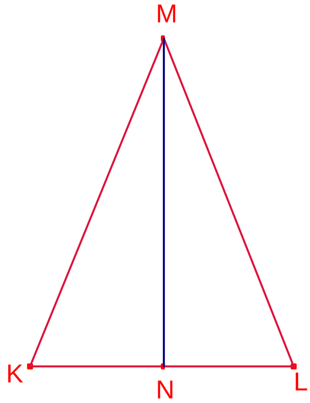
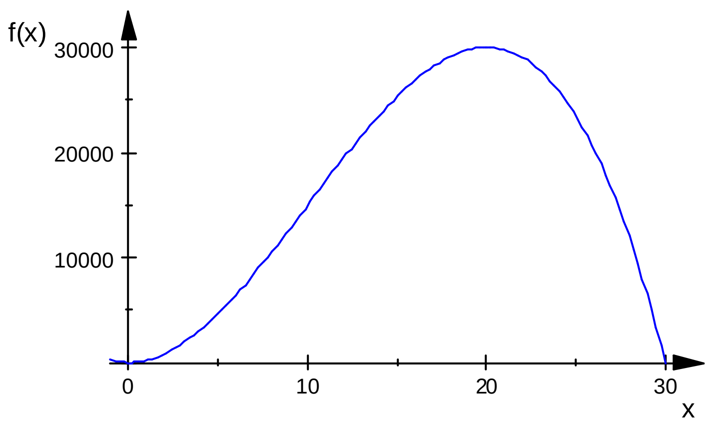
Problema 1
Siga T un triangle de perímetre 60cm.
Un dels costats del triangle T té x cm i els altres dos costats tenen la mateixa longitud.
a) Obteniu raonadament les expressions de les funcions A(x) i (f(x), essent:
A(x)=Àrea del triangle T.
$f(x)=[A(x)]^2$
Obteniu també entre quins valors pot variar x.
b) Obteniu raonadament el valor de x pel qual f(x) aconsegueix el valor màxim.
PAU, juny 2003.

Solució:
a)



Siga el triangle isòsceles $\overset{\Delta}{KLM}$, $\overline{KL}=x$.
$\overline{KM}=\overline{LM}=\dfrac{60-x}{2}$.
Siga N el punt mig del costat $\overline{KL}$.
Siga $\overline{MN}$ altura del triangle.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{KNM}$.
$$\overline{MN}=\sqrt{\left(\frac{60-x}{2}\right)^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\sqrt{900-30x}.$$
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{KLM}$ és:
$S=\dfrac{\overline{KL}\cdot\overline{MN}}{2}=\dfrac{x\cdot\sqrt{900-30x}}{2}$, aleshores:
$$A(x)=\frac{x\cdot\sqrt{900-30x}}{2}.$$
$$f(x)=\frac{450x^2-15x^3}{2},\quad x>0.$$



Per la desigualtat triangular:
$\overline{KL}<2\cdot\overline{KM}$.
$x<2\dfrac{60-x}{2}$. Resolent la inequació:
$x<30$.
Aleshores, $x\in\left]0,30\right[$.
b)
$f'(x)=\dfrac{1}{2}\left(900x-45x^2\right),\quad x\in\left]0,30\right[$.
$f'(x)=0$.
$900x-45x^2=0$. Resolent l'equació:
$x=20$.
$f''(x)=450-45x$.
$f''(20)=-450<0$. Aleshores, $x=20$ és un màxim relatiu estricte.
El màxim de la funció f(x) s'assoleix quan $x=20cm$, és a dir quan el triangle és equilàter i el valor màxim de la funció és, $f(20)=\dfrac{450\cdot 20^2-15\cdot 20^3}{2}=30000cm^4$.

Problema 2

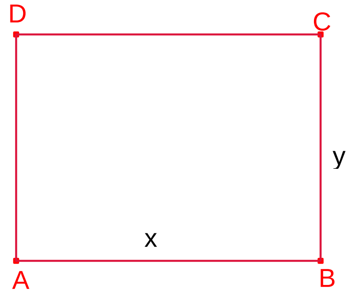
Hem de tancar una zona de $400\,\text{m}^2$ d'un prat i amb una tanca en forma de rectangle. Cada metre de tanca val 100€. Si x és la mesura en metres d'un dels costats, es demana:

a) Obteniu de forma raonada la funció f(x) siga la despesa de la tanca, i indiqueu entre quins valors pot variar x.

b) Calculeu raonadament el valor de x per al qual la funció f(x) aconsegueix el valor mínim.

PAU, setembre 2003

Solució:



a)

Siga el rectangle ABCD, $\overline{AB} = x$, $\overline{BC} = y$.

L'àrea del rectangle és, $S = xy = 400$.

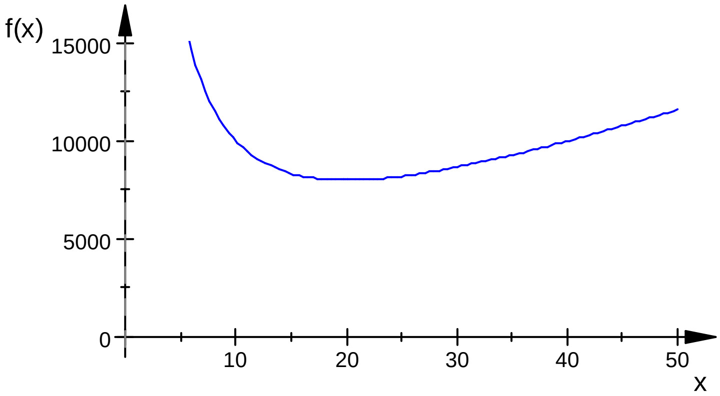
Aleshores, $y = \dfrac{400}{x}$.

La funció a optimitzar és les despeses de la tanca, 100 euros cada metre del seu perímetre:

$f(x, y) = 100(2x + 2y)$.

$f(x) = 200\left(x + \dfrac{400}{x}\right)$. $x \in \left]0, +\infty\right[$.

b)



$f'(x) = 200\left(1 - \dfrac{400}{x^2}\right)$.

$f'(x) = 0$.

$1 - \dfrac{400}{x^2}$. Resolent l'equació:

$x = 20\text{m}$.

$f''(x) = 200\left(\dfrac{800}{x^3}\right)$.

$f''(20) = 200\left(\dfrac{800}{20^3}\right) > 0$. Aleshores,

$x = 20$ és un mínim relatiu estricte.

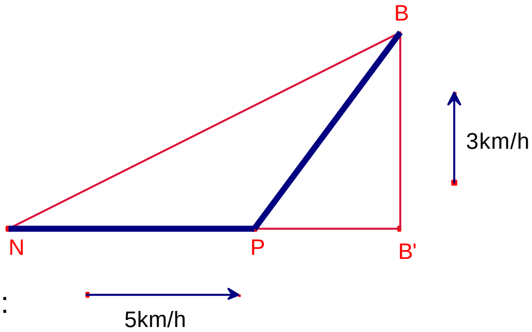
El mínim de la funció f(x) s'assoleix quan $x = 20\text{m}$, és a dir quan és un quadrat i les despeses mínimes són: $f(20) = 200\left(20 + \dfrac{400}{20}\right) = 8000€$.

Problema 3

Des d'un punt N de vora mar, un nadador ha d'arribar a una boia que flota a 3 km de la costa i dista $3\sqrt{5}$ km des del punt N.

Si recorrent la vora (que se suposa recta i plana) la velocitat mitjana és de 5km/h, i nadant, de 3km/h, quan de temps haurà de caminar fins llançar-se a la mar per a arribar a la boia en el mínim temps possible?.

PAU, juny 2004.



Solució:
Siga B el punt on es troba la boia.
Siga B' el punt de la vora més prop de la boia (la projecció perpendicular de B sobre la vora.
Siga P el punt de la vora des d'on s'ha de tirar a la mar.

$\overline{BB'} = 3$, $\overline{NB} = 3\sqrt{5}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{NB'B}$:

$\overline{NB'} = \sqrt{\left(3\sqrt{5}\right)^2 - 3^2} = 6$.

Siga $x = \overline{NP}$. $\overline{PB'} = 6 - x$.

Siga $y = \overline{PB}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PB'B}$:

$y = \sqrt{(6-x)^2 + 3^2} = \sqrt{x^2 - 12x + 45}$.

En el moviment uniforme $t = \dfrac{e}{v}$.

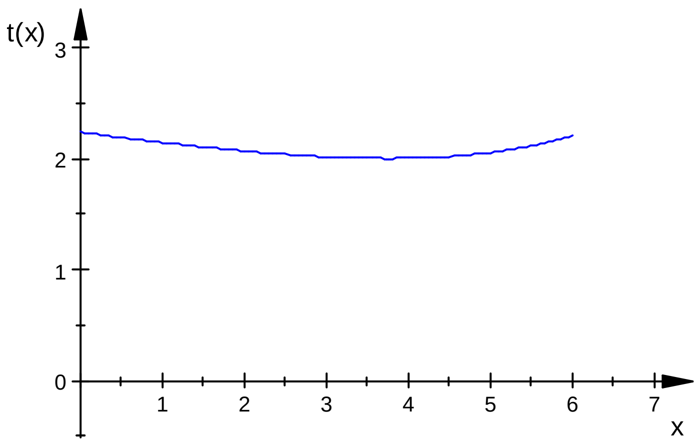
El temps que tarda el nadador d'arribar de N a B passant per P és igual a:

$t(x,y) = \dfrac{x}{5} + \dfrac{y}{3}$.

$t(x) = \dfrac{x}{5} + \dfrac{\sqrt{x^2 - 12x + 45}}{3}$, $x \in [0, 6]$.

$t'(x) = \dfrac{1}{5} + \dfrac{x-6}{3\sqrt{x^2 - 12x + 45}}$.

$t'(x) = 0$



$\dfrac{1}{5} + \dfrac{x-6}{3\sqrt{x^2 - 12x + 45}} = 0$. Resolent l'equació: $x = \dfrac{15}{4}$.

$$t''(x) = \frac{3\sqrt{x^2 - 12x + 45} - (x-6)3\dfrac{x-6}{\sqrt{x^2 - 12x + 45}}}{9\left(x^2 - 12x + 45\right)}.$$

$t''(x) > 0$. Aleshores, $x = \dfrac{15}{4}$km és un mínim relatiu estricte.

Calculem el temps mínim: $t\left(\dfrac{15}{4}\right) = \dfrac{\frac{15}{4}}{5} + \dfrac{\sqrt{\left(\frac{15}{4}\right)^2 - 12\frac{15}{4} + 45}}{3} = 2h$.

El nadador tardarà 2h d'anar del punt N fins el punt B.

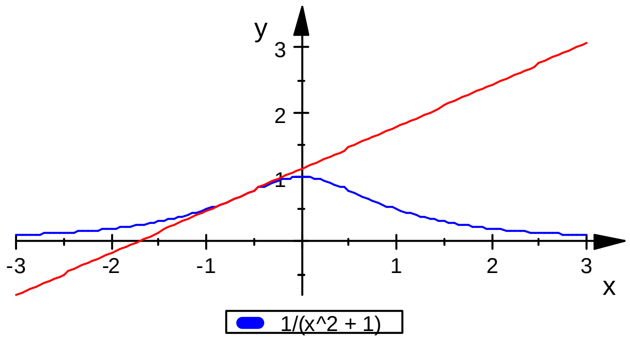
Per anar de N a P tardarà $\dfrac{\frac{15}{4}}{5}$Hores $= 45$min.

Problema 4

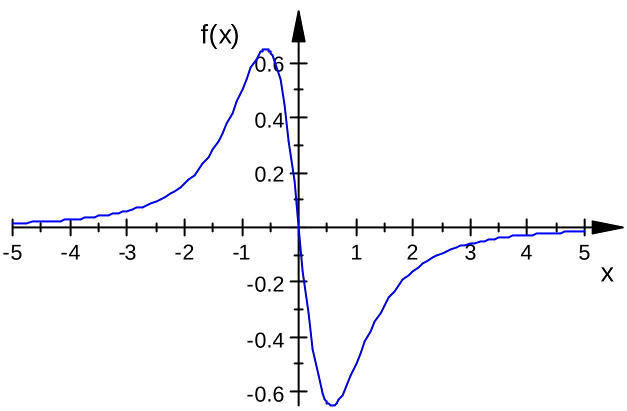
Calculeu raonadament el punt de la corba $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ en el qual la tangent a la corba té pendent màxim i calculeu el valor d'aquest pendent.
PAU, juny 2004.

Solució:

Solució gràfica de la funció $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ i la seua tangent màxima.



El pendent de la recta tangent a la corba en un punt és la derivada de la funció:
La funció que volem minimitzar és:



$f(x)=y'=\dfrac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2}$, $x\in R$. $f'(x)=\dfrac{2\left(3x^2-1\right)}{\left(1+x^2\right)^3}$

$f'(x)=0$. $\dfrac{2\left(3x^2-1\right)}{\left(1+x^2\right)^3}=0$. Resolent l'equació:

$x=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. $f''(x)=\dfrac{-24x\left(x^2-1\right)}{\left(1+x^2\right)^4}$.

$f''\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)<0$, aleshores, $x=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ és un màxim relatiu estricte.

$f''\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)<0$, aleshores, $x=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ és un màxim relatiu estricte.

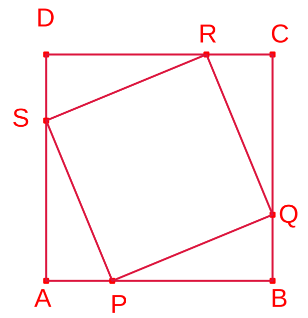
El punt de la corba que fa màxim el pendent de la corba és $x=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

El pendent màxim és: $f\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)=\dfrac{-2\dfrac{\sqrt{3}}{3}}{\left(1+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2\right)^2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$.

La recta tangent de pendent màxima és: $y=\dfrac{3\sqrt{3}}{8}x+\dfrac{9}{8}$.

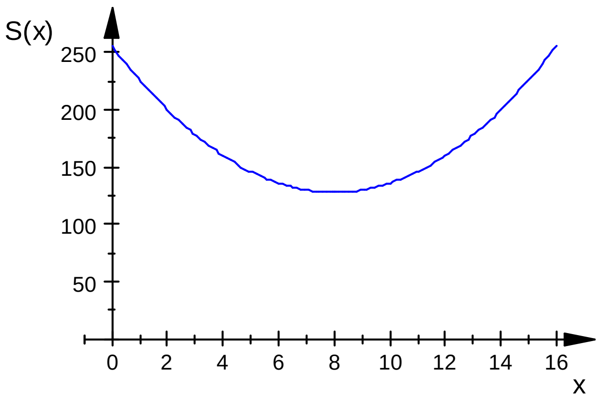
Problema 5
Determineu raonadament la longitud dels costat del quadrat d'àrea mínima si té els vèrtexs situats sobre els costats d'un altre quadrat de costat 16cm.
PAU, Setembre 2004.

Solució:
Siga el quadrat ABCD de costat $\overline{AB} = 16$.
Siga PQRS el quadrat inscrit en el quadrat ABCD.
Siga $\overline{AP} = x$.
Notem que $\overline{AP} = \overline{BQ} = \overline{CR} = \overline{DS}$.
$\overline{BP} = 16 - x$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PBQ}$:
$\overline{PQ} = \sqrt{x^2 + (16-x)^2}$.
$\overline{PQ} = \sqrt{2x^2 - 32x + 256}$.
L'àrea del quadrat PQRS és:
$S_{PQRS} = 2x^2 - 32x + 256$.
La funció a optimitzar és:
$S(x) = 2x^2 - 32x + 256$.

Mètode 1:
S(x) és una paràbola còncava el mínim s'assoleix en el vèrtex:
$x = \frac{32}{2 \cdot 2} = 8$.
L'àrea mínima s'assoleix quan $x = 8cm$. El costat d'àrea mínima és $\overline{PQ} = 8\sqrt{2}cm$ i l'àrea mínima és $S(8) = 128cm^2$.



Mètode 2:
La funció a optimitzar és:
$S(x) = 2x^2 - 32x + 256$, $x \in [0, 16]$.
$S'(x) = 4x - 32$.
$S'(x) = 0$, quan $x = 8cm$.
$S''(x) = 4$, $S''(8) = 4 > 0$, aleshores, $x = 8cm$ és un mínim absolut estricte.
L'àrea mínima s'assoleix quan $x = 8cm$. El costat d'àrea mínima és $\overline{PQ} = 8\sqrt{2}cm$ i l'àrea mínima és $S(8) = 128cm^2$.

Problema 6

La concentració en sang d'un fàrmac després de la seua presa és $C(t) = 0{,}29483t + 0.04253t^2 - 0{,}00035t^3 \ \ mg/ml$ on t és el temps transcorregut en minuts.

Es demana:

a) Calculeu el període de temps durant el qual el fàrmac actua.

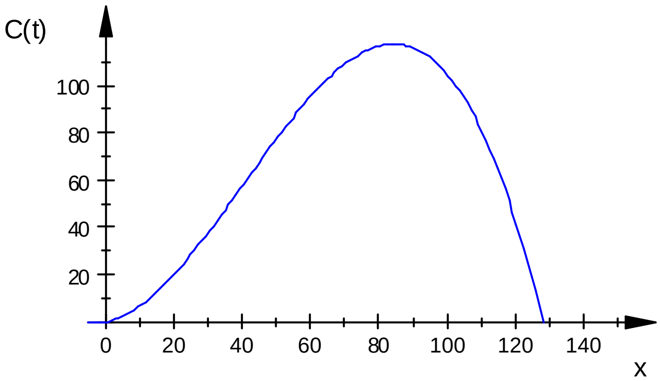
b) Determineu en quin instant la concentració del fàrmac és màxima.

PAU, juny 2005.

Solució:

a)

El període de temps durant el qual el fàrmac actua es realitza quan hi ha concentració en la sang és a dir quan $C(t) > 0$ i $t \geq 0$.



$0{,}29483t + 0.04253t^2 - 0{,}00035t^3 > 0$.

$\left(0{,}29483 + 0.04253t - 0{,}00035t^2\right)t > 0$

Resolent la inequació:

$t \in \left]0, 128.09\right[$.

b)

$C'(t) = 0{,}29483 + 0.08506t - 0{,}00105t^2$

$C'(t) = 0$, $0{,}29483 + 0.08506t - 0{,}00105t^2 = 0$.

Resolent l'equació:

$t = 84.34\,min \approx 84\,min\ 20\,s$.

$C''\,t) = 0.08506 - 0{,}0021t$.

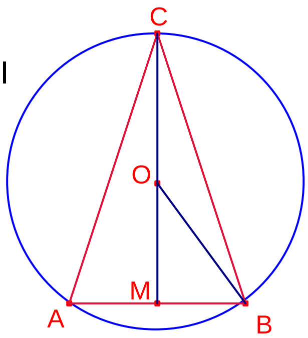
$C''(84.34\,min) < 0$, aleshores, $t = 84.339\,min$ és un màxim relatiu estricte.

La concentració del fàrmac és màxima quan $t \approx 84\,min\ 20\,s$.

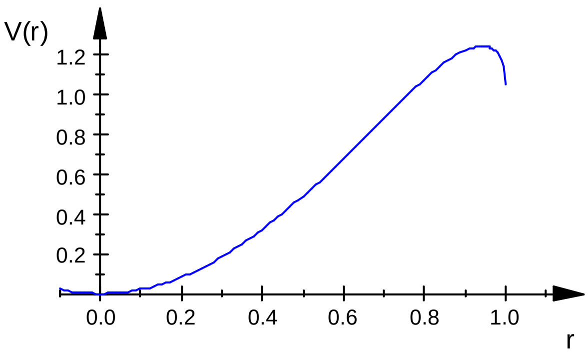
Problema 7
Proveu que el volum de qualsevol con recte inscrit en una esfera és menor que el 30% del volum de l'esfera.
PAU, Juny 2005.

Solució:
Calculem el volum màxim del con inscrit en la esfera i vegem que ocupa menys del 30% del volum de l'esfera.

Siga l'esfera de centre O i radi R.
Considerem la secció de l'esfera que passa pel vèrtex C del con i pel centre de la esfera.
La secció del con és un triangle isòsceles de base $\overline{AB} = 2r$ diàmetre del com.
Siga M el punt mig del segment $\overline{AB}$.
Siga $x = \overline{OM}$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OMB}$:
$x = \sqrt{R^2 - r^2}$.
El volum del com és: $V = \frac{1}{3} Sb \cdot h$.
L'altura del con mesura $\overline{CM} = R + x$. El volum del con és:
$V(r) = \frac{1}{3}\pi r^2 \left(R + \sqrt{R^2 - r^2}\right)$, $r \in [0, R]$.



$V'(r) = \frac{\pi}{3}\left(2Rr + \frac{4R^2 r - 3r^3}{\sqrt{R^2 - r^2}}\right)$.
$V'(r) = 0$.
$2Rr + \frac{4R^2 r - 3r^3}{\sqrt{R^2 - r^2}} = 0$. Resolent l'equació:
$r = \frac{2\sqrt{2}}{3} R$.
$V''\left(\frac{2\sqrt{2}}{3} R\right) < 0$. Aleshores $r = \frac{2\sqrt{2}}{3} R$ és un màxim relatiu estricte.
El volum màxim del con inscrit en l'esfera és:
$V\left(\frac{2\sqrt{2}}{3} R\right) = \frac{32}{81}\pi R^3$.
El volum de l'esfera és: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.
Calculem el percentatge del volum del con i de l'esfera:
$$\frac{\frac{32}{81}\pi R^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} 100 = \frac{800}{27} \approx 29'6\%.$$

Problema 8

a) El perímetre d'un sector circular de radi R és 4m.
Quants radians α ha de mesurar el seu angle central perquè la seua àrea siga màxima?.

b) L'àrea d'un altre sector circular és $1m^2$.
Per a quin radi és mínim els seu perímetre?

Nota: Perímetre $= 2R + R\alpha$, Àrea $= \frac{1}{2}\alpha R^2$.

PAU, setembre 2005.

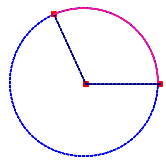
Solució:

a)

Utilitzant el perímetre del sector:

$2R + R\alpha = 4$. Aleshores:

$R = \frac{4}{2+\alpha}$.

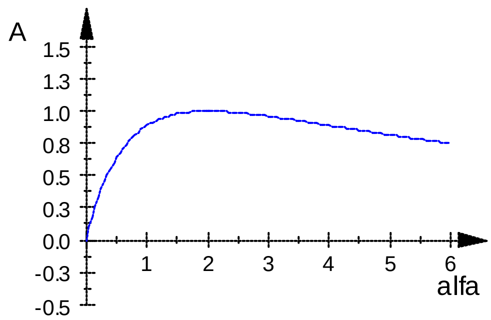


La funció àrea a optimitzar és:

$A(\alpha) = \frac{1}{2}\alpha\left(\frac{4}{2+\alpha}\right)^2$, $\alpha \in [0, 2\pi]$.

$A(\alpha) = \frac{8\alpha}{\alpha^2 + 4\alpha + 4}$.

$A'(\alpha) = \frac{-8\alpha^2 + 32}{(\alpha^2 + 4\alpha + 4)^2}$.



$A'(\alpha) = 0$. $-8\alpha^2 + 32 = 0$. Resolent l'equació:

$\alpha = 2$.

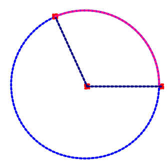
$A''(2) < 0$, aleshores, $\alpha = 2m$ és un màxim relatiu estricte.

En aquest cas $R = 1m$ i l'àrea màxima és $A(2) = \frac{1}{2}2 \cdot 1^2 = 1m^2$.

b)

Utilitzant l'àrea del sector:

$\frac{1}{2}\alpha R^2 = 1$. Aleshores:



$\alpha = \frac{2}{R^2}$. Aleshores:

La funció perímetre a optimitzar és:

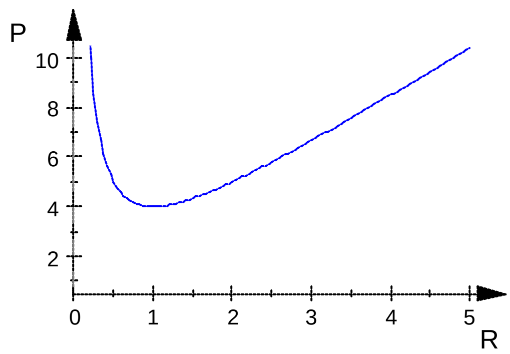
$P(R) = 2R + \frac{2}{R}$, $R \geq 0$

$P'(R) = 2 - \frac{2}{R^2}$.

$P'(R) = 0$. $2 - \frac{2}{R^2} = 0$. Resolent l'equació:

$R = 1m$.

$P''(1) = 4 > 0$. Aleshores, $R = 1m$ és un mínim relatiu estricte.



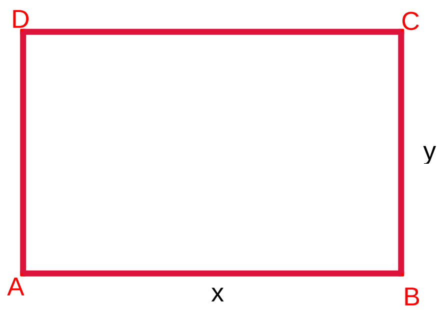
En aquest cas, $\alpha = 2m$ i el perímetre mínim és $P(1) = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 4m$.

Problema 9

El cost del marc d'una finestra rectangular és de 12,5€ per metre lineal dels costats verticals i 8€ per metre lineal dels costats horitzontals.

a) Calculeu raonadament les dimensions que ha tenir el marc d'una finestra d'$1m^2$ de superfície perquè resulte com més econòmic millor.
b) Calculeu a més, el cost d'aquest marc com més econòmic millor considerat en a).
PAU, Juny 2006.

Solució:
Siga ABCD els vèrtexs del marc rectangular.



Siga $x=\overline{AB}$ costat horitzontal, $y=\overline{BC}$ costat vertical.

L'àrea del rectangle és $1m^2$, aleshores:
$xy=1$.

La funció preu a optimitzar és:
$p(x,y)=(2x)8+(2y)12{,}5$.

$p(x)=16x+\frac{25}{x}$, $x\in\left]0,+\infty\right[$.

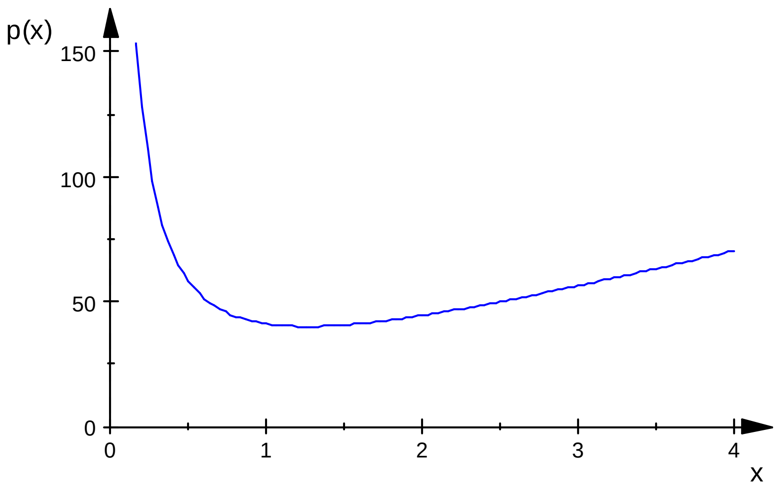
$p'(x)=16-\frac{25}{x^2}$.

$p'(x)=0$. $16-\frac{25}{x^2}=0$. Resolent l'equació:

$x=\frac{5}{4}$.

$p''(x)=\frac{25}{x^2}$, $p''\left(\frac{5}{4}\right)>0$, aleshores, $x=\frac{5}{4}=1{,}25m$ és un mínim relatiu estricte.

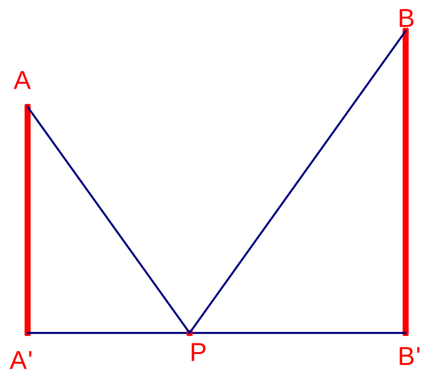
Les dimensions de la finestra són $x=\frac{5}{4}=1{,}25m$ costats horitzontals i $8=\frac{4}{5}=0{,}8m$ costats verticals i el cost mínim és, $p\left(\frac{5}{4}\right)=40€$.



Problema 10

Dos pals de 3m i 4m es troben clavats verticalment a terra.
Les bases disten 5m i, en el segment que les uneix, hi ha un punt P que dista x de la base del pal més baix.
L'extrem superior de cada pal s'uneix amb P mitjançant un segment rectilini de cable.
Es demana:
a) Obteniu l'expressió f(x) de la longitud total del cable utilitzat en els dos segments.
b) Demostreu que aquesta longitud total de cable és mínima quan són iguals els valors absoluts dels pendents dels dos segments considerats. Calculeu aquesta longitud mínima.
PAU, setembre 2006.

Solució 1:
Siguen $\overline{AA'} = 3$, $\overline{BB'} = 4$, $\overline{A'B'} = 5$.
Siga $\overline{A'P} = x$, aleshores, $\overline{B'P} = 5 - x$.



Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangles $\overset{\Delta}{AA'P}$, $\overset{\Delta}{BB'P}$:
$\overline{AP} = \sqrt{x^2 + 3^2}$, $\overline{BP} = \sqrt{(5-x)^2 + 4^2}$.
a)
La funció longitud total del cable és: $f(x) = \sqrt{x^2 + 9} + \sqrt{x^2 - 10x + 41}$, $x \in [0, 5]$.
b)
Calculem el mínim de la funció:

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} + \frac{x-5}{\sqrt{x^2 - 10x + 41}}.$$

$f'(x) = 0$. $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}} + \dfrac{x-5}{\sqrt{x^2 - 10x + 41}} = 0$

$x\sqrt{x^2 - 10x + 41} = (5-x)\sqrt{x^2 + 9}$.
Elevant al quadrat i simplificant:

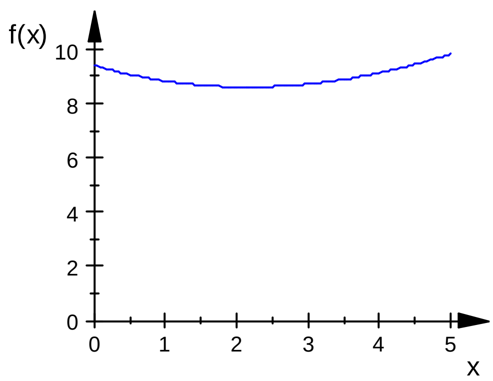
$7x^2 + 90x - 225 = 0$. Resolent l'equació: $x = \overline{A'P} = \dfrac{15}{7}$.

Estudiant la monotonia de la funció f(x).

$f'(x) < 0$ quan $x \in \left[0, \dfrac{15}{7}\right]$. $f'(x) > 0$ quan $x \in \left[\dfrac{15}{7}, 5\right]$.

Aleshores, $x = \dfrac{20}{7}$ és un mínim relatiu estricte.

$\overline{B'P} = \dfrac{20}{7}$.



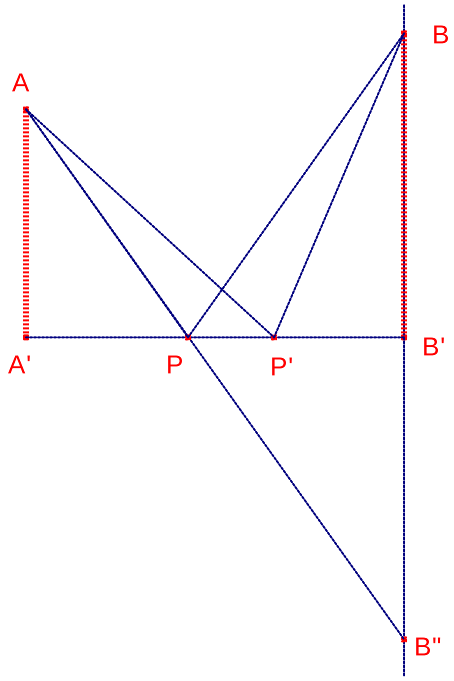
Vegem que els valors absoluts dels pendents dels dos segments que formen els cables són iguals, per fer-ho hem de provar que $\dfrac{\overline{AA'}}{\overline{A'P}} = \dfrac{\overline{BB'}}{\overline{B'P}}$:

$\dfrac{\overline{AA'}}{\overline{A'P}} = \dfrac{3}{\frac{15}{7}} = \dfrac{7}{5}$. $\dfrac{\overline{BB'}}{\overline{B'P}} = \dfrac{4}{\frac{20}{7}} = \dfrac{7}{5}$.

Calculem la longitud mínima del cable:

$$f\left(\frac{15}{7}\right) = \frac{\sqrt{665}}{7} + \frac{\sqrt{1184}}{7} \approx 8{,}60\text{m}.$$

Solució 2:



Notem que A i B és tan en el mateix semiplànol que determina la recta A'B'
Siga B" el punt simètric de B respecte de la recta A'B'.
Siga P la intersecció de la recta r i la recta que passa pels punts A, B".
Vegem que el punt P és el punt que la suma de les distàncies a A i B és mínima.
P, B", A estan alineats, aleshores:
$\overline{PA}+\overline{PB}=\overline{PA}+\overline{PB''}=\overline{AB''}$.
Siga P' un punt qualsevol de la recta r.
La recta A'B' és mediatriu de la recta que passa pels punts B, B" ja que B" és el simètric de B respecte de A'B'
Aleshores, $\overline{P'B}=\overline{P'B''}$.
$\overline{P'A}+\overline{P'B}=\overline{P'A}+\overline{P'B''}\geq\overline{AB''}=\overline{PA}+\overline{PB}$.
La igualtat s'assoleix quan P i P' coincideixen.

Els triangles $B\overset{\Delta}{B'}P$, $B''\overset{\Delta}{B'}P$ són iguals.
Els triangles rectangles $A\overset{\Delta}{A'}P$, $B''\overset{\Delta}{B'}P$ són semblants

Siga Siga $\overline{A'P}=x$, aleshores, $\overline{B'P}=5-x$.
Aplicant el teorema de Tales:
$\frac{3}{x}=\frac{4}{5-x}$. Resolent l'equació:
$x=\frac{15}{7}$.

El mínim de la longitud del cable s'assoleix quan $x=\frac{15}{7}$.

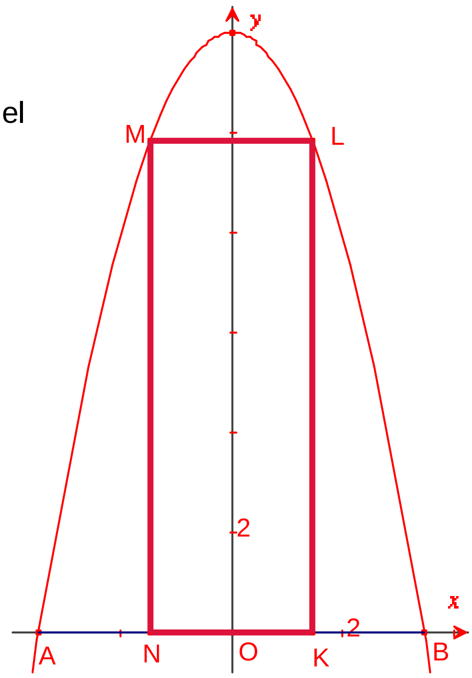
La longitud mínima del cable és:

$$L=\sqrt{3^2+\left(\frac{15}{7}\right)^2}+\sqrt{4^2+\left(5-\frac{15}{7}\right)^2}=\frac{\sqrt{665}}{7}+\frac{\sqrt{1184}}{7}\approx 8{,}60\text{m}.$$

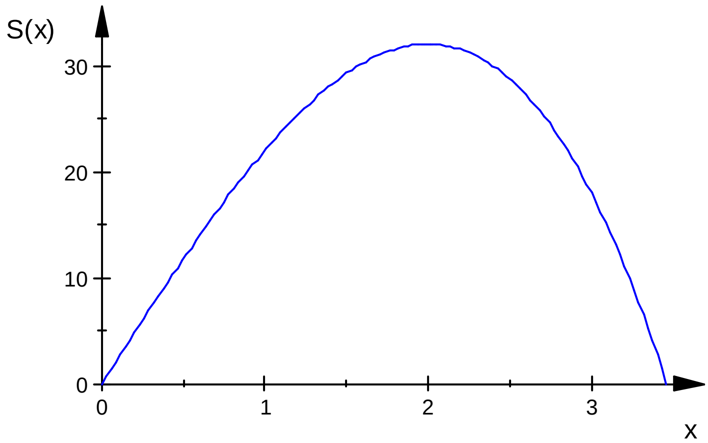
La igualtat dels valor absolut de les pendents és obvia, per ser $A\overset{\Delta}{A'}P$, $B\overset{\Delta}{B'}P$ semblants.

Problema 11
Determineu les dimensions del cartell d'àrea màxima amb forma de rectangle que té dos vèrtexs subjectes a una estructura rígida parabòlica $y = 12 - x^2$, i els altres dos vèrtexs estan situats sobre l'eix OX.
PAU, juny 2007.

Solució:
La paràbola convexa $y = 12 - x^2$ els seus punts de tall amb l'eix d'abscisses són:
$y = 0$, $12 - x^2 = 0$. Resolent l'equació;
$x = \pm 2\sqrt{3}$.
Els punts de tall són $A\left(-2\sqrt{3}, 0\right)$, $B\left(2\sqrt{3}, 0\right)$.
Per ser la paràbola simètrica respecte de l'eix d'ordenades OY, el rectangle que cerquem KLMN és simètric respecte de l'eix OY.



Siga $x = \overline{OK}$, $x \in \left[0, 2\sqrt{3}\right]$.
$\overline{KL} = 12 - x^2$, $\overline{NK} = 2x$.
L'àrea del rectangle KLMN a optimitzar és:
$S(x) = 2x\left(12 - x^2\right)$, $x \in \left[0, 2\sqrt{3}\right]$.
$S'(x) = -6x^2 + 24$.
$S'(x) = 0$, $-6x^2 + 24 = 0$.
Resolent l'equació:
$x = 2$.
$S''(x) = -12x$.
$S''(2) = -24 < 0$. Aleshores, $x = 2$ és un màxim relatiu estricte.
Les dimensions del rectangle màxim són $\overline{KL} = 8$, $\overline{NK} = 4$.
La superfície màxima és $S(2) = 32$.



Problema 12

La vora d'un estany està formada per l'arc de corba $y = 4 - x^2$ d'extrems $(-2, 0)$ i $(2, 0)$ i el segment rectilini que uneix aquests dos punts.

Un sortidor està situat en el punt de coordenades $(0, 2)$.

Es demana el següent:

a) Determineu, raonadament, el punt del segment rectilini de la vora de l'estany que està més pròxim al sortidor.

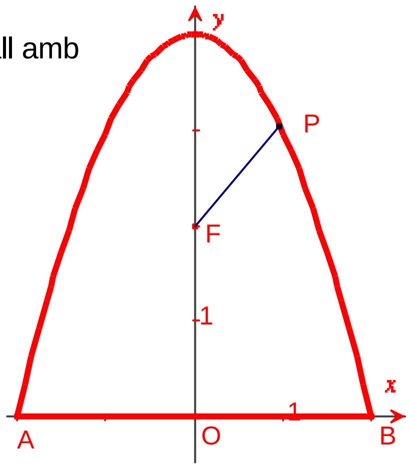
b) Determineu, raonadament, els punts de l'arc de corba de la vora de l'estany que estan més pròxims al sortidor.

c) Quins són els punts de la vora de l'estany més pròxims al sortidor.

PAU, Setembre 2007.

Solució:

Siga el punt $F(0, 2)$ el sortidor.



L'arc $y = 4 - x^2$ és una paràbola convexa els seus punts de tall amb l'eix d'abscisses són:

$y = 0$, $4 - x^2 = 0$. Resolent l'equació;

$x = \pm 2$.

Els punts de tall són $A(-2, 0)$, $B(2, 0)$.

Un punt qualsevol de l'arc $y = 4 - x^2$ té coordenades $P(x, 4 - x^2)$ on $x \in [-2, 2]$.

a) El punt del segment rectilini de la vora de l'estany que està més pròxim al sortidor és la projecció ortogonal de F sobre l'eix d'abscisses, és a dir, l'origen de coordenades $O(0, 0)$.

La mínima distància és $d(O,F) = 2$.

b)

$\overline{FP} = \sqrt{x^2 + (4 - x^2 - 2)^2}$.

La distància de qualsevol punt de l'arc a F és:

$d(x) = \sqrt{x^2 + (-x^2 + 2)^2}$, $x \in [-2, 2]$

$d(x) = \sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}$.

$$d'(x) = \frac{2x^3 - 3x}{\sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}}.$$

$d'(x) = 0$, $2x^3 - 3x = 0$. Resolent l'equació:

$x = -\sqrt{\frac{3}{2}}, 0, \sqrt{\frac{3}{2}}$.

Estudiant la monotonia de la funció:

La funció és estrictament decreixent en $\left]-2, -\sqrt{\frac{3}{2}}\right[\cup \left]0, \sqrt{\frac{3}{2}}\right[$.

La funció és estrictament creixent en $\left]-\sqrt{\frac{3}{2}}, 0\right[\cup \left]\sqrt{\frac{3}{2}}, 2\right[$.

Aleshores, $x = -\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}$ són mínims relatius estrictes.

els punts de l'arc de corba de la vora de l'estany que estan més pròxims al sortidor són

$P_1\left(-\sqrt{\frac{3}{2}},\frac{5}{2}\right)$, $P_2\left(\sqrt{\frac{3}{2}},\frac{5}{2}\right)$.

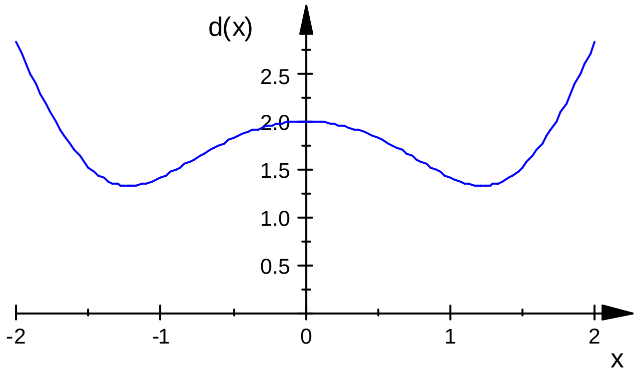
En tots dos casos la mínima distància és:

$$d(P_1,F)=d(P_2,F)=\sqrt{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2+\left(-\frac{3}{2}+2\right)^2}=\frac{\sqrt{7}}{2}.$$

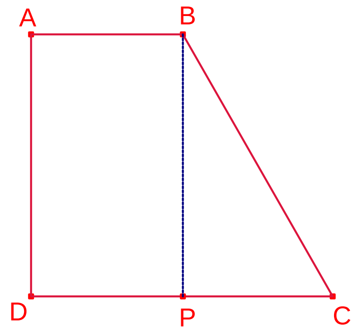
c)

Els punts de la vora de l'estany més pròxims al sortidor és el mínim entre els punts de l'arc i del segment rectilini que formen el recinte és a dir .

$P_1\left(-\sqrt{\frac{3}{2}},\frac{5}{2}\right)$, $P_2\left(\sqrt{\frac{3}{2}},\frac{5}{2}\right)$, ja que $d(P_1,F)=d(P_2,F)=\frac{\sqrt{7}}{2}<2=d(OF)$



Problema 13
Una finestra té forma de trapezi rectangular.
La base menor fa 20cm i el costat oblic fa 40cm.
Determineu l'angle α que ha de formar el costat oblic amb la base major perquè l'àrea de la finestra siga màxima.
Nota: un trapezi rectangular és un quadrilàter amb dos costats paral·lels en què un dels altres costats és perpendicular a aquests dos costats paral·lels.
PAU, Juny 2008.

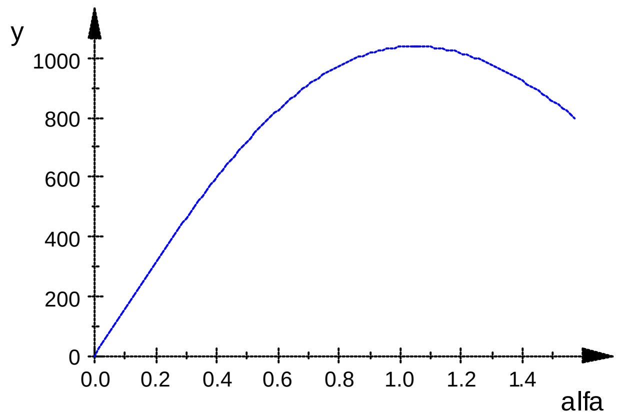


Solució:
Siga el trapezi rectangle ABCD de base $\overline{AB} = 20$, costat oblic $\overline{BC} = 40$ i $A = D = 90^o$.
Siga $\alpha = \angle BCD$ angle que forma el costat oblic i la base major.
Siga $\overline{BP}$ altura del triangle.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BPC}$:
$\overline{BP} = 40\sin\alpha$, $\overline{CP} = 40\sin\alpha$.
$\overline{CD} = \overline{AB} = 20$.
L'àrea del trapezi és igual a l'àrea del rectangle ABPD més l'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{BPC}$.

$$S(\alpha) = 20 \cdot 40\sin\alpha + \frac{40\sin\alpha \cdot 40\cos\alpha}{2}.$$

$$S(\alpha) = 800\sin\alpha + 400\sin 2\alpha, \quad \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$



$S'(\alpha) = 800\cos\alpha + 800\cos 2\alpha$.
$S'(\alpha) = 0$, $\cos\alpha + \cos 2\alpha = 0$.
$\cos 2\alpha = -\cos\alpha = \cos(\pi - \alpha)$.
Aleshores, $2\alpha = \pi - \alpha$. Resolent l'equació:

$$\alpha = \frac{\pi}{3}.$$

$S''(\alpha) = -800\cos\alpha - 1600\cos 2\alpha$.

$S''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -800\frac{\sqrt{3}}{2} - 1600\frac{\sqrt{3}}{2} < 0$. Aleshores,

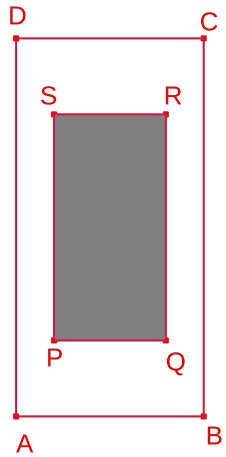
$\alpha = \frac{\pi}{3}$ és un màxim relatiu estricte.

L'àrea màxima és: $S\left(\frac{\pi}{3}\right) = 800\sin 60^o + 400\sin 120^o = 1200\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 1039.23cm^2$.

Problema 14

Una empresa decideix llançar una campanya de propaganda d'un dels seus productes editant un text que ocupa 18cm^2 en fulls rectangulars impresos a una cara, amb marges superior i inferior de 2cm i laterals d'1cm.
Determineu les dimensions del full per a les quals el consum de paper siga mínim.
PAU, juny 2008.

Solució:
El consum és mínim quan la superfície total del full siga mínima.
Siga ABCD el rectangle que forma el full (part impresa i marges).



Siga $\overline{AB} = x$, $\overline{BC} = y$
Siga PQRS el rectangle que forma la part impresa.
$\overline{PQ} = x-2$, $\overline{QR} = y-4$.
L'àrea impresa ocupa 18cm^2, aleshores:
$(x-2)(y-4) = 18$. Aïllant la incògnita y:

$$y = 4 + \frac{18}{x-2}.$$

La funció a optimitzar és l'àrea del quadrat ABCD:
$S(x, y) = xy$.

$$S(x) = x\left(4 + \frac{18}{x-2}\right),\quad x \in \left]2, +\infty\right[.$$

$$S(x) = \frac{4x^2+10x}{x-2}.$$

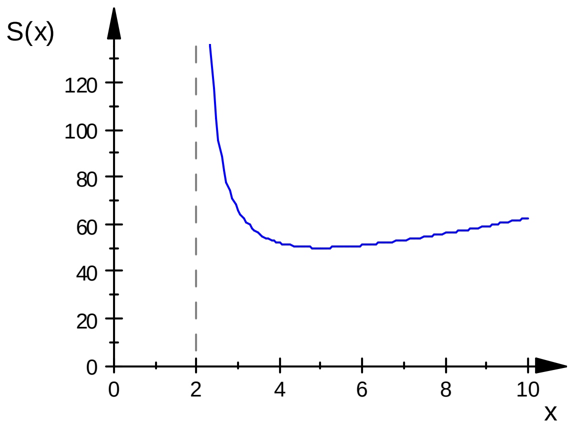
$$S'(x) = \frac{4x^2-16x-20}{(x-2)^2}.$$

$$S'(x) = 0,\quad \frac{4x^2-16x-20}{(x-2)^2} = 0.$$

Resolent l'equació:
$x = 5$.

$$S''(x) = \frac{72}{(x-2)^3}.$$

$S''(5) > 0$, aleshores, $x = 5\text{cm}$, $y = 10\text{cm}$.
Les dimensions del full que fa mínim el consum és de 5cm horitzontals i 10cm verticals.
La superfície mínima del full és $S(5) = 50\text{cm}^2$.



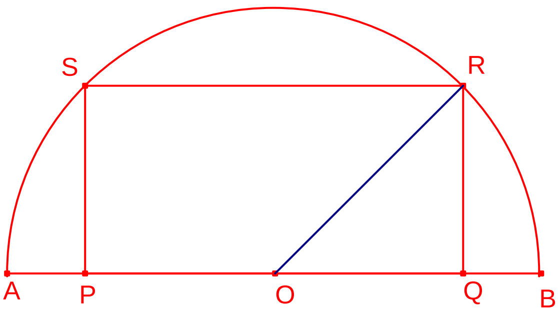
Problema 15

Un terreny amb forma de semicercle de $\sqrt{50}$m de radi, es dibuixa un rectangle que té dos vèrtexs sobre la semicircumferència del perímetre del terreny. Els altres dos vèrtexs del rectangle estan sobre el segment rectilini del perímetre disten x metres. Obteniu raonadament.

a) L'àrea del rectangle en funció de x.

b) El valor de x pel al qual és màxima l'àrea del rectangle.

PAU, setembre 2008.



Solució:

Siga el semicercle de centre O i diàmetre $\overline{AB} = 2\sqrt{50}$.

Siga PQRS el rectangle tal que $\overline{PQ} = x$, $\overline{QR} = y$.

$\overline{OR} = \sqrt{50}$. $\overline{OQ} = \dfrac{x}{2}$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OQR}$:

$50 = y^2 + \left(\dfrac{x}{2}\right)^2$. Aïllant y:

$y = \dfrac{\sqrt{200 - x^2}}{2}$.

a)

L'àrea del rectangle PQRS en funció de x és:

$S(x) = x \cdot \dfrac{\sqrt{200 - x^2}}{2}$, $x \in \left]0, 2\sqrt{50}\right[$.

b)

Maximitzem l'àrea del rectangle.

$S'(x) = \dfrac{100 - x^2}{\sqrt{200 - x^2}}$.

$S'(x) = 0$, $\dfrac{100 - x^2}{\sqrt{200 - x^2}} = 0$.

Resolent l'equació:

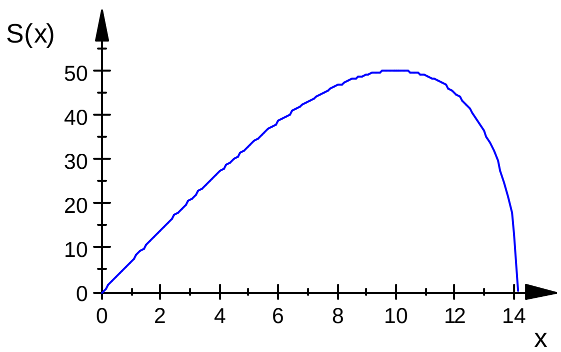
$x = 10$, $y = 5$.

Estudiant els intervals de monotonia de la funció S(x).

S(x) és creixent en $\left]0, 10\right[$ i decreixent en l'interval $x \in \left]10, 2\sqrt{50}\right[$.

Aleshores, $x = 10$m és un màxim relatiu estricte.

Les mesures del rectangle d'àrea màxima inscrit en el semicercle té costats $x = 10$m, $y = 5$m. L'àrea màxima és: $S(10) = 50\text{m}^2$.



Problema 16

Es desitja construir una bodega amb forma de paral·lelepípede rectangular de $100\,m^3$ de volum de manera que el llarg de la seua base siga $\frac{4}{3}$ de l'amplada.

Se sap que els preus d'un metre quadrat del sòl, del sostre i de la paret lateral, són, respectivament, $225€/m^2$, $300€/m^2$ i $256€/m^2$.

Determineu raonadament:

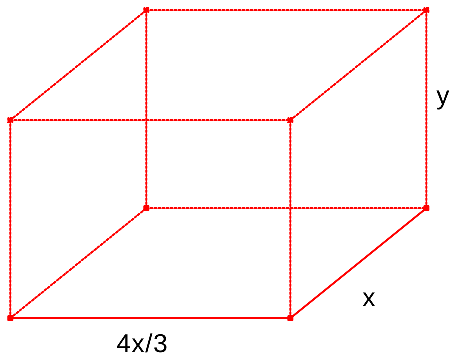
a) el valor x de l'amplada de la base que minimitza el cost.

b) Aquest cost.

PAU, Juny 2009

Solució:

Siga el paral·lelepípede rectangular de $\frac{4}{3}x$ de llarg, x d'ample i y d'alt.



El seu volum és $100\,m^3$, aleshores:

$\frac{4}{3}x \cdot x \cdot y = 100$. Aïllant la incògnita y:

$y = \frac{75}{x^2}$.

Els cost de la bodega és:

$$c(x) = 225\frac{4}{3}x^2 + 300\frac{4}{3}x^2 + 256\left(\frac{14}{3}x\frac{75}{x^2}\right).$$

$$c(x) = 700x^2 + \frac{89600}{x}, \quad x > 0.$$

$$c'(x) = 1400x - \frac{89600}{x^2}.$$

$$c'(x) = 0, \quad 1400x - \frac{89600}{x^2} = 0.$$

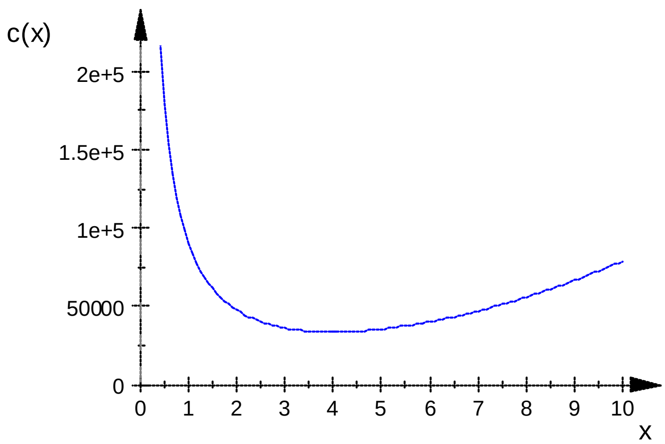
$1400x^3 - 89600 = 0$.

Resolent l'equació:

$x = 4$

$$c''(x) = 1400 + \frac{2 \cdot 89600}{x^3}.$$

$c''(4) > 0$, aleshores, $x = 4m$ és un mínim relatiu estricte.



El cost de la bodega és:

$$c(4) = 700 \cdot 4^2 + \frac{89600}{4} = 33600m^3.$$

Problema 17

Un proveïdor ven un producte a un comerciant al preu de 300€ la unitat.
El comerciant incrementa la quantitat de 300€ en un 40% per a obtindre el preu de venda al públic.
El comerciant sap que a aquest preu vendrà 50 unitats cada mes i que durant el més de rebaixes per cada 3€ de reducció en el preu de venda de la unitat aconsegueix un increment de vendes de 5 unitats.
Determineu, raonadament, el nombre d'unitats que ha de demanar al proveïdor per a vendre-les en el mes de rebaixes i el preu de venda de cada unitat per maximitzar els seus beneficis durant aquest període.
PAU, juny 2009.

Solució:
Siga x el nombre d'unitats que ha de demanar al proveïdor.
Una d'aquestes unitats sense reducció el comerciant les ven a $300\cdot\frac{140}{100}=420€$

Si demana si x supera les 50, redueix $\frac{3}{5}(x-50)$ del preu de venda per unitat.

El preu de venda d'una unitat és:

$420-\frac{3}{5}(x-50)$, $x\geq 50$.

Aleshores, el preu de venda de les x unitats és:

$x\left(420-\frac{3}{5}(x-50)\right)$, $x\geq 50$.

El benefici és:

$B(x)=x\left(420-\frac{3}{5}(x-50)-300\right)$, $x\geq 50$.

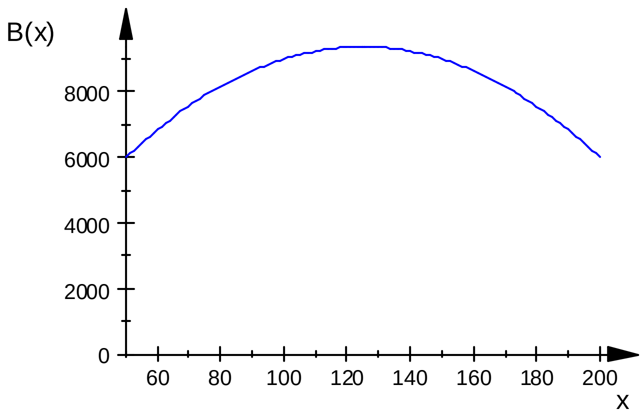
$B(x)=-\frac{3}{5}x^2+150x$, $x\geq 50$.

La funció benefici és una paràbola convexa el màxim s'assoleix en el vèrtex:

$$x=\frac{-150}{2\left(\frac{-3}{5}\right)}=125.$$

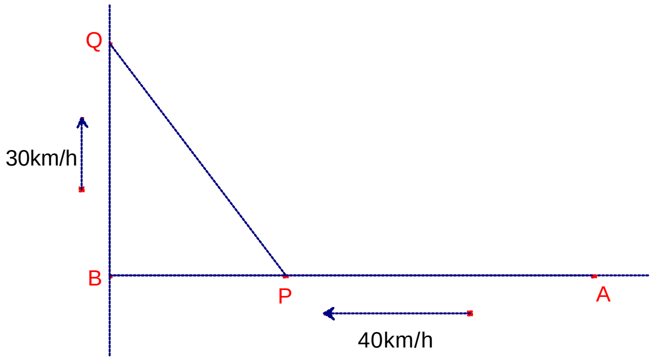
Aleshores, el comercial hauria de demanar al proveïdor 125 unitats i el màxim benefici seria:

$B(125)=9375€$, el preu de venda de cada unitat és $420-\frac{3}{5}(125-50)=375$ €.

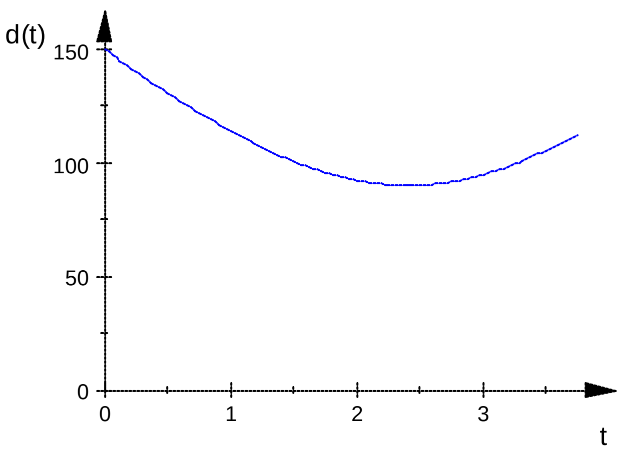


Problema 18
A les 7 del matí, una llanxa A està situada a 150km a l'est d'una altra llanxa B.
La llanxa A navega cap a l'oest a una velocitat de 40km/h i la llanxa B es dirigeix cap al nord a 30km/h.
Si es mantenen aquests rumbs, determineu raonadament, a quina hora estaran ambdues llanxes a distància mínima.
PAU, setembre 2009.

Solució:



Siga A el punt on es troba inicialment la llanxa A. Siga B el punt inicial on es troba la llanxa B. $\overline{AB} = 150\text{km}$.
Siga P el punt del segment $\overline{AB}$ i Q punt de la perpendicular al segment $\overline{AB}$ de mínima distància.
Siga t el temps en hores transcorregut per anar de A a P la llanxa A, i a la vegada el temps transcorregut per anar de B a Q la llanxa B.
$\overline{AP} = 40\text{km/h} \cdot t$. La llanxa A tarda $\frac{150\text{km}}{40\text{km/h}} = \frac{15}{4}\text{h} = 3\text{h}45\text{min}$ en arribar a B.
$\overline{BQ} = 30\text{km/h} \cdot t$ Aleshores, $\overline{BP} = 150 - 40t$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{QBP}$:
$\overline{PQ} = \sqrt{(30t)^2 + (150-40t)^2}$. La funció distància a optimitzar és:
$d(t) = \sqrt{2500t^2 - 12000t + 22500}$, $t \in \left[0, \frac{15}{4}\right]$.
$d'(t) = \frac{5000t - 12000}{2\sqrt{2500t^2 - 12000t + 22500}}$.
$d'(t) = 0$, $t = \frac{15}{5}\text{h} = 2\text{h}24\text{min}$.
Estudiant la monotonia de la funció $d(t)$:
En l'interval $\left]0, \frac{12}{5}\right[$ la funció és estrictament creixent.
En l'interval $\left]\frac{12}{5}, \frac{15}{4}\right[$ la funció és estrictament decreixent.

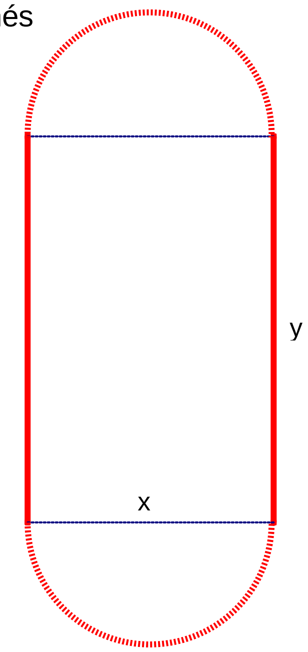


Aleshores, $t = \frac{15}{5}\text{h} = 2\text{h}24\text{min}$ és un mínim relatiu estricte.
Aleshores, a les 9h i 24min les llanxes estan a mínima distància i la mínima distància és, $d\left(\frac{12}{5}\right) = 90\text{km}$.

Problema 19

Es vol construir un estadi tancat de $10000\,m^2$ de superfície.
L'estadi està format per un rectangle de base x i dos semicercles exteriors de diàmetre x, de manera que cada costat horitzontal del rectangle és diàmetre d'un dels semicercles.
El preu d'un metre de tanca per als costats verticals del rectangle és d'1€ i el preu d'un metre de tanca per a les semicircumferències és de 2€.
Determineu raonadament:
a) La longitud del perímetre del camp en funció de x.
b) El cost f(x) de la tanca en funció de x.
c) El valor de x per tal que el cost de la tanca siga mínim.
PAU, juny 2010.

Solució:
Siga y la longitud del costat vertical del rectangle.
L'àrea de l'estadi és igual a l'àrea del rectangle de costats, x, y, més l'àrea d'un cercle de diàmetre x:



$xy+\frac{\pi}{4}x^2=10000$. Aïllant la incògnita y:

$$y=\frac{40000-\pi x^2}{4x}.$$

a) La longitud del perímetre és:

$p(x,y)=2y+\pi x$.

$$p(x)=\frac{40000-\pi x^2}{2x}+\pi x.$$

b)
El cost de la tanca és:

$f(x,y)=2y+2\pi x$

$$f(x)=\frac{40000-\pi x^2}{2x}+2\pi x,\ \ x\geq 0.$$

$$f'(x)=\frac{3\pi x^2-40000}{2x^2}.$$

$$f'(x)=0,\ \frac{3\pi x^2-40000}{2x^2}=0.$$

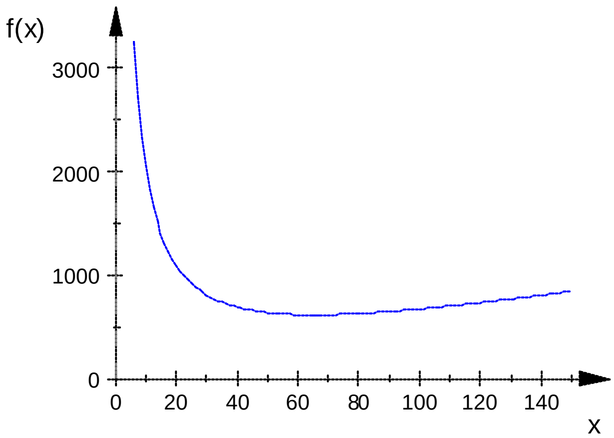
Resolent l'equació:

$$x=\frac{200}{\sqrt{3\pi}}\approx 65.15m,\ \ y\approx 102.33m.$$

$$f''(x)=\frac{40000}{x^3}.$$

$f''\left(\frac{200}{\sqrt{3\pi}}\right)>0$, aleshores,

$x=\frac{200}{\sqrt{3\pi}}\approx 65.15m$ és un mínim relatiu estricte.

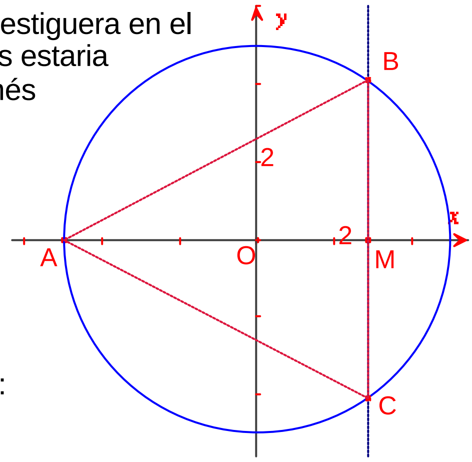


El cost mínim de la tanca és:

$$f\left(\frac{200}{\sqrt{3\pi}}\right)\approx 614€.$$

Problema 20
Dos elements d'un escut són una circumferència i un triangle.
La circumferència té centre $(0, 0)$ i radi 5. Un dels vèrtex del triangle és el punt $A(-5, 0)$. Els altres dos vèrtexs del triangle són els punts de la circumferència $B(x, y)$, $C(x, -y)$. Determineu:
a) L'àrea del triangle en funció de x.
b) Els vèrtexs B i C per als quals és màxima l'àrea del triangle.
c) el valor màxim de l'àrea del triangle.
PAU, Setembre 2010.

Solució:
Siga B un punt de la circumferència del primer quadrant. Si estiguera en el segon quadrant el seu simètric respecte de l'eix d'ordenades estaria en el primer quadrant i el triangle tindria la mateixa base i més altura.

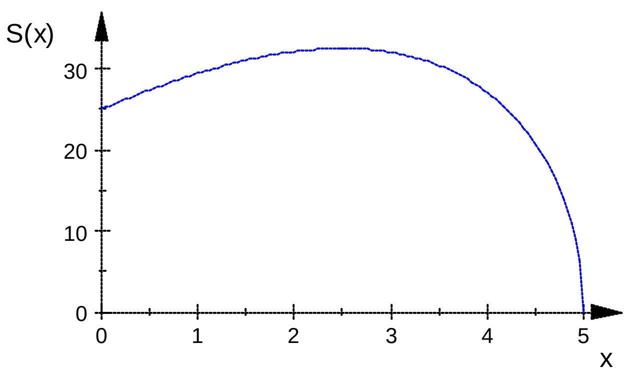


Siga la circumferència de centre $O(0, 0)$ i radi 5.
El punt A pertany a la circumferència ja que $\overline{OA} = 5$.
Siga M el punt mig del costat $\overline{BC}$.
$\overline{OM} = x$. $\overline{AM} = 5 + x$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OMB}$:
$y = \sqrt{5^2 - x^2}$.
$\overline{BC} = 2y = 2\sqrt{25 - x^2}$.
Si considerem $\overline{BC}$ base i $\overline{AM}$ altura del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$, la funció àrea a optimitzar és:
$S(x) = (5 + x)\sqrt{25 - x^2}$, $x \in [0, 5]$.

$$S'(x) = \frac{-2x^3 - 15x^2 + 125}{\sqrt{-x^4 - 10x^3 + 250x + 625}}.$$

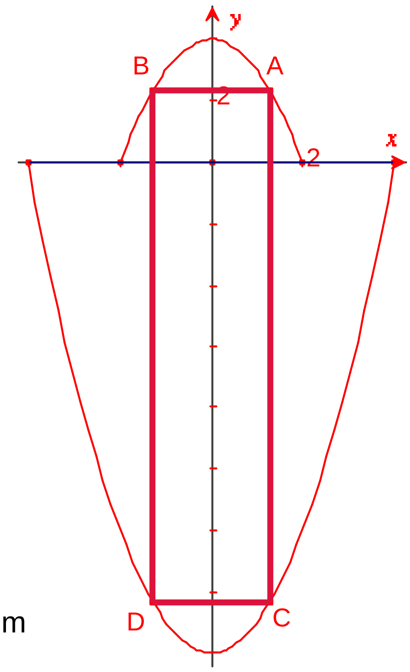
$S'(x) = 0$, $-2x^3 - 15x^2 + 125 = 0$. Resolent l'equació amb la regla de Ruffini:
$x = -5, \frac{5}{2}$. Notem que $x = -5$ no pertany al domini.
Estudiant la monotonia de la funció S(x)
La funció és estrictament creixent en l'interval, $\left]0, \frac{5}{2}\right[$, i estrictament decreixent en l'interval $\left]\frac{5}{2}, 5\right[$, aleshores, $x = \frac{5}{2}$ és un màxim relatiu estricte.
La superfície màxima és

$$S\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{75\sqrt{3}}{4} \approx 32.48\ u^2.$$

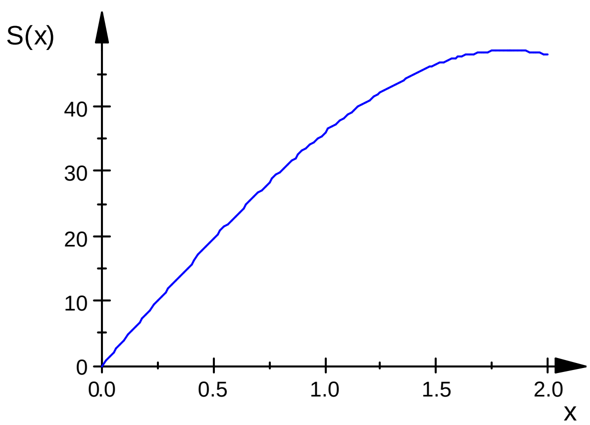


Problema 21

Es desitja construir un camp rectangular amb vèrtexs A, B, C, D de manera que:
Els vèrtexs A i B siguen punts de l'arc de la paràbola $y = 4 - x^2$, $-2 \le x \le 2$ i el segment $\overline{AB}$ és horitzontal.
Els vèrtexs C i D siguen punts de l'arc de la paràbola $y = x^2 - 16$, $-4 \le x \le 4$ i el segment $\overline{CD}$ és també horitzontal.
Els punts A i C han de tindre la mateixa abscissa, el valor del qual és un nombre real positiu x.
Els punts B, D han de tindre la mateixa abscissa, el valor del qual és un nombre real positiu -x.
Determineu raonadament:
a) L'expressió S(x) de l'àrea del camp rectangular en funció del nombre real positiu x.
b) El nombre real positiu x per al qual l'àrea S(x) és màxima.
c) El valor de l'àrea màxima.
PAU, juny 2011.

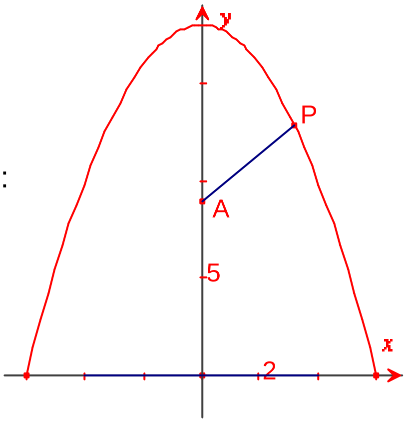


Solució:
Les coordenades dels vèrtex del rectangle ACDB són:
$A(x, 4 - x^2)$, $C(x, x^2 - 16)$, $D(-x, x^2 - 16)$, $B(-x, 4 - x^2)$,
$x \in [0,2]$.
$\overline{AB} = 2x$, $\overline{AC} = 4 - x^2(x^2 - 16) = -2x^2 + 20$.
La funció àrea a optimitzar és:
$S(x) = 2x(-2x^2 + 20)$, $x \in [0,2]$
$S'(x) = -12x^2 + 40$.
$S'(x) = 0$, $-12x^2 + 40 = 0$. Resolent l'equació:
$x = \sqrt{\frac{10}{3}} = \frac{\sqrt{30}}{3} \approx 1.83u$.
$S''(x) = -24x$. $S''\left(\frac{\sqrt{30}}{3}\right) < 0$. Aleshores, $x = \frac{\sqrt{30}}{3}$ és un màxim relatiu estricte.
L'àrea màxima és, $S\left(\frac{\sqrt{30}}{3}\right) = \frac{80\sqrt{30}}{9} \approx 48.69u^2$



Problema 22

Un cotxe recorre l'arc de paràbola Γ d'equació $2y = 36 - x^2$, $-6 \le x \le 6$.
Es representa per f(x) la distància del punt $(0, 9)$ al punt (x, y) de l'arc Γ on està situat el cotxe. Determineu raonadament:
a) L'expressió de f(x)
b) Els punts de l'arc Γ on la distància f(x) té mínims relatius.
c) El valor màxim i mínim de la distància f(x).
d) L'àrea de la superfície limitada per l'arc de paràbola Γ i el segment rectilini que uneix els punts, $(-6, 0)$ i $(6, 0)$.
PAU, setembre 2011



Solució:
a)
Siga P un punt qualsevol de l'arc Γ, les seues coordenades són:
$P\left(x, 18 - \frac{x^2}{2}\right)$.
La distància entre A i P és:

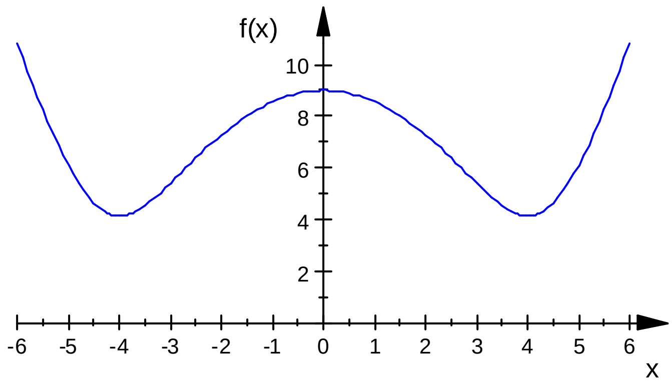
$$f(x) = \sqrt{x^2 + \left(18 - \frac{x^2}{2} - 9\right)^2}, \quad x \in [-6, 6].$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x^4 - 32x^2 + 324}, \quad x \in [-6, 6].$$

b)
Optimitzem la funció f(x)

$$f'(x) = \frac{x^3 - 16x}{\sqrt{x^4 - 32x^2 + 324}}.$$

$f'(x) = 0$, $x^3 - 16x = 0$. Les solucions de l'equació són:
$x = -4, 0, 4$.



Estudiem la monotonia de la funció f(x).
La funció és estrictament creixent en l'interval, $]-4, 0[\cup]4, 6[$, i estrictament decreixent en l'interval $]-6, -4[\cup]0, 4[$, aleshores,:
$x = -4$ és un mínim relatiu estricte.
$x = 0$ és un màxim relatiu estricte.
$x = 4$ és un mínim relatiu estricte.
Per la simetria de la paràbola els mínims relatius estrictes tenen la mateixa ordenada i són: $P(-4, 10)$ i $Q(4, 10)$.
c)
La distància mínima és:
$f(-4) = f(4) = \sqrt{17}$
El valor màxim de la distància és $x = 0$, màxim relatiu o bé els extrems del domini
$f(0) = 9$
$f(-6) = f(6) = \sqrt{117} \approx 10.82$
Aleshores, la distància màxima s'assoleix en els punts $(-6, 0)$ i $(6, 0)$ i és
$f(-6) = f(6) = \sqrt{117} \approx 10.82$.

d)
Calculem àrea de la superfície limitada per l'arc de paràbola Γ i el segment rectilini que uneix els punts, $(-6, 0)$ i $(6, 0)$.

Per la simetria de la funció:

$$S = 2 \cdot \int_{-6}^{6} \left(18 - \frac{x^2}{2}\right) dx = \left(18x - \frac{x^3}{6}\right)\Bigg]_0^6 = 144u^2 .$$

Problema 23

Per dissenyar un escut es dibuixa un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ de vèrtexs $A(0,12)$, $B(-x,x^2)$, $C(x,x^2)$ essent $x^2<12$. Determineu raonadament:

a) L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ en funció de l'abscissa x del vèrtex C.

b) Les coordenades dels vèrtexs B i C perquè l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ siga màxima.

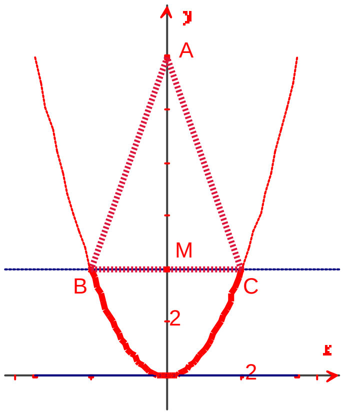
Per a completar l'escut s'afegeix al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ d'àrea màxima la superfície S limitada entre la recta $y=4$ i l'arc de paràbola $y=x^2$, quan $-2\le x\le 2$

Determineu raonadament:

c) L'àrea de la superfície S.

d) L'àrea total de l'escut.

PAU, juny 2012.



Solució:

Siga $x\ge 0$, $x^2<12$. Aleshores, $x\in\left[0,2\sqrt{3}\right[$.

Siga M el punt mig del segment $\overline{BC}$.

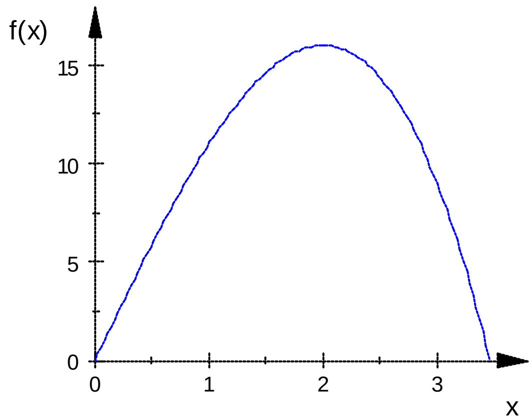
Les seues coordenades són $M(0,x^2)$.

$\overline{AM}=12-x^2$. $\overline{BC}=2x$

a)

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ en funció de l'abscissa x del vèrtex C és:

$f(x)=x(12-x^2)$, $x\in\left[0,2\sqrt{3}\right[$.



b)

Maximitzem la funció àrea f(x).

$f'(x)=-3x^2+12$.

$f'(x)=0$, $-3x^2+12=0$. Resolent l'equació:

$x=2$.

$f''(x)=-6x$, $f''(2)>0$. Aleshores $x=2$ és un màxim relatiu estricte.

Les coordenades dels punts B, i C on l'àrea és màxima són:

$B(-2,4)$, $C(2,4)$. La superfície màxima del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és, $f(4)=32u^2$.

c)

Calculem l'àrea afitada entre la recta $y=4$ i l'arc de paràbola $y=x^2$, quan $-2\le x\le 2$

Notem que la recta i la paràbola s'intersecte en els punts $B(-2,4)$, $C(2,4)$.

L'àrea és igual a la integral definida de la recta menys la paràbola entre $[-2,2]$

Per ser la recta i la paràbola, cadascuna, simètriques respecte de l'eix OY.

$$S=2\int_0^2\left(4-x^2\right)dx=2\left(\left[4x-\frac{x^3}{3}\right]_0^2\right)=\frac{32}{3}u^2.$$

d)

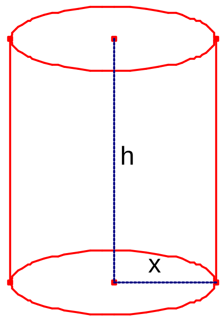
L'àrea total de l'escut és igual a la suma de les àrees del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ més l'àrea de la superfície S.

$$S_{Total}=32+\frac{32}{3}=\frac{128}{3}u^2.$$

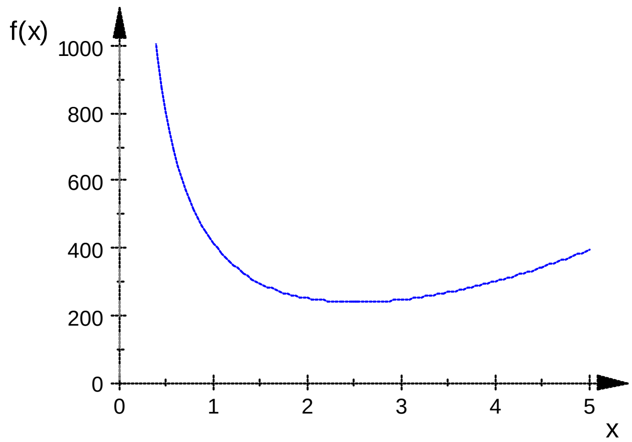
Problema 24

Es vol construir un dipòsit cilíndric de $100\,m^3$ de volum, obert per la part superior.
La base és un cercle en posició horitzontal de radi x i la paret vertical del dipòsit és una superfície cilíndrica perpendicular a la base.
El preu del material de la base del dipòsit és de $4€/m^2$ i el preu del material de la part vertical és de $2€/m^2$. Determineu raonadament:
a) L'àrea de la base en funció del seu radi x.
b) L'àrea de la paret vertical del cilindre en funció de x.
c) La funció f(x) que dóna el cost del dipòsit.
d) El valor x del radi de la base per al qual el cost del dipòsit és mínim i el valor del cost mínim
PAU, setembre 2012

Solució:
Siga h l'altura del cilindre



a)
L'àrea de la base és l'àrea del cercle de radi x:
$S_b = \pi x^2$.
b)
L'àrea de la paret vertical és l'àrea d'un rectangle de base la longitud de la circumferència de radi x i l'altura h del cilindre
$S_L = 2\pi x \cdot h$.
El volum del cilindre és: $V = S_b \cdot h$
$100 = \pi x^2 \cdot h$. Aïllant h: $h = \dfrac{100}{\pi x^2}$.
La funció àrea lateral és:
$S_L = 2\pi x \cdot \dfrac{100}{\pi x^2}$. Simplificant: $S_L = \dfrac{200}{x}$.
c)
La funció cost del dipòsit és:
$f(x) = 4 \cdot \pi x^2 + 2 \cdot \dfrac{200}{x}$. $f(x) = 4\pi x^2 + \dfrac{400}{x}$, $x > 0$.



d)
Minimitzem la funció cost del dipòsit.
$f'(x) = 8\pi x - \dfrac{400}{x^2}$.
$f'(x) = 0$, $8\pi x - \dfrac{400}{x^2} = 0$. Resolent l'equació:
$x = \sqrt[3]{\dfrac{50}{\pi}} \approx 2.52m$.
$f''(x) = 8\pi + \dfrac{800}{x^3}$.
$f''\left(\sqrt[3]{\dfrac{50}{\pi}}\right) > 0$, aleshores, $x = \sqrt[3]{\dfrac{50}{\pi}} \approx 2.52m$ és un mínim relatiu estricte.
El cost mínim és $f\left(\sqrt[3]{\dfrac{50}{\pi}}\right) = 4\pi \cdot \sqrt[3]{\dfrac{2500}{\pi^2}} + \dfrac{400}{\sqrt[3]{\dfrac{50}{\pi}}} \approx 238.53€$.