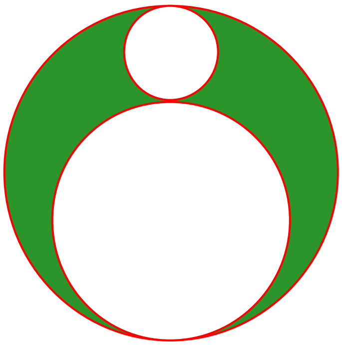
Derivant la funció: $V' = \frac{40\pi}{3}(-2x + 5)$.

$V' = 0$, $x = \frac{5}{2}$.

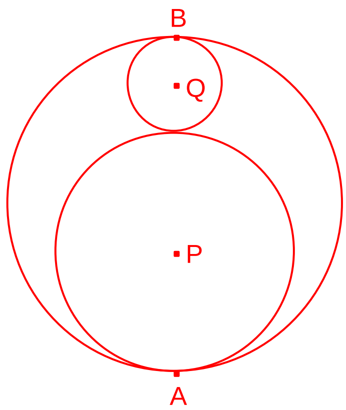
$V' = \frac{-80\pi}{3}$, $V'\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{-80\pi}{3} < 0$. Aleshores, $x = \frac{5}{2}$ és un màxim relatiu estricte.

El volum màxim és, $V_{màx} = \frac{40\pi}{3}\left(5 - \frac{5}{2}\right)\frac{5}{2} = \frac{250\pi}{3}$.

Problema 4
En la figura hi ha una circumferència de radi R i dues circumferències tangents que tenen el centre en un diàmetre (veure figura).
Quina és la màxima area ombrejada de la figura al variar les circumferències interiors?.



Solució 1:



Siga $\overline{AB} = 2R$ diàmetre de la circumferència exterior.
Siga P en centre d'una de les circumferències, $\overline{PQ} = r$ el radi.
Siga Q el centre de l'altra circumferència, $\overline{QB} = s$ el radi.
$r + s = R$.
L'àrea ombrejada és:

$$S_o = \pi R^2 - \left(\pi r^2 + \pi s^2\right).$$
$$S_o = \pi(r+s)^2 - \left(\pi r^2 + \pi s^2\right).$$
$$S_o = 2\pi rs.$$

Aplicant la desigualtat entre la mitjana aritmètica i geomètrica:

$$S_o = 2\pi rs \le 2\pi\left(\frac{r+s}{2}\right)^2 = 2\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\pi R^2.$$

La igualtat s'assoleix quan $r = s = \frac{R}{2}$.

L'àrea màxima ombrejada és la meitat de l'àrea del cercle de radi $\frac{R}{2}$ i s'assoleix quan les dues circumferències interiors són iguals.

Solució 2:
Siga $\overline{AB} = 2R$ diàmetre de la circumferència exterior.
Siga P en centre d'una de les circumferències, $\overline{PQ} = r$ el radi.
Siga Q el centre de l'altra circumferència, $\overline{QB} = R - r$ el radi.
L'àrea ombrejada és:

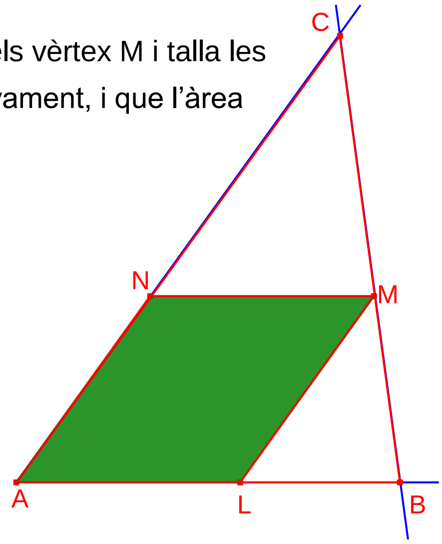
$$S_o = \pi R^2 - \left(\pi r^2 + \pi(R-r)^2\right).$$
$$S_o = -2\pi\left(r^2 + Rr\right) = -2\pi\left(\left(r - \frac{R}{2}\right)^2 - \frac{R^2}{4}\right) \le -2\pi\left(-\frac{R^2}{4}\right) \le \frac{1}{2}\pi R^2.$$

La igualtat s'assoleix quan $r = \frac{R}{2}$.

L'àrea màxima ombrejada és la meitat de l'àrea del cercle de radi $\frac{R}{2}$ i s'assoleix quan les dues circumferències interiors són iguals.

Problema 5

Donat el paral·lelogram ALMN determineu la recta que passa pels vèrtex M i talla les prolongacions dels costats $\overline{AL}$, $\overline{AN}$ en els punts B i C, respectivament, i que l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ siga mínima.



Solució:

Siga el paral·lelogram ALMN tal que $\overline{AL} = a$, $\overline{AN} = b$, $\angle LAN = \alpha$.

Siga $\overline{LB} = x$, $\overline{NC} = y$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}(a+x)(b+y)\sin\alpha .$$

Els triangles $\overset{\Delta}{LBM}$, $\overset{\Delta}{NMC}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{x}{b} = \frac{a}{y}. \quad y = \frac{ab}{x}.$$

L'àrea del triangle és:

$$S(x) = \frac{\sin\alpha}{2}(a+x)\left(b+\frac{ab}{x}\right).$$

$$S(x) = \frac{\sin\alpha}{2}\left(2ab+bx+\frac{a^2b}{x}\right), \quad x \geq 0 .$$

$S'(x) = \frac{\sin\alpha}{2}\left(b-\frac{a^2b}{x^2}\right)$. $S'(x) = 0$. Resolent l'equació $x = a$.

$$S''(x) = \frac{\sin\alpha}{2}\left(\frac{2a^2b}{x^3}\right).$$

$S''(a) = \frac{\sin\alpha}{2}\left(\frac{2b}{a}\right) > 0$, aleshores, $x = a$ és un mínim.

L'àrea mínima s'assoleix quan els triangles $\overset{\Delta}{LBM}$, $\overset{\Delta}{NMC}$ són iguals.

L'àrea mínima és:

$S(x) = 2ab \cdot \sin\alpha$, és a dir, el doble de l'àrea del paral·lelogram ALMN.

351. *Par le sommet* M *d'un parallélogramme* AMPQ, *mener une droite* BMC *de manière que le triangle* BAC *soit minimum.*

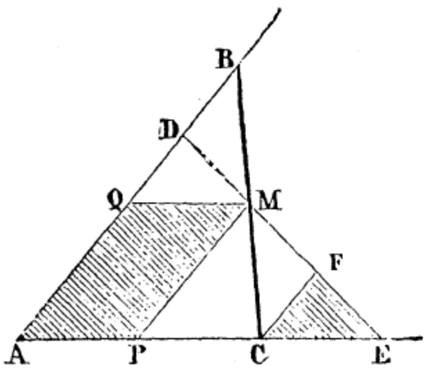


Fig. 244.

Considérons deux sécantes : l'une quelconque DME, et l'autre BMC, dont le point M est le milieu; cette dernière donne le *minimum*.

En effet, menons CF parallèle à BD.

A cause de BM = MC, les deux triangles MBD, MCF sont égaux. Donc le triangle ABC est équivalent à ADFC.

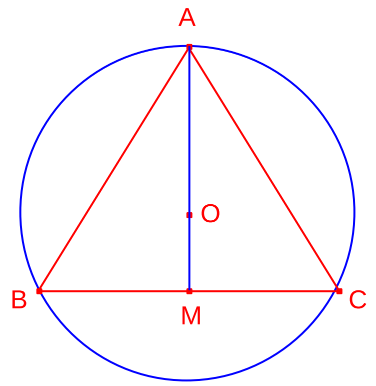
Donc ABC < ADE.

Problema 6

Determineu les mesures del triangle isòsceles inscrit en una circumferència de radi R tal que la suma de la base i l'altura siga màxima. Calculeu la suma màxima.

Solució:

Siga el triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$ $\overline{AB} = \overline{AC}$ inscrit en la circumferència de centre O i radi R.



Siga M el punt mig de la base $\overline{BC}$.

Podem suposar que $\overline{AM} \geq \overline{OA} = R$.

Siga $\overline{BM} = x$, $\overline{OM} = y$.

La suma de la base i l'altura és:

$S(x, y) = 2x + R + y$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BMO}$:

$x^2 + y^2 = R^2$.

$y = \sqrt{R^2 - x^2}$.

La suma és: $S(x) = 2x + R + \sqrt{R^2 - x^2}$, $x \in [0, R]$.

$$S'(x) = 2 - \frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}.$$

$S'(x) = 0$. Resolent l'equació: $x = \frac{2\sqrt{5}}{5}R$.

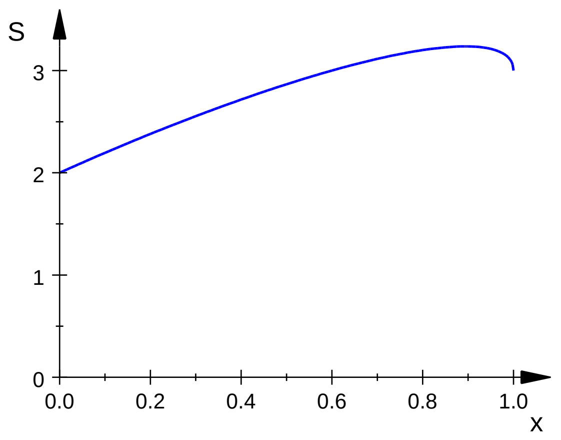
$$S''(x) = -\frac{R^2}{(R^2 - x^2)\sqrt{R^2 - x^2}}.$$

$S''\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}R\right) < 0$. Aleshores, $x = \frac{2\sqrt{5}}{5}R$ és un màxim relatiu de la funció.

En aquest cas:

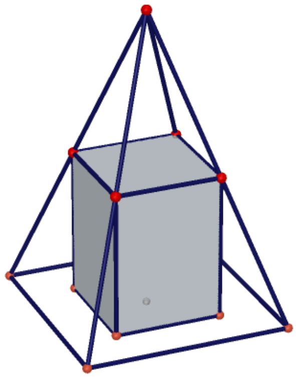
$\overline{BC} = 2x = \frac{4\sqrt{5}}{5}R$, $\overline{AM} = \frac{5+\sqrt{5}}{5}R$. $\overline{AB} = \overline{AC} = \sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{5}}R$.

La suma màxima és: $S_{max\,x} = \left(1 + \sqrt{5}\right)R$.



Problema 7

Donada la piràmide quadrangular regular d'aresta de la base a i altura h, determineu les dimensions del prisma quadrangular regular (base un quadrat) inscrit en la piràmide de volum màxim.



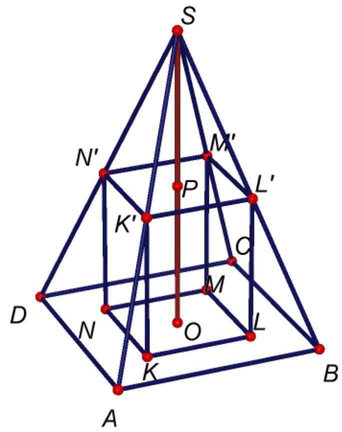
Solució:

Siga la piràmide ABCDS de base el quadrat ABCD de costat a i centre O.

Siga $\overline{OS} = h$ altura de la piràmide.

Siga el prisma regular KLMNK'L'M'N' inscrit en la piràmide.

Siga $\overline{KL} = x$, $\overline{KK'} = y$.



El volum del prisma és:

$$V_{prisma} = x^2 y$$

Les piràmides ABCDS, K'L'M'N'S són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{x}{a} = \frac{h-y}{h}.$$

Aleshores, $y = h - \frac{h}{a}x$.

El volum del prisma és:

$$V(x) = h \cdot x^2\left(1 - \frac{x}{a}\right), \quad x \in [0, a].$$

$$V'(x) = h \cdot \left(\frac{-3}{a}x^2 + 2x\right).$$

$V'(x) = 0$. Resolent l'equació:

$x = \frac{2}{3}a$. En aquest cas, $y = \frac{1}{3}h$.

$$V''(x) = h \cdot \left(\frac{-6}{a}x + 2\right).$$

$$V''\left(\frac{2}{3}a\right) = h \cdot \left(\frac{-6}{a}\frac{2}{3}a + 2\right) = -2 < 0.$$

Aleshores, $x = \frac{2}{3}a$ és un màxim relatiu estricte.

El volum màxim s'assoleix quan l'aresta de la base del prisma és $x = \frac{2}{3}a$ i l'altura $y = \frac{1}{3}h$.

El volum màxim és $V_{màx} = \frac{4}{27}a^2 h$.

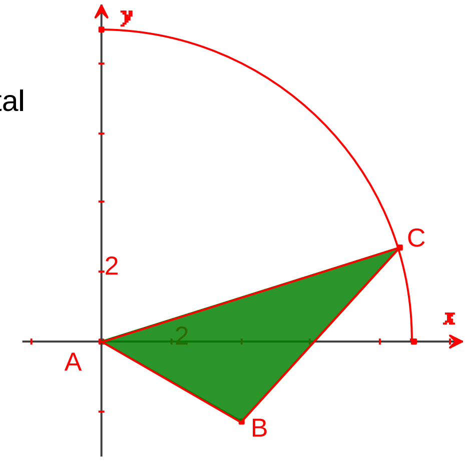
Problema 8

Considerem els punts $A(0,0)$, $B\left(4, -\frac{4}{\sqrt{3}}\right)$.

Determineu el punt C, del primer quadrat de $x^2+y^2=81$ tal que és màxima l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

Calculeu l'àrea i el perímetre d'aquest triangle.

Calendari, març 2017.



Solució:

Siga $\overset{\Delta}{ABC'}$ el triangle d'àrea màxima.

$\overline{AC'}=9$, $\overline{AB}=\frac{8}{3}\sqrt{3}$ els dos costats són constants.

L'àrea màxima s'assoleix quan $\angle C'AB=90^{\circ}$.

Aleshores l'àrea màxima és:

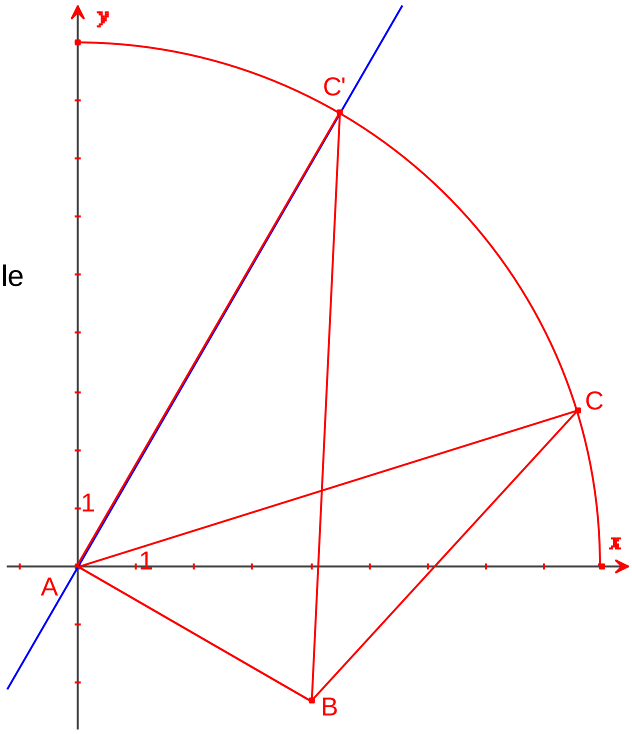
$$S_{max}=\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{AC'}=\frac{1}{2}\frac{8}{3}\sqrt{3}\cdot 9=12\sqrt{3}\approx 20.78.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC'}$:

$$\overline{BC'}=\sqrt{9^2+\left(\frac{8}{3}\sqrt{3}\right)^2}=\frac{1}{3}\sqrt{921}.$$

El perímetre del triangle que té àrea màxima és:

$$P_{ABC'}=9+\frac{8}{3}\sqrt{3}+\frac{1}{3}\sqrt{921}\approx 23.73.$$



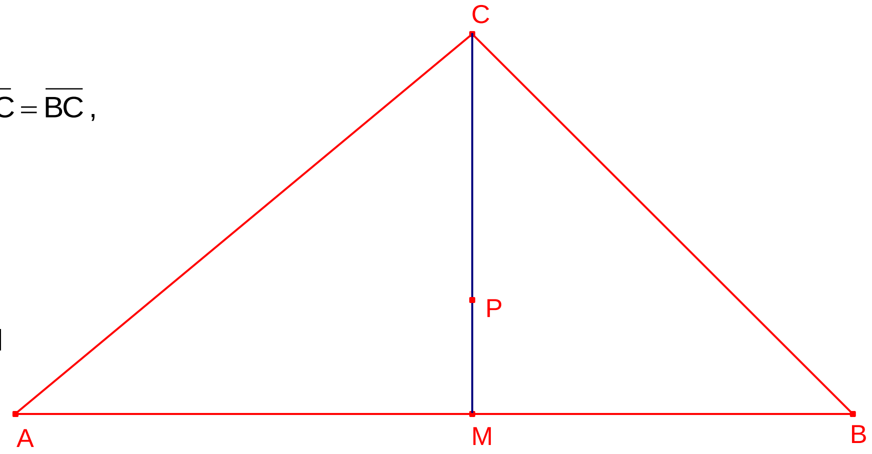
Problema 9

El costat desigual d'un triangle isòsceles mesura 12 m, i l'altura sobre aquest costat és de 5 m.

a) Donat un punt arbitrari sobre aquesta altura, obtingueu una expressió de la suma de les distàncies d'aquest punt a cada un dels vèrtexs del triangle.

b) Determineu els punts sobre l'altura que compleixen que la suma de les distàncies als tres vèrtexs del triangle siga màxima i els punts per als quals siga mínima.

Pau's 2000 Catalunya.



Solució:

Siga el triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overline{AC} = \overline{BC}$,

$\overline{AB} = 12$ i altura $\overline{CM} = 5$.

Siga P un punt sobre l'altura $\overline{CM}$.

Siga $\overline{MP} = x$. $\overline{CP} = 5 - x$.

$\overline{AM} = \overline{BM} = 6$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMP}$:

$\overline{AP} = \overline{BP} = \sqrt{36 + x^2}$.

La suma de les distàncies de P als vèrtexs és:

$S(x) = 5 - x + 2\sqrt{36 + x^2}$, $x \in [0, 5]$.

$$S'(x) = -1 + \frac{2x}{\sqrt{36 + x^2}}.$$

Resolem $S'(x) = 0$, $x = \sqrt{12}$.

Estudiant el signe de la primera derivada:

$S'(x) < 0$ quan $x \in \left]0, \sqrt{12}\right[$, $S'(x) > 0$ quan $x \in \left]\sqrt{12}, 5\right[$.

Aleshores, $x = \sqrt{12} \approx 3.46\text{ cm}$ és un mínim de la funció.

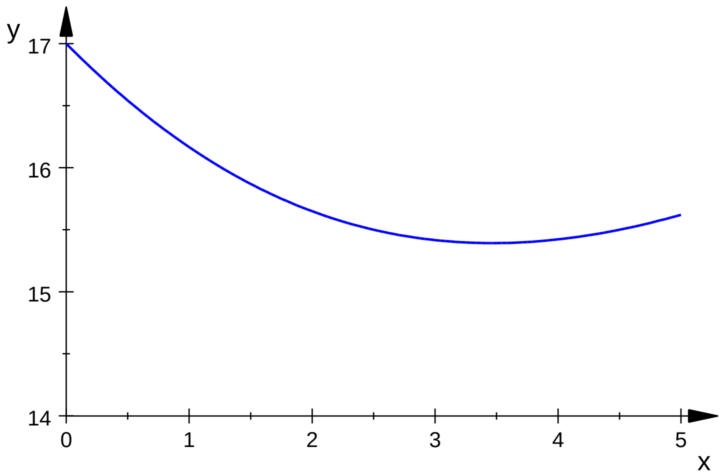
$S\left(\sqrt{12}\right) = 5 - \sqrt{12} + 2\sqrt{48} = 5 + 6\sqrt{3} \approx 15.39\text{ cm}^2$.

El valor màxim de la funció s'assoleix en algun dels extrems del domini o bé en totsdós.

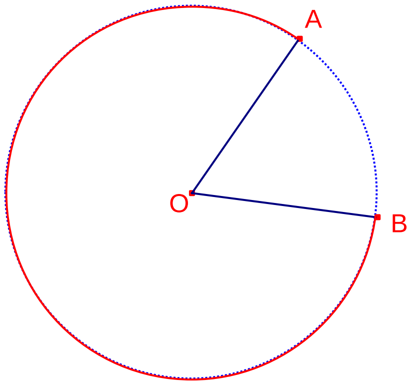
$S(0) = 17\text{ cm}^2$.

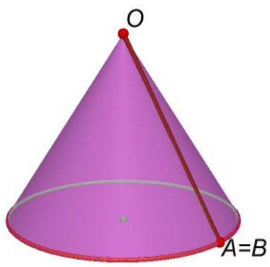
$S(5) = 2\sqrt{61} \approx 15.62\text{ cm}^2$.

Aleshores el valor màxim s'assoleix quan $x = 0$ i la suma màxima és $S(0) = 17\text{ cm}^2$.



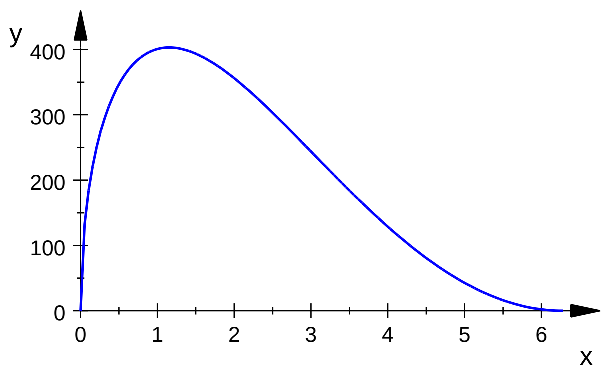
Problema 10
Donada un cercle de radi 10 retallem un sector AOB d'angle $x = \angle AOB$ per formar un con.
a) Calculeu el volum del con en funció de l'angle $x = \angle AOB$.
b) Calculeu el valor de l'angle $x = \angle AOB$ que fa màxim el volum del con.





Solució:
Considerem angle $x = \angle AOB$ en mesures radians.
$\overline{OA} = 10$ és la generatriu del con.
La longitud de la circumferència de la base del con és:
$2\pi \cdot 10 - 10x$.
El radi de la base del con és:
$r = \dfrac{20\pi - 10x}{2\pi}$. Simplificant:
$r = \dfrac{10\pi - 5x}{\pi}$
Aplicant el teorema de Pitàgores l'altura del con és:
$$h = \sqrt{10^2 - r^2} = \sqrt{100 - \left(\frac{10\pi - 5x}{\pi}\right)^2} = \frac{5}{\pi}\sqrt{x^2 - 4\pi x}.$$
El volum del con és: $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$.

$V(x) = \dfrac{1}{3}\pi\left(\dfrac{10\pi - 5x}{\pi}\right)^2 \dfrac{5}{\pi}\sqrt{x^2 - 4\pi x}$ Simplificant:
$$V(x) = \frac{125}{3\pi^2}\sqrt{(-x^2 + 4\pi x)(2\pi - x)^4}\ ,\ x \in [0, 2\pi]$$
$$V'(x) = \frac{125}{3\pi^2}\frac{-(x - 2\pi)^3(3x^2 - 12\pi x + 4\pi^2)}{\sqrt{(x^2 - 4\pi x)(2\pi - x)^4}}.$$
$V'(x) = 0$. Resolent l'equació:
$$x = \frac{2(3 - \sqrt{6})\pi}{3} \approx 1.152985987\ .$$



Estudiant el signe de la primera derivada al voltant de $x = \dfrac{2(3 - \sqrt{6})\pi}{3}$,

notem que és un màxim relatiu estricte.