Problemes d'optimització

Problema 1
Determineu un nombre positiu tal que la suma d'ell amb 25 vegades el seu invers siga mínima. Quina és la suma mínima.

Problema 2
Determineu dos nombres reals positius saben que la seua suma és 10 i el producte dels seus quadrats és màxim.

Problema 3
De tots els rectangles de perímetre 12m, determineu les dimensions del que tinga mínima diagonal. Calculeu la mesura de la mínima diagonal.

Problema 4
De tots els rectangles d'àrea 100dm^2, determineu les dimensions del que tinga mínima diagonal. Calculeu la mesura de la mínima diagonal.

Problema 5
D'entre tots els rectangles que tenen un dels vèrtexs en l'origen de coordenades, l'oposat en la corba $y=\dfrac{2x^2}{x^2-1}$, $x>1$, un dels seus costats sobre l'eix positiu d'abscisses i l'altre sobre l'eix positiu d'ordenades, determineu el que té àrea mínima.

Problema 6
Es vol construir una caixa oberta (sense tapa) de xapa amb base quadrada i amb 32 litres de capacitat.
Determineu les dimensions de la caixa que té menor quantitat de xapa.

Problema 7
D'un terreny es desitja vendre un solar rectangular de 12800m^2 dividir-lo en tres parcel·les iguals com les que apareixen al dibuix.
Si volem posar una tanca al llindar de les tres parcel·les (vores i separacions de les parcel·les), determineu les dimensions del solar a fi que la longitud de la tanca siga mínima.

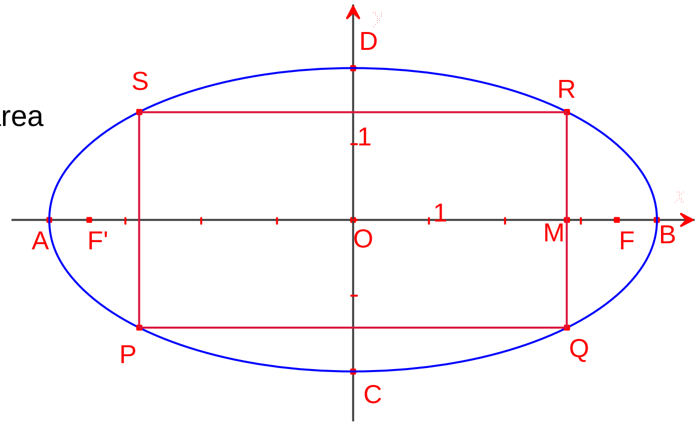
Problema 8
S'ha de fabricar dues xapes quadrades amb distints materials cadascuna. El preu de cadascun dels materials és de 2 i 3 euros per centímetre quadrat, respectivament.
Per altra banda la suma dels perímetres dels dos quadrats ha de ser 1 metre.
Com hem d'escollir els costats dels quadrats si volem que el cost siga mínim.

Problema 9
De tots els triangles la base dels quals i l'altura sumen 20cm, determineu el que té àrea màxima.

Problema 10
En el primer quadrant representem un rectangle de tal manera que té un vèrtex en l'origen de coordenades i el vèrtexs oposat en la paràbola $y=-x^2+3$.
Determineu les dimensions del rectangle a fi que l'àrea siga màxima.

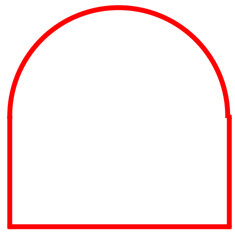
Problema 11
De totes les rectes que passen pel punt P(1,2), esbrineu la que determina amb els eixos de coordenades i en el primer quadrant un triangle d'àrea mínima i el valor de l'àrea màxima.

Problema 12
Determineu les mesures del rectangle d'àrea màxima inscrit en l'el·lipse $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$.
Calculeu l'àrea màxima.



Problema 13
El costat desigual d'un triangle isòsceles mesura 12 i l'altura sobre el costat desigual 5. Determineu el punt d'aquesta altura tal que la suma de les distàncies als tres vèrtexs siga mínima. Calculeu la suma de les distàncies mínima.

Problema 14
Determineu les dimensions d'una porta formada per un rectangle i un semicercle (veure figura) sabent que és la menys perímetre entre les que tenen àrea igual a $2m^2$.



Problema 15
Quines dimensions ha de tenir un cilindre d'un litre de capacitat perquè la superfície total siga mínima. Calculeu la superfície mínima

Problema 16
La base d'un triangle isòsceles és 12cm i l'altura 8cm.
Determineu les dimensions del rectangle d'àrea màxima inscrit en el triangle (un dels costats del rectangle pertany a la base del triangle isòsceles).

Problema 17
Determineu les mesures del trapezi isòsceles d'àrea mínima circumscrit a una circumferència de radi 1m.

Problema 18
De tots els cons rectes de generatriu 9 cm quin és el de major volum.

Problema 19
Tallem un cordell de longitud 10m en dues parts en el primer tros construïm un hexàgon regular i en el segon un triangle equilàter.
Per on hem de tallar a fi que la suma de les àrees siga mínima? Quina mínima de les àrees?.

Problema 20
Un espill de dimensions $40dm \times 45dm$ es trenca per un cantó, formant un triangle rectangle de catets 5dm i 6dm (corresponents a les dimensions menor i major de l'espill) i un pentàgon.
Determineu l'àrea major de l'espill en forma de rectangle que es pot fer en el tros major.

Problema 21
Una finestra rectangular acaba formant un triangle equilàter a la part superior.
Si el perímetre de la finestra és 3m, determineu les dimensions de la finestra a fi que l'àrea siga màxima.

Problema 22
Donada una circumferència de radi 10cm, determineu un rectangle d'àrea màxima tal que una base siga tangent a la circumferència i el costat oposat corda de la circumferència.

Problema 23
Els costats laterals i una de les bases d'un trapezi són iguals a 10m. Determineu l'altre costat del que té àrea màxima.

Problema 24
La suma de dos nombres positius és e.
Determineu-los a fi que la suma dels logaritmes neperians dels dos nombres siga màxima.
Calculeu la suma màxima.

Problema 25
Expresseu el nombre 60 com suma de tres nombres positius de forma que el segon siga el doble que el primer i el seu producte siga màxim. Determineu el valor del producte màxim.

Problema 26
Determineu el punt de la paràbola $y = 27 - x^2$, situat en el primer quadrant, tal que el triangle determinat per la tangent a la paràbola en aquest punt i els eixos coordenats tinga àrea mínima. Obteniu el punt i el valor de l'àrea).

Problema 27
De tots els rectangles inscrits en una semicircumferència de radi 10cm determineu el de major perímetre. (Un costat del rectangle està en el diàmetre). Determineu les seues mesures i l'àrea màxima.

Problema 28
En un con de revolució d'altura 30cm i radi 10cm s'ha inscrit un altre con de revolució amb el vèrtex invertit a l'anterior. Determineu les dimensions del con de volum màxim. Determineu el volum màxim.

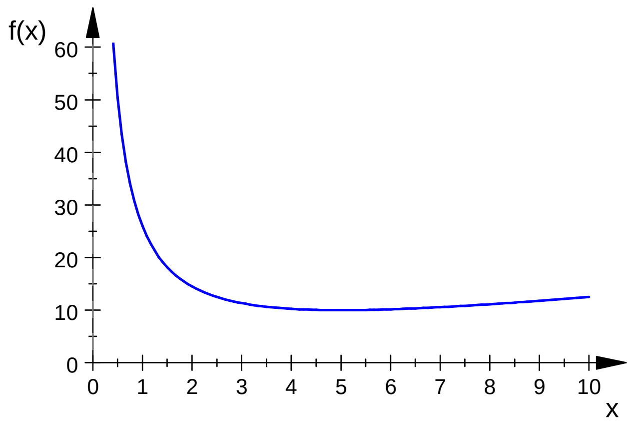
Problema 29
De tots els triangles de costat $a = 10\text{cm}$ i perímetre $p = 40\text{cm}$ determineu el de major àrea. Calculeu l'àrea màxima.

Problema 30
Donat el quadrat ABCD de costat 6 determineu la distància del vèrtex B al punt P de la recta AB tal que la relació $\dfrac{\overline{PC}}{\overline{PD}}$ siga mínima.

Problema 1
Determineu un nombre positiu tal que la suma d'ell amb 25 vegades el seu invers siga mínima. Quina és la suma mínima.

Solució:
Siga $x>0$ el nombre real que cerquem.
La funció a optimitzar és:
$f(x)=x+\frac{25}{x}, \quad x>0$.
$f'(x)=1-\frac{25}{x^2}$.
$f'(x)=0, \quad 1-\frac{25}{x^2}=0$.
Resolent l'equació:
$x=5$.
$f''(x)=\frac{50}{x^3}, \quad f''(5)>0$, aleshores, $x=5$ és un mínim relatiu estricte.

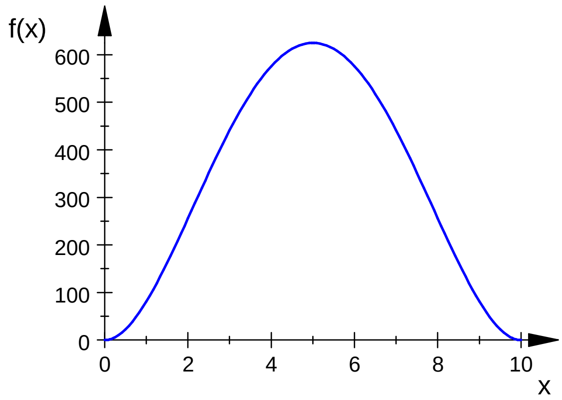
El nombre que cerquen és $x=5$ i la suma mínima és $f(5)=5+\frac{25}{5}=10$.



Problema 2
Determineu dos nombres reals positius saben que la seua suma és 10 i el producte dels seus quadrats és màxim.

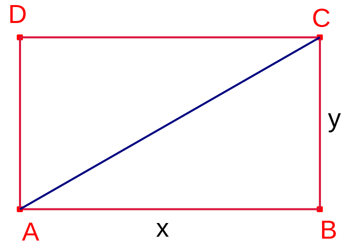
Solució:
Siguen $x > 0, y > 0$ els nombres que cerquem.
$x + y = 10$.
$y = 10 - x$.
La funció a optimtizar és:
$f(x, y) = x^2y^2$.
$f(x) = x^2(10 - x)^2$, $x \in \left]0, 10\right[$.
$f(x) = x^4 - 20x^3 + 100x^2$.
$f'(x) = 4x^3 - 60x^2 + 200x$
$f'(x) = 0$, $4x^3 - 60x^2 + 200x = 0$.
Resolent l'equació: $x = 0, 5, 10$. Notem que $x = 0, 10$ no pertanyen al domini.
$f''(x) = 12x^2 - 120x + 200$. $f''(5) = -100 < 0$, aleshores, $x = 5$ és un màxim relatiu estricte.

Els nombres que cerquem són $x = y = 5$.

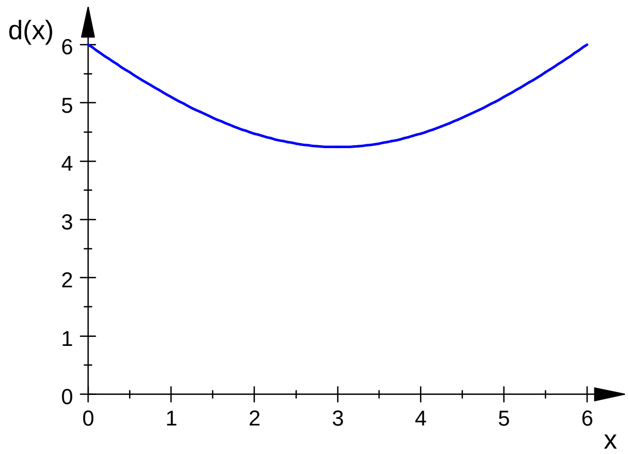


Problema 3
De tots els rectangles de perímetre 12m, determineu les dimensions del que tinga mínima diagonal. Calculeu la mesura de la mínima diagonal.

Solució:
Siga ABCD el rectangle de costats $\overline{AB} = x$, $\overline{BC} = y$.
El perímetre del rectangle és 12m. Aleshores:
$2x + 2y = 12$.
$y = 6 - x$.



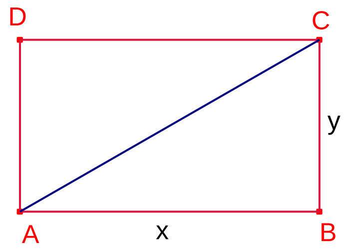
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, la diagonal del rectangle ABCD mesura:
$\overline{AC} = \sqrt{x^2 + y^2}$.
La funció a optimitzar és:
$d(x) = \sqrt{x^2 + (6-x)^2}$, $x \in \left]0, 6\right[$.
$$d'(x) = \frac{2x^2 - 6x}{\sqrt{2x^2 - 12x + 36}}.$$
$d'(x) = 0$, $2x^2 - 6x = 0$. Resolent l'equació:
$x = 3m$.
Estudiant la monotonia de la funció d(x):
La funció d(x) és estrictament decreixent en $\left]0, 3\right[$ i estrictament creixent en $\left]3, 6\right[$, aleshores, $x = 3m$ és un mínim relatiu estricte de la funció.



El mínim de la diagonal s'assoleix quan els costats del rectangle són $x = 3m$, $y = 6 - 3 = 3m$, és a dir quan ABCD és un quadrat, i la diagonal mínima és:
$d(3) = 3\sqrt{2} \approx 4'2426m$.

Problema 4

De tots els rectangles d'àrea 100dm^2, determineu les dimensions del que tinga mínima diagonal. Calculeu la mesura de la mínima diagonal.



Solució:

Siga ABCD el rectangle de costats $\overline{AB} = x$, $\overline{BC} = y$.

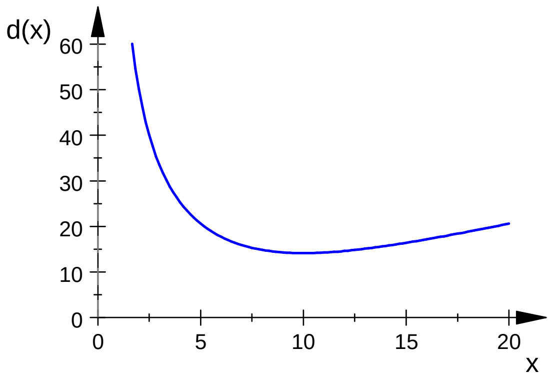
L'àrea del rectangle és 100dm^2. Aleshores:

$xy = 100$.

$$y = \frac{100}{x}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, la diagonal del rectangle ABCD mesura:

$\overline{AC} = \sqrt{x^2 + y^2}$.



La funció a optimitzar és:

$$d(x) = \sqrt{x^2 + \left(\frac{100}{x}\right)^2}, \quad x > 0.$$

$$d'(x) = \frac{x^4 - 10000}{x\sqrt{x^4 + 10000}}.$$

$d'(x) = 0$, $x^4 - 10000 = 0$. Resolent l'equació:

$x = 10\text{dm}$.

Estudiant la monotonia de la funció d(x):

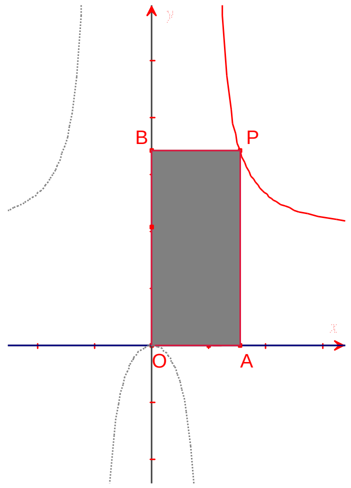
La funció d(x) és estrictament decreixent en $]0, 10[$ i estrictament creixent en $]10, +\infty[$, aleshores, $x = 10\text{dm}$ és un mínim relatiu estricte de la funció.

El mínim de la diagonal s'assoleix quan els costats del rectangle són $x = 10\text{dm}$,

$y = \frac{100}{10} = 10\text{dm}$, és a dir quan ABCD és un quadrat, i la diagonal mínima és:

$d(10) = 10\sqrt{2} \approx 14'142\text{dm}$.

Problema 5
D'entre tots els rectangles que tenen un dels vèrtexs en l'origen de coordenades, l'oposat en la corba $y=\frac{2x^2}{x^2-1}$, $x>1$, un dels seus costats sobre l'eix positiu d'abscisses i l'altre sobre l'eix positiu d'ordenades, determineu el que té àrea mínima.



Solució:

Determinem la funció $y=\frac{2x^2}{x^2-1}$.

És contínua i derivable en $]1,+\infty[$.
Definida positiva.
Decreixent en $]1,+\infty[$.

Siga P un punt sobre la corba tal que $x>1$.

Les seues coordenades són $P\left(x,\frac{2x^2}{x^2-1}\right)$.

L'àrea de del rectangle OAPB és:

$S(x)=x\frac{2x^2}{x^2-1}$, $x>1$.

$S(x)=\frac{2x^3}{x^2-1}$, $x>1$.

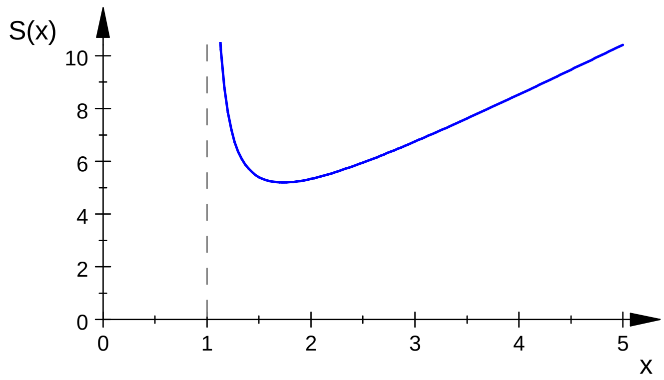
$S'(x)=\frac{2x^2(x^2-3)}{\left(x^2-1\right)^2}$

$S'(x)=0$, $x^2-3=0$. Resolent l'equació:

$x=\sqrt{3}$.

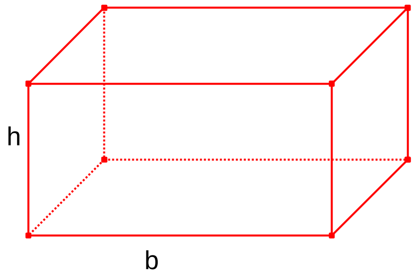
Estudiant la monotonia de la funció S(x):
La funció és estrictament decreixent en $\left]1,\sqrt{3}\right[$, i és estrictament creixent en $\left]\sqrt{3},+\infty\right[$, aleshores, $x=\sqrt{3}$ és un mínim relatiu estricte.

El rectangle d'àrea mínima s'assoleix en el vèrtex $P\left(\sqrt{3},3\right)$ i l'àrea mínima del rectangle OAPQ és $S\left(\sqrt{3}\right)=3\sqrt{3}$.



Problema 6
Es vol construir una caixa oberta (sense tapa) de xapa amb base quadrada i amb 32 litres de capacitat.
Determineu les dimensions de la caixa que té menor quantitat de xapa.

Solució:
$1\text{litre} \equiv 1\text{dm}^3$.
Siga b l'aresta de la base.
Siga h l'altura de la caixa.
El volum de la caixa és:



$b^2h = 32$.

$h = \dfrac{32}{b^2}$.

La funció a optimitzar és la superfície del ortoedre sense una base:

$S(h,b) = b^2 + 4bh$.

$S(b) = b^2 + 4b\dfrac{32}{b^2}$, $b > 0$.

$S(b) = b^2 + \dfrac{128}{b}$, $b > 0$.

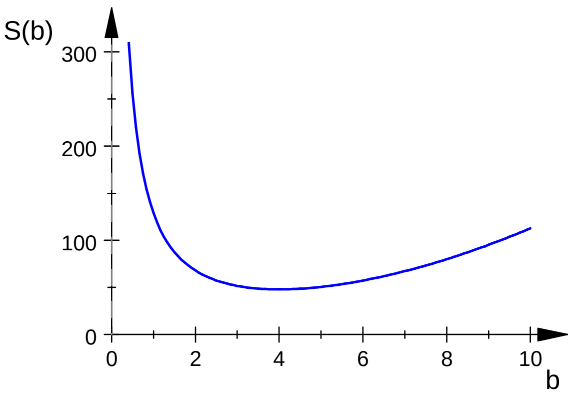
$S'(b) = 2b - \dfrac{128}{b^2}$.

$S'(b) = 0$, $2b - \dfrac{128}{b^2} = 0$.

Resolent l'equació:
$b = 4$.

$S''(b) = 2 + \dfrac{256}{b^3}$, $S''(2) = 6 > 0$. Aleshores, $b = 4$ és un mínim relatiu estricte.

La caixa de superfície mínima té aresta de la base $b = 4\text{dm}$ i altura $h = 2\text{dm}$ i la superfície mínima és $S(4) = 48\text{dm}^2$.



Problema 7

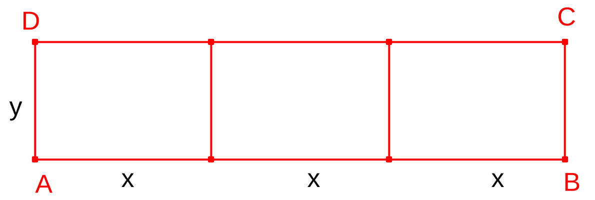
D'un terreny es desitja vendre un solar rectangular de 12800m^2 dividir-lo en tres parcel·les iguals com les que apareixen al dibuix.

Si volem posar una tanca al llindar de les tres parcel·les (vores i separacions de les parcel·les), determineu les dimensions del solar a fi que la longitud de la tanca siga mínima.

Solució:

Siga ABCD el rectangle de la parcel·la.

Siga $\overline{AB} = 3x$, $\overline{AD} = y$.



L'àrea de la parcel·la és:

$3xy = 12800$.

$y = \frac{12800}{3}$.

La funció a optimitzar és:

$f(x, y) = 6x + 4y$.

$f(x) = 6x + \frac{51200}{3x}$, $x > 0$.

$f'(x) = 6 - \frac{51200}{3x^2}$.

$f'(x) = 0$, $18x^2 - 51200 = 0$

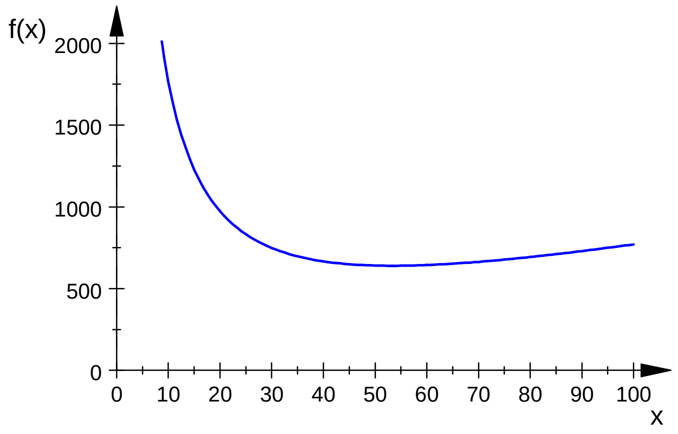
Resolent l'equació:

$x = \frac{160}{3}$.

$f''(x) = \frac{102400}{3x^3}$, $f''\left(\frac{160}{3}\right) > 0$, aleshores, $x = \frac{160}{3}$ és un mínim relatiu estricte.

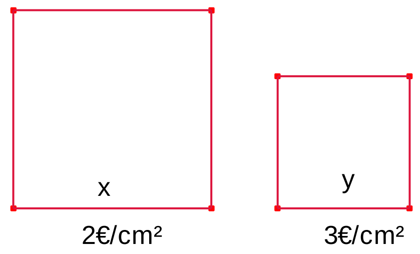
La parcel·la de tanca mínima té dimensions $\overline{AB} = 3\frac{160}{3} = 160\text{m}$, $y = 80\text{m}$.

La longitud de la tanca és: $f\left(\frac{160}{3}\right) = 640\text{m}$

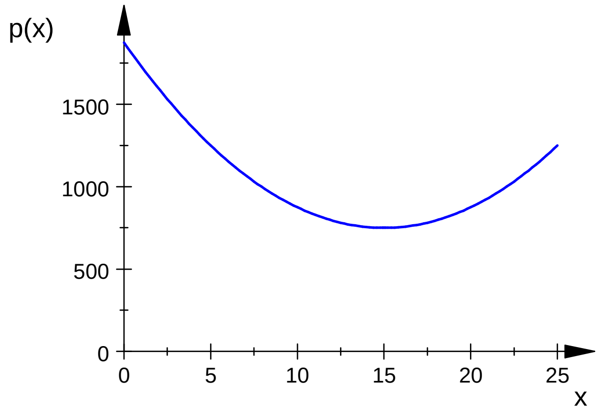


Problema 8
S'ha de fabricar dues xapes quadrades amb distints materials cadascuna. El preu de cadascun dels materials és de 2 i 3 euros per centímetre quadrat, respectivament.
Per altra banda la suma dels perímetres dels dos quadrats ha de ser 1 metre.
Com hem d'escollir els costats dels quadrats si volem que el cost siga mínim.

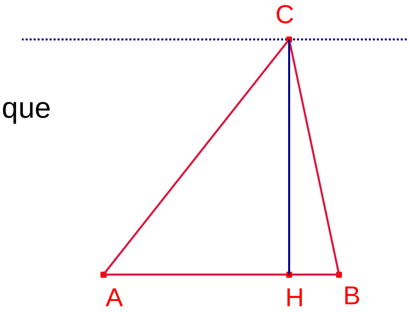
Solució:
Siga x el costat en cm del quadrat de material a $2€/cm^2$.
Siga y el costat en cm del quadrat de material a $3€/cm^2$.
El perímetre dels dos quadrats suma 1m, aleshores:



$4x+4y=100cm$.
$y=25-x$.
La funció cost a optimitzar és:
$p(x,y)=2x^2+3y^2$.
$p(x)=2x^2+3(25-x)^2$, $x\in\left]0,25\right[$.
$p(x)=5x^2-150x+1875$, $x>0$.
La funció és una paràbola còncava, el mínim s'assoleix en el vèrtex.
El vèrtex és $x=\dfrac{150}{2\cdot 5}=15cm$.
El mínim cost s'assoleix quan el costat del quadrat de material a $2€/cm^2$ és 15cm i el costat del quadrat de material a $3€/cm^2$ és 10cm. El cost mínim és $p(4)=750€$.



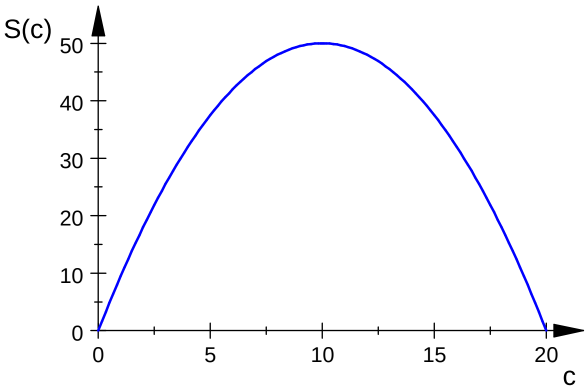
Problema 9
De tots els triangles la base dels quals i l'altura sumen 20cm, determineu el que té àrea màxima.



Solució:

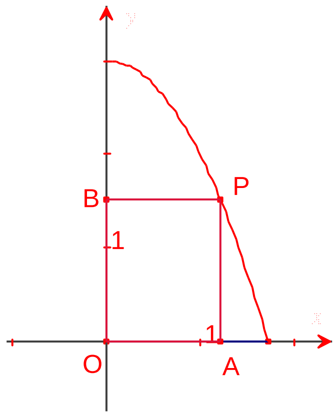
Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ de base $c=\overline{AB}$ i altura $h=\overline{CH}$ tal que $c+h=20$.
$h=20-c$
La funció àrea a optimtizar és:
$S(c,h)=\frac{1}{2}ch$.
$S(c)=\frac{1}{2}c(20-c)$, $c\in\left]0,20\right[$.
$S(c)=\frac{1}{2}(-c^2+20c)$.
La funció és una paràbola convexa. El màxim s'assoleix en el vèrtex.
El vèrtex de la paràbola és: $c=\frac{-20}{2(-1)}=10cm$.

L'àrea màxima s'assoleix quan la base és 10cm i l'altura és 10cm. L'àrea màxima és:
$S(10)=50cm^2$



Problema 10
En el primer quadrant representem un rectangle de tal manera que té un vèrtex en l'origen de coordenades i el vèrtexs oposat en la paràbola $y=-x^2+3$.
Determineu les dimensions del rectangle a fi que l'àrea siga màxima.

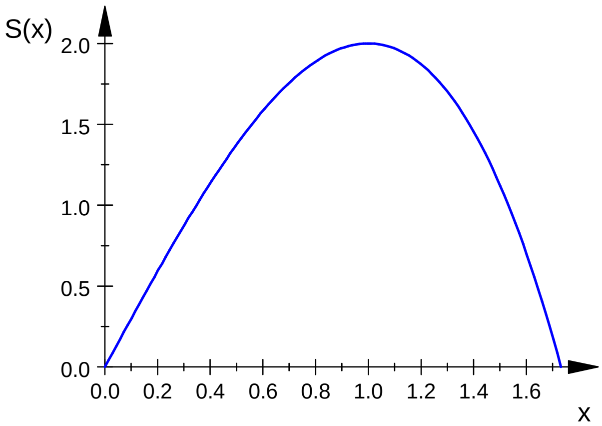
Solució:



Determinem la funció $y=-x^2+3$.
És contínua i derivable en $\left]0,\sqrt{3}\right[$.
Definida positiva i decreixent en $\left]0,\sqrt{3}\right[$.

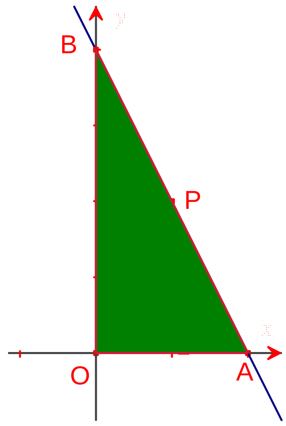
Siga P un punt sobre la corba tal que $x\in\left]0,\sqrt{3}\right[$.
Les seues coordenades són $P\left(x,3-x^2\right)$.
L'àrea de del rectangle OAPB és:
$S(x)=x\left(3-x^2\right)$,. $x\in\left]0,\sqrt{3}\right[$
$S(x)=-x^3+3x$, $x\in\left]0,\sqrt{3}\right[$.
$S'(x)=-3x^2+3$
$S'(x)=0$, $3x^2-3=0$. Resolent l'equació:
$x=1$.
$S''(x)=-6x$, $S''(1)=-6<0$, aleshores, $x=1$ és un màxim relatiu estricte.

El rectangle d'àrea màxima s'assoleix en el vèrtex $P(1,2)$ i l'àrea mínima del rectangle OAPQ és $S(1)=2$.



Problema 11
De totes les rectes que passen pel punt P(1,2), esbrineu la que determina amb els eixos de coordenades i en el primer quadrant un triangle d'àrea mínima i el valor de l'àrea màxima.

Solució:
Siga O(0, 0) l'origen de coordenades.
Les rectes que passen pel punt P i tallen els eixos de coordenades formant un triangle tenen per equació:
$y-2=m(x-1)$, $m<0$.
Calculem els punts de tall amb els eixos coordenades.
Si $y=0$, aleshores, $-2=m(x-1)$. Resolent l'equació:
$x=\frac{-2}{m}+1$.



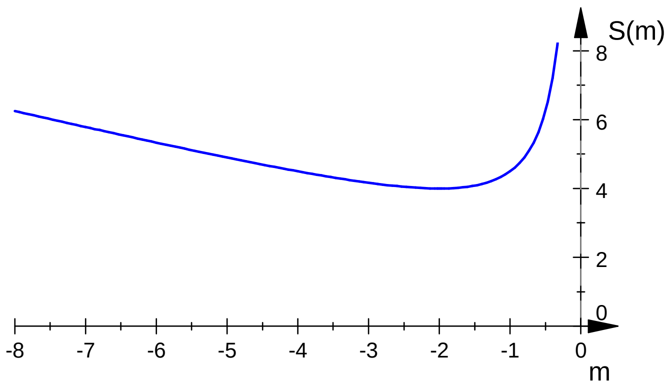
El punt de tall amb l'eix d'abscisses és $A\left(\frac{m-2}{m},0\right)$.
Si $x=0$, $y-2=-m$. Resolent l'equació:
$y=2-m$.
El punt de tall amb l'eix d'ordenades és $B(0,2-m)$.
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{OAB}$ és:

$$S_{OAB}=\frac{1}{2}\overline{OA}\cdot\overline{OB}=\frac{1}{2}\frac{m-2}{m}(2-m).$$

La funció àrea a optimitzar és:

$$S(m)=\frac{1}{2}\frac{-m^2+4m-4}{m},\quad m<0.$$

$$S'(m)=\frac{1}{2}\frac{-m^2+4}{m^2}.$$



$S'(m)=0$, $-m^2+4=0$. Resolent l'equació:
$m=-2$.

$$S''(m)=\frac{-4}{m^3}.$$

$S''(-2)=\frac{1}{2}>0$. Aleshores, $m=-2$ és un mínim relatiu estricte.

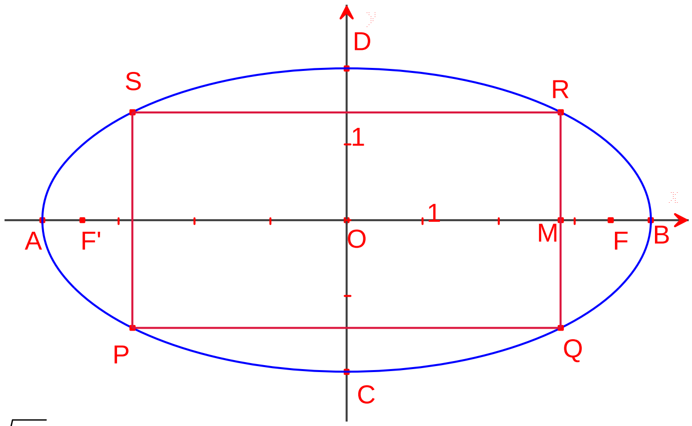
L'àrea mínima és: $S(2)=\frac{1}{2}\frac{-2^2+4\cdot(-2)-4}{-2}=4$.

La recta que fa mínima l'àrea és: $y-2=-2(x-1)$.

Problema 12

Determineu les mesures del rectangle d'àrea màxima inscrit en l'el·lipse $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$.

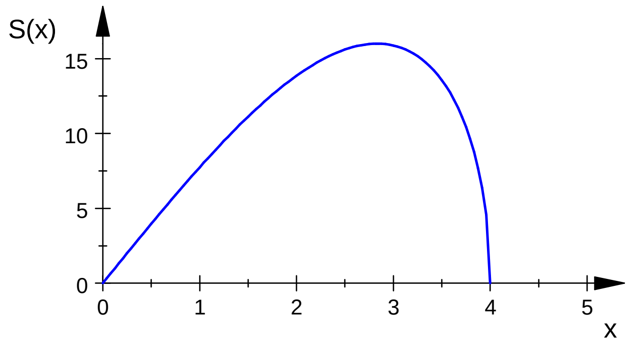
Calculeu l'àrea màxima.



Solució:

Siga l'el·lipse de semieix major $a=\frac{\overline{AB}}{2}=\sqrt{16}=4$ i semieix menor $b=\frac{\overline{CD}}{2}=\sqrt{4}=2$.

Siga M el punt mig del costat $\overline{QR}$ del rectangle PQRS inscrit en l'el·lipse.
Siga $x=\overline{OM}$.



$\overline{MR}=\sqrt{4-\frac{x^2}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{16-x^2}$.

$\overline{PQ}=2\overline{OM}=2x$, $\overline{QR}=2\overline{MR}=\sqrt{16-x^2}$.

La funció àrea a optimitzar és:

$S(x)=2x\sqrt{16-x^2}$, $x\in[0,4]$.

$S'(x)=2\frac{-4x^3+32x}{2\sqrt{-x^4+32x^2}}$.

$S'(x)=0$, $-4x^3+32x=0$. Resolent l'equació:

$x=0$, $x=2\sqrt{2}$.

Estudiant la monotonia de la funció S(x):

La funció és estrictament creixent en $]0,2\sqrt{2}[$ i estrictament decreixent en $]2\sqrt{2},4[$,

aleshores, $x=2\sqrt{2}\approx 2'83$ és un màxim relatiu estricte.

L'àrea màxima del rectangle inscrit en la paràbola és:

$S(2\sqrt{2})=2\cdot 2\sqrt{2}\sqrt{16-8}=16u^2$.

Les mesures del quadrat àrea màxima són:

$\overline{PQ}=2x=4\sqrt{2}$, $\overline{QR}=2\sqrt{16-x^2}=2\sqrt{8}$ i l'àrea màxima és $S(2\sqrt{2})=16u^2$.

Generalització:

Determineu les mesures del rectangle d'àrea màxima inscrit en l'el·lipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

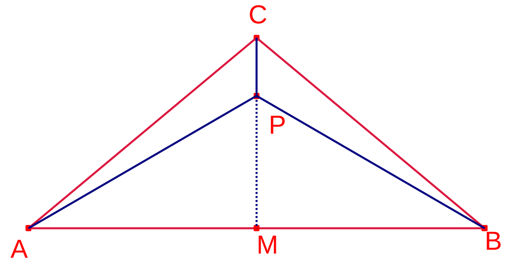
Calculeu l'àrea màxima.

Solució:

$\overline{PQ}=a\sqrt{2}$, $\overline{QR}=b\sqrt{2}$ i l'àrea màxima és $S_M=2ab$.

Problema 13
El costat desigual d'un triangle isòsceles mesura 12 i l'altura sobre el costat desigual 5. Determineu el punt d'aquesta altura tal que la suma de les distàncies als tres vèrtexs siga mínima. Calculeu la suma de les distàncies mínima.

Solució:



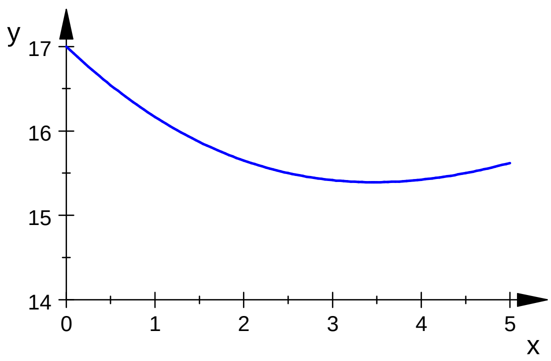
Siga el triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overline{AB}=12$, $\overline{AC}=\overline{BC}$.
Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$. $\overline{CM}=5$.
$\overline{AM}=\overline{BM}=6$.
Siga P un punt en l'altura.
Siga $\overline{PM}=x$.
$\overline{CP}=5-x$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMP}$:
$\overline{AP}=\overline{BP}=\sqrt{x^2+6^2}$.
La funció a optimitzar és la suma de les distàncies, $\overline{AP}+\overline{BP}+\overline{CP}$:
$f(x)=2\sqrt{x^2+36}+5-x$, $x\in[0,5]$

$$f'(x)=2\frac{x}{\sqrt{x^2+36}}-1.$$

$$f'(x)=0,\ 2\frac{x}{\sqrt{x^2+36}}-1=0.$$

$2x=\sqrt{x^2+36}$. Resolent l'equació:
$x=2\sqrt{3}\approx 3'46$.

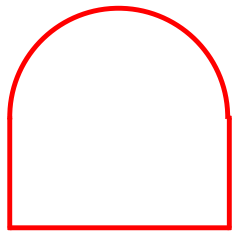


Estudiant la monotonia de la funció f(x) en $x\in[0,5]$:
La funció és estrictament decreixent en $\left]0,2\sqrt{3}\right[$ i estrictament creixent en $\left]2\sqrt{3},5\right[$, aleshores, $x=2\sqrt{3}$ és un mínim relatiu estricte.
La suma de les distàncies mínima és:
$f\left(2\sqrt{3}\right)=8\sqrt{3}+5-2\sqrt{3}=6\sqrt{3}+5$.

Notem que $\angle APM=60^o$, aleshores, $\angle APB=120^o$, per tant, $\angle APC=\angle BPC=120^o$.
Aquesta propietat s'acompleix en qualsevol triangle.
El punt P s'anomena punt de Fermat del triangle.

Problema 14

Determineu les dimensions d'una porta formada per un rectangle i un semicercle (veure figura) sabent que és la menys perímetre entre les que tenen àrea igual a $2m^2$.

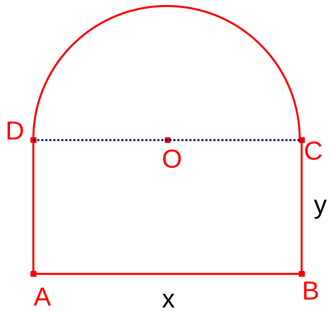


Solució:

Siga $x=\overline{AB}$ base del rectangle de la finestra.

Siga $y=\overline{BC}$ altura del rectangle que forma la finestra.

L'àrea de la finestra és $2m^2$ suma de l'àrea del rectangle de costats x, i del semicercle de radi $\frac{x}{2}$:



$$xy+\frac{1}{2}\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2=2.$$

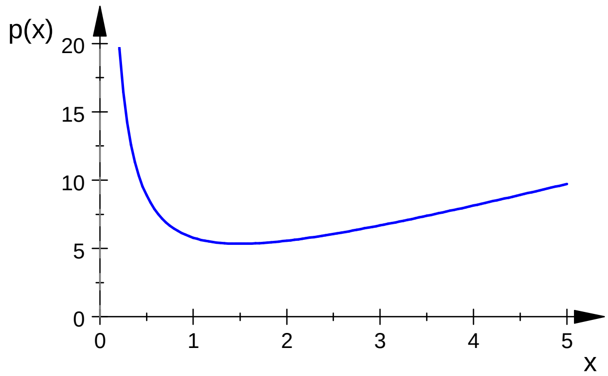
Aïllant la incògnita y:

$$y=\frac{16-\pi x^2}{8x} \qquad (1)$$

El perímetre de la finestra és:

$$p(x,y)=x+2y+\pi\frac{x}{2} \qquad (2)$$

Substituint l'expressió (1) en l'expressió (2):



$$p(x)=x+\frac{16-\pi x^2}{4x}+\pi\frac{x}{2}.$$

$$p(x)=\frac{(4+\pi)x^2+16}{4x}, \quad x>0$$

$$p'(x)=\frac{(4+\pi)x^2-16}{4x^2}.$$

$p'(x)=0$, $(4+\pi)x^2-16=0$.

Resolent l'equació:

$$x=\frac{4}{\sqrt{4+\pi}}\approx 1'4968m.$$

$p''(x)=\frac{8}{x^3}$, $p''\left(\frac{4}{\sqrt{4+\pi}}\right)>0$. Aleshores, $x=\frac{4}{\sqrt{4+\pi}}\approx 1'4968m$. $y=\frac{2}{\sqrt{4+\pi}}\approx 0'7484m$.

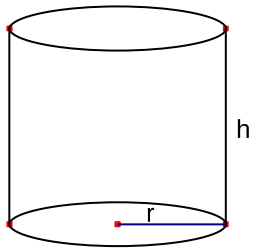
La finestra de perímetre mínim i àrea $2m^2$ s'assoleix quan la base del rectangle és $x=\frac{4}{\sqrt{4+\pi}}$ i l'altura $y=\frac{2}{\sqrt{4+\pi}}$.

Notem que la base és el doble de l'altura.

Problema 15

Quines dimensions ha de tenir un cilindre d'un litre de capacitat perquè la superfície total siga mínima. Calculeu la superfície mínima

Solució:



$1\text{litre} \equiv 1000\text{cm}^3$.

Siga r el radi del cilindre i h l'altura.

El volum del cilindre és:

$V = \pi r^2 \cdot h$.

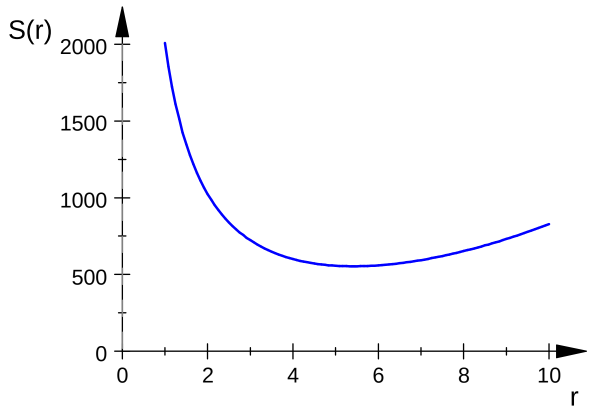
$\pi r^2 h = 1000$.

$$h = \frac{1000}{\pi r^2} \qquad (1)$$

La superfície del cilindre està formada per dos cercles de radi r i un rectangle de base $2\pi r$ i altura h. Aleshores l'àrea total del cilindre és:

$$S(r,h) = 2(\pi r^2) + 2\pi rh \qquad (2)$$

Substituint l'expressió (1) en l'expressió (2), la funció a optimitzar és:



$S(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \dfrac{1000}{\pi r^2}$, $r > 0$.

$S(r) = 2\pi r^2 + \dfrac{2000}{r}$, $r > 0$.

$S'(r) = 4\pi r - \dfrac{2000}{r^2}$.

$S'(r) = 0$, $4\pi r^3 - 2000 = 0$. Resolent l'equació:

$r = \sqrt[3]{\dfrac{500}{\pi}} \approx 5'42\text{cm}$.

$S''(r) = 4\pi + \dfrac{4000}{r^3}$

$S''\left(\sqrt[3]{\dfrac{500}{\pi}}\right) > 0$, aleshores, $r = \sqrt[3]{\dfrac{500}{\pi}} \approx 5'42\text{cm}$ és un mínim relatiu estricte.

Les dimensions del cilindre de superfície mínima són:

$$r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} = 5 \cdot \sqrt[3]{\frac{4}{\pi}} \approx 5'42\text{cm},\ h = \frac{1000}{\pi \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{500}{\pi}\right)^2}} = 20\frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}} \approx 10'84\text{cm}.$$

La superfície mínima és:

$$S\left(\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}\right) = 2\pi \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{500}{\pi}\right)^2} + \frac{2000}{\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}} = 300 \cdot \sqrt[3]{2\pi} \approx 535'58\text{cm}^2.$$

Notem que $\dfrac{r}{h} = \dfrac{1}{2}$.

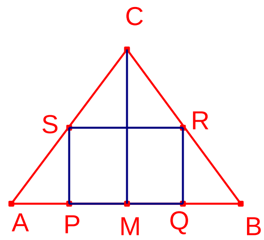
Problema 16
La base d'un triangle isòsceles és 12cm i l'altura 8cm.
Determineu les dimensions del rectangle d'àrea màxima inscrit en el triangle (un dels costats del rectangle pertany a la base del triangle isòsceles).

Solució:

Siga el triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overline{AC} = \overline{BC}$, $\overline{AB} = 12$.

Siga l'altura $\overline{CM} = 8$ del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

Siga PQRS un rectangle inscrit en el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ tal que $\overline{PQ} = x$, pertany a la base $\overline{AB}$.



Siga $\overline{PS} = y$.
L'àrea del rectangle PQRS és:
$S(x, y) = xy$.

$\overline{AM} = \frac{\overline{AB}}{2} = 6$, $\overline{PM} = \frac{\overline{PQ}}{2} = \frac{x}{2}$.

$\overline{AP} = \overline{AM} - \overline{PM} = 6 - \frac{x}{2}$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AMC}$, $\overset{\Delta}{APS}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

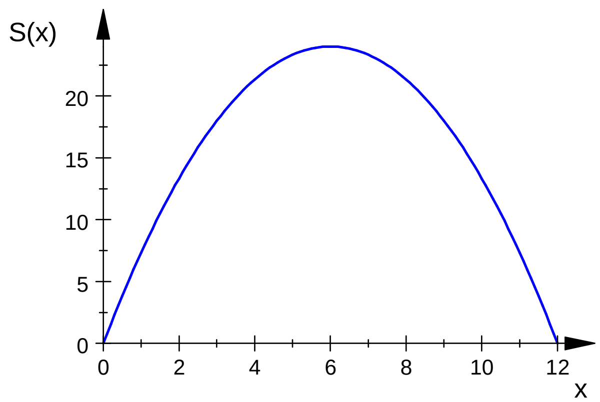
$\frac{\overline{CM}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{PS}}{\overline{AP}}$.

$\frac{8}{6} = \frac{y}{6 - \frac{x}{2}}$. Aïllant y: $y = 8 - \frac{2}{3}x$.

L'àrea del rectangle PQRS és:

$S(x) = x\left(8 - \frac{2}{3}x\right)$, $0 < x < 12$.

$S(x) = -\frac{2}{3}x^2 + 8x$, $0 < x < 12$.



Aquesta funció és una paràbola convexa el màxim s'assoleix en el vèrtex de la paràbola:

$x = \frac{-8}{2\left(\frac{-2}{3}\right)} = 6$.

La màxima àrea del rectangle s'assoleix quan $\overline{PQ} = x = 6cm$, $\overline{PS} = y = 8 - \frac{2}{3}6 = 4cm$.

L'àrea màxima és: $S(6) = 24cm^2$.

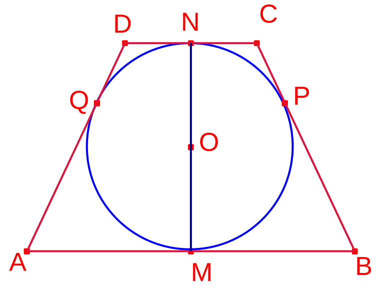
Generalització:

La base d'un triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overline{AC} = \overline{BC}$, és c i l'altura h.
Determineu les dimensions del rectangle d'àrea màxima inscrit en el triangle (un dels costats del rectangle pertany a la base del triangle isòsceles).

Solució: L'àrea màxima del rectangle inscrit PQRS s'assoleix quan els costats són $\overline{PQ} = \frac{c}{2}$, $\overline{PS} = \frac{h}{2}$ i l'àrea màxima és $S = \frac{1}{4}ch$.

Problema 17
Determineu les mesures del trapezi isòsceles d'àrea mínima circumscrit a una circumferència de radi 1m.

Solució:
Siga el trapezi ABCD circumscrit a la circumferència de radi 1.
Siguen M, N, P, Q els punts de tangència.



Siga $a=\overline{BM}=\overline{BP}=\overline{AM}=\overline{AQ}$.
Siga $b=\overline{DN}=\overline{DQ}=\overline{CN}=\overline{CP}$.
$\overline{MN}=2$.
L'àrea del trapezi és:

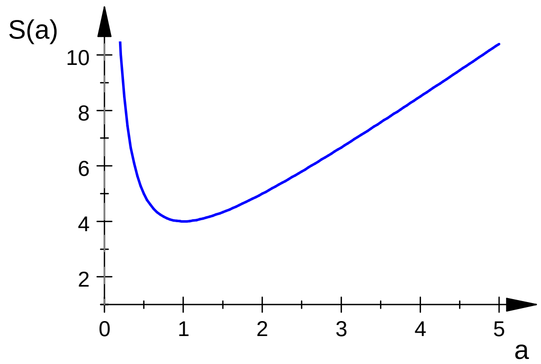
$$S(a.b)=\frac{\overline{AB}+\overline{CD}}{2}\overline{MN}.$$

$$S(a,b)=\frac{2a+2b}{2}2=2(a+b).$$

Siga E la projecció de C sobre el costat $\overline{AB}$.
$\overline{CE}=2$, $\overline{EB}=a-b$, $\overline{BC}=a+b$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{EBC}$:
$(a+b)^2=(a-b)^2+2^2$. Simplificant:

$ab=1$, aleshores, $b=\dfrac{1}{a}$.



Substituint en l'expressió de l'àrea:

$$S(a)=2\left(a+\frac{1}{a}\right),\quad a>0.$$

$$S(a)=2\left(\frac{a^2+1}{a}\right).$$

Calculant la derivada:

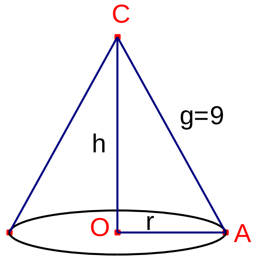
$$S'(a)=2\left(\frac{a^2-1}{a^2}\right).$$

$S'(a)=0$, $a^2-1=0$. Resolent l'equació:
$a=1$.

$S''(a)=\dfrac{4}{a^3}$, $S''(1)=4>0$, aleshores, $a=1$ és un mínim relatiu estricte.

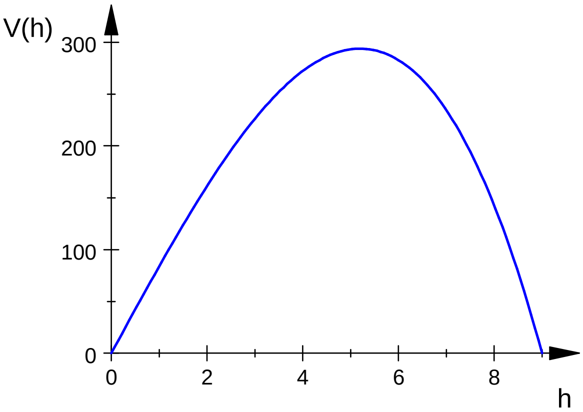
Per tant, la mínima àrea del trapezi isòsceles circumscrit al cercle de radi 1m s'assoleix quan $\overline{AB}=2m$, $\overline{CD}=2m$, és a dir quan ABCD és un quadrat de costat 2m.
L'àrea mínima és $S(2)=4m^2$.

Problema 18
De tots els cons rectes de generatriu 9 cm quin és el de major volum.



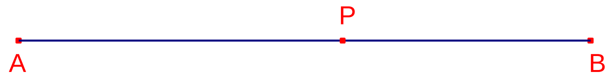
Solució:
Siga el con de radi $r = \overline{OA}$, altura $h = \overline{OC}$ i generatriu $g = 9$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AOC}$:
$h^2 + r^2 = 9^2$. Aleshores:
$r^2 = 81 - h^2$ (1)
El volum del con és:
$V(r,h) = \frac{\pi}{3} r^2 h$ (2)
Substituint l'expressió (1) en l'expressió (2), el volum del con és:
$V(h) = \frac{\pi}{3}\left(81 - h^2\right)h$, $h \in \left]0,9\right[$.

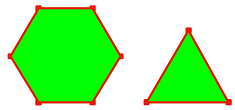


$V'(h) = \frac{\pi}{3}\left(-3h^2 + 81\right)$.
$V'(h) = 0$, $-3h^2 + 81 = 0$. Resolent l'equació:
$h = 3\sqrt{3} \approx 5'20cm$.
$V''(h) = \frac{\pi}{3}(-6h)$, $V''\left(3\sqrt{3}\right) = < 0$, aleshores,
$h = 3\sqrt{3} \approx 5'20cm$ és un màxim relatiu estricte.
Per tant, les dimensions del con de volum màxim i generatriu 9cm són: l'altura $h = 3\sqrt{3} \approx 5'20cm$ i el radi, $r = \sqrt{81 - \left(3\sqrt{3}\right)^2} = 3\sqrt{6} \approx 7'35cm$.
El volum màxim és: $V\left(3\sqrt{3}\right) = 54\pi\sqrt{3} \approx 293'84cm^3$.

Problema 19
Tallem un cordell de longitud 10m en dues parts en el primer tros construïm un hexàgon regular i en el segon un triangle equilàter.
Per on hem de tallar a fi que la suma de les àrees siga mínima? Quina mínima de les àrees?.



Solució:
Siga el cordell $\overline{AB}=10$.
Siga P el punt on de tallar a fi de construir en $\overline{AP}=x$ un hexàgon regular i amb $\overline{PB}=10-x$ un triangle equilàter.



El costat de l'hexàgon regular mesura $\frac{x}{6}$.

L'àrea de l'hexàgon regular és igual a l'àrea de 6 triangles equilàters de costat $\frac{x}{6}$.

$$S_6=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{x}{6}\right)^2=\frac{\sqrt{3}}{24}x^2.$$

El costat del triangle equilàter és $\frac{10-x}{3}$

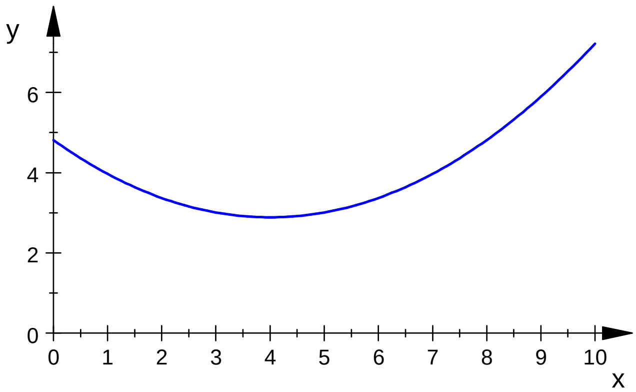
L'àrea del triangle equilàter de costat $\frac{10-x}{3}$ és:

$$S_6=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{10-x}{3}\right)^2=\frac{\sqrt{3}}{36}\left(x^2-20x+100\right).$$

La suma de les àrees a optimitzar és:

$$S(x)=\frac{\sqrt{3}}{24}x^2+\frac{\sqrt{3}}{36}\left(x^2-20x+100\right).$$

$$S(x)=\frac{\sqrt{3}}{72}\left(5x^2-40x+200\right),\ x\in\left]0,10\right[.$$



La funció és una paràbola còncava, el mínim s'assoleix en el vèrtex.

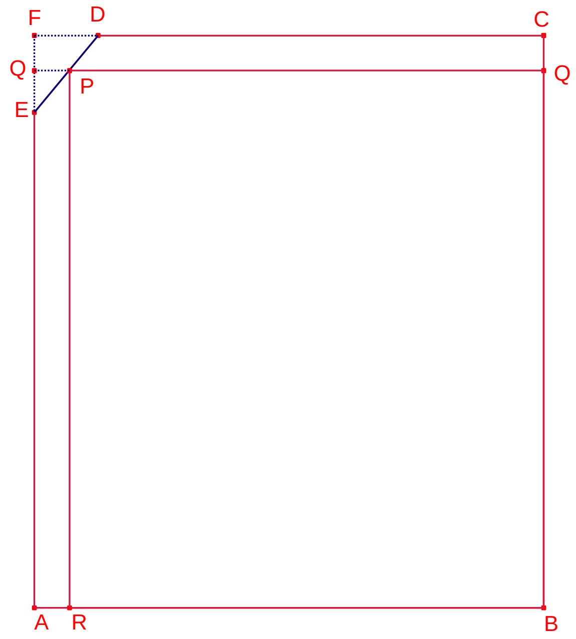
El vèrtex és $x=\frac{40}{2\cdot 5}=4m$.

Amb els 4m construirem l'hexàgon regular i amb els 6m el triangle equilàter l'àrea mínima és $S(4)=\frac{5\sqrt{3}}{3}\approx 2'89m^2$.

Generalització:
Tallem un cordell de longitud L en dues parts en el primer tros construïm un hexàgon regular i en el segon un triangle equilàter.
Per on hem de tallar a fi que la suma de les àrees siga mínima? Quina mínima de les àrees?.

Solució
Amb $\frac{2}{5}L$ construirem l'hexàgon regular amb la resta el triangle equilàter. L'àrea mínima és: $S\left(\frac{2}{5}L\right)=\frac{\sqrt{3}}{60}L^2$.

Problema 20
Un espill de dimensions $40dm \times 45dm$ es trenca per un cantó, formant un triangle rectangle de catets 5dm i 6dm (corresponents a les dimensions menor i major de l'espill) i un pentàgon.
Determineu l'àrea major de l'espill en forma de rectangle que es pot fer en el tros major.



Solució:
Siga ABCDE el pentàgon gran que ha quedat després de trencar-se.
$\overline{AB} = 40$, $\overline{BC} = 45$.
Siga PQBR el rectangle que podem formar.
Siga $\overline{RB} = x$, $\overline{PR} = y$ costats del rectangle.
Siga Q la projecció de P sobre AE.
Siga F la projecció de C sobre AE.
$\overline{FD} = 5$, $\overline{FE} = 6$.
$\overline{PQ} = 40 - x$, $\overline{QE} = 6 - (45 - y)$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{EDF}$, $\overset{\Delta}{EPQ}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{40 - x}{6 - (45 - y)} = \frac{5}{6}.$$

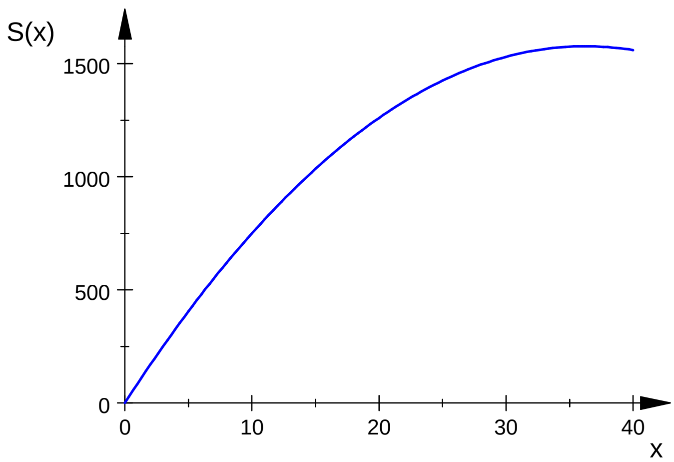
$$y = \frac{435 - 6x}{5}.$$

L'àrea del rectangle PQBR és:

$$S(x, y) = xy.$$

$$S(x) = x\frac{435 - 6x}{5}, \quad x \in \left]0, 40\right[.$$

$$S(x) = \frac{3}{5}\left(-2x^2 + 145\right).$$



La funció és una paràbola convexa, el màxim s'assoleix en el vèrtex.
El vèrtex és

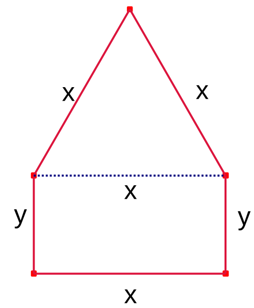
$$x = \frac{-.145}{2 \cdot (-2)} = \frac{145}{4} = 36'35dm.$$

L'espill rectangular de major àrea te costats $x = \frac{145}{4} = 36'35dm$,

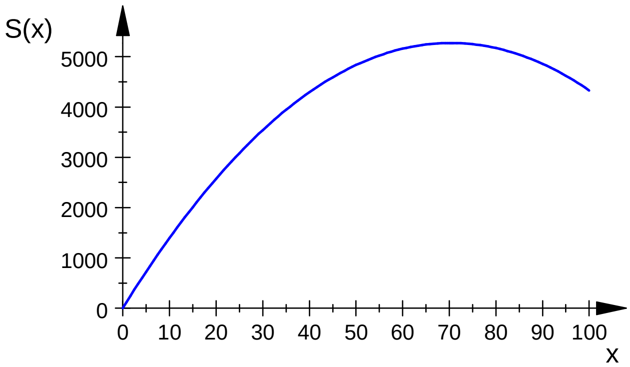
$y = \frac{87}{2} = 43'5dm$ i l'àrea màxima és:

$$S\left(\frac{145}{4}\right) = \frac{12615}{8} = 1576'875dm^2 = 15'76875m^2.$$

Problema 21
Una finestra rectangular acaba formant un triangle equilàter a la part superior.
Si el perímetre de la finestra és 3m, determineu les dimensions de la finestra a fi que l'àrea siga màxima.



Solució:
Siga x (en cm) la base del rectangle.
Els costats del triangle equilàter mesuren x.
Siga y (en cm) l'altura del rectangle.
El perímetre és 20 aleshores:
$3x+2y=300cm$.
$y=\dfrac{300-3x}{2}$.
L'àrea a optimtizar és la suma de les àrees del rectangle i del triangle equilàter.
L'àrea del rectangle és $S_4=xy$.
L'àrea del triangle equilàter és: $S_3=\dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2$.
L'àrea de la finestra és:
$S(x,y)=xy+\dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2$.
$S(x)=x\dfrac{300-3x}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2$, $x\in\left]0,100\right[$.
$S(x)=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}-\dfrac{3}{2}\right)x^2+150x$. $x\in\left]0,100\right[$.



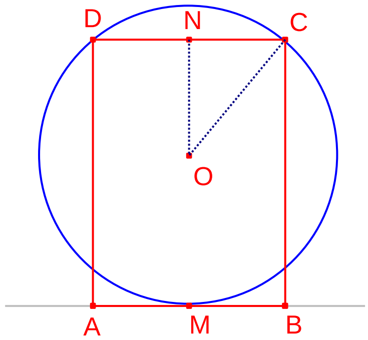
La funció és una paràbola convexa ja que
$\dfrac{\sqrt{3}}{4}-\dfrac{3}{2}<0$.
El màxim de la funció s'assoleix en el vèrtex.
El vèrtex és $x=\dfrac{-150}{2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}-\dfrac{3}{2}\right)}=\dfrac{300}{6-\sqrt{3}}\approx 70'29cm$.

Les dimensions de la finestra d'àrea màxima són $x=\dfrac{300}{6-\sqrt{3}}\approx 70'29cm$,
$y=\dfrac{150\left(5-\sqrt{3}\right)}{11}\approx 44'56cm$ i l'àrea màxima és: $S\left(\dfrac{300}{6-\sqrt{3}}\right)\approx 5271.85cm^2$

Generalització:
Una finestra rectangular acaba formant un triangle equilàter a la part superior.
Si el perímetre de la finestra és p, determineu les dimensions de la finestra a fi que l'àrea siga màxima.

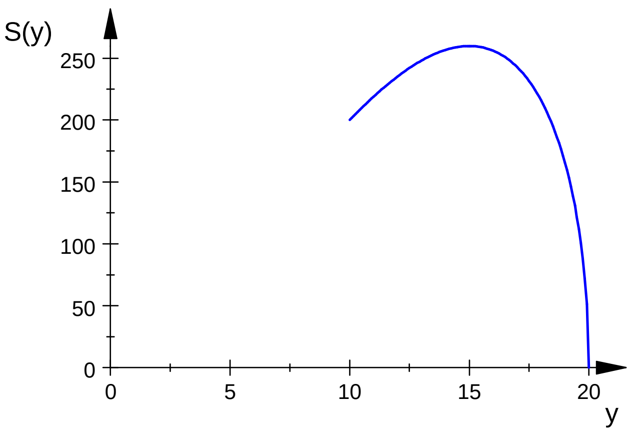
Solució:
Siga x (en cm) la base del rectangle, y (en cm) l'altura del rectangle.
El valor que fa màxim l'àrea de la finestra és $x=\dfrac{6+\sqrt{3}}{33}p$, $y=\dfrac{5-\sqrt{3}}{22}p$.

Problema 22
Donada una circumferència de radi 10cm, determineu un rectangle d'àrea màxima tal que una base siga tangent a la circumferència i el costat oposat corda de la circumferència.



Solució:
Siga la circumferència de centre O i radi 10cm
Siga ABCD el rectangle tal que $\overline{AB} = x$ és tangent a la circumferència i $\overline{CD}$ és una corda de la circumferència.
Siga $\overline{AD} = y$.
La funció àrea a optimitzar és:
$S(x, y) = xy$.
Siga N el punt mig del costat $\overline{CD}$.
$\overline{OC} = 10$, $\overline{CN} = \frac{x}{2}$, $\overline{ON} = y - 10$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OCN}$:
$10^2 = (y-10)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2$. Simplificant:
$x^2 = 80y - 4y^2$.
$x = \sqrt{80y - 4y^2}$.
La funció àrea a optimitzar és:
$S(y) = y\sqrt{80y - 4y^2}$, $y \in \left]10, 20\right[$.
$S'(y) = \frac{4y^2(15 - y)}{\sqrt{80y - 4y^2}}$.
$S'(y) = 0$, $y = 15$.

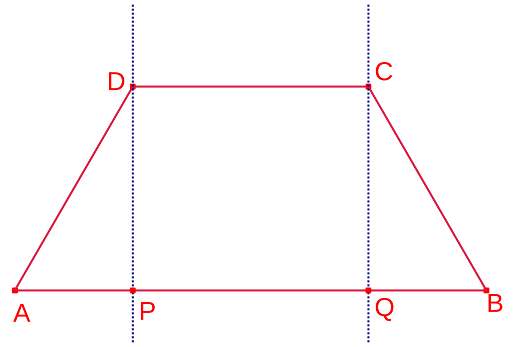


Estudiant la monotonia de la funció $S(y)$.
La funció és estrictament creixent en $\left]10, 15\right[$ i és estrictament decreixent en $\left]15, 20\right[$.
Aleshores $y = 15cm$ és un màxim relatiu estricte.
Les mesures del rectangle d'àrea màxima s'assoleix quan la base és $x = 10\sqrt{3} \approx 17'321cm$ i l'altura $y = 15cm$. L'àrea màxima és:
$S(15) = 150\sqrt{3} \approx 259'81cm^2$.

Generalització:
Donada una circumferència de radi r, determineu un rectangle d'àrea màxima tal que una base siga tangent a la circumferència i el costat oposat corda de la circumferència.

Solució:
La solució de l'àrea màxima del rectangle s'assoleix quan la base és $x = r\sqrt{3}$ i l'altura és $y = \frac{3}{2}r$ i l'àrea màxima és, $S\left(\frac{3}{2}r\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}r^2$.

Problema 23
Els costats laterals i una de les bases d'un trapezi són iguals a 10m. Determineu l'altre costat del que té àrea màxima.



Solució 1:
El trapezi ABCD ($\overline{AB}$, $\overline{CD}$ paral·lels) és isòsceles
$\overline{AD}=\overline{CD}=\overline{BD}=10$.
Siga $\alpha=\angle DAB=\angle ABC$ angle de les bases del trapezi.
Siguen P, Q les projecció de D i C sobre AB.
$\overline{AP}=\overline{BQ}=10\cos\alpha$. $\overline{DP}=10\sin\alpha$.
La base $\overline{AB}$ del trapezi mesura:
$\overline{AB}=\overline{CD}+2\cdot\overline{AP}=10+20\cos\alpha$.
L'àrea del trapezi a optimitzar és:

$$S(\alpha)=\frac{20+20\cos\alpha}{2}10\sin\alpha\ ,\ \alpha\in\left]0,\frac{2\pi}{3}\right[.$$

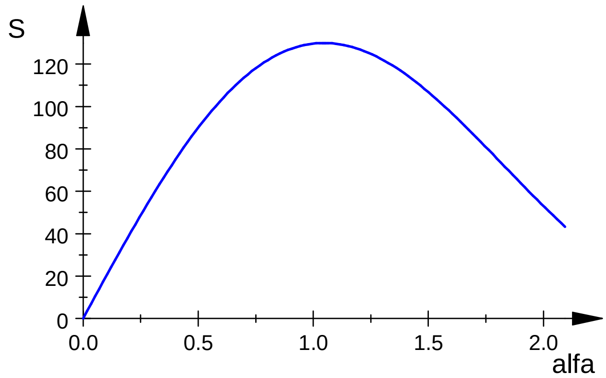
$$S(\alpha)=100(\sin\alpha+\sin\alpha\cdot\cos\alpha),\quad \alpha\in\left]0,\frac{2\pi}{3}\right[.$$

$$S'(\alpha)=100\left(2\cos^2\alpha+\cos\alpha-1\right).$$

$S'(\alpha)=0$, $2\cos^2+\cos\alpha-1=0$. Resolent l'equació:

$\cos\alpha=\frac{1}{2}$, aleshores, $\alpha=\frac{\pi}{3}$.

$S''(\alpha)=100(-4\cos\alpha\sin\alpha-\sin\alpha)$. $S''\left(\frac{\pi}{3}\right)<0$,



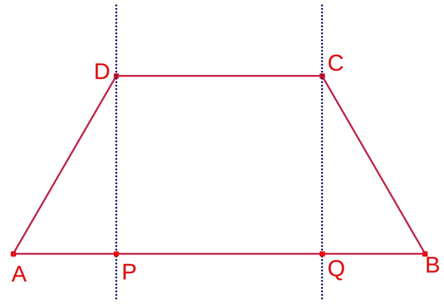
aleshores, $\alpha=\frac{\pi}{3}\cong 1'0472$ és un màxim relatiu estricte.

El costat que fa l'àrea màxima s'assoleix quan $\alpha=\frac{\pi}{3}$, $\overline{AB}=10+20\cos\frac{\pi}{3}=20\text{m}$.

L'àrea màxima del trapezi és $S\left(\frac{\pi}{3}\right)=100\left(\sin\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{3}\right)=75\sqrt{3}\approx 129'90\text{m}^2$.

Solució 2:
El trapezi ABCD ($\overline{AB}$, $\overline{CD}$ paral·lels) és isòsceles $\overline{AD}=\overline{CD}=\overline{BD}=a$.
Siguen P, Q les projecció de D i C sobre AB.
Siga $\overline{AB}=x$, $\overline{DP}=h$, $\overline{AP}=\frac{x-a}{2}$.
La funció àrea a optimitzar és:

$$S(x,h)=\frac{a+x}{2}h .$$



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{APD}$:

$$\left(\frac{x-a}{2}\right)^2+h^2=a^2 .\quad h=\frac{1}{2}\sqrt{-x^2+2ax+3a^2} .$$

La funció àrea a optimitzar és:

$$S(x)=\frac{a+x}{4}\sqrt{-x^2+2ax+3a^2}\ ,\quad x\in\left]0,3a\right[.$$

$S(x)=\frac{1}{4}\sqrt{-x^4+6a^2x^2+8a^3x+3a^4}$. $x\in\left]0,3a\right[$.

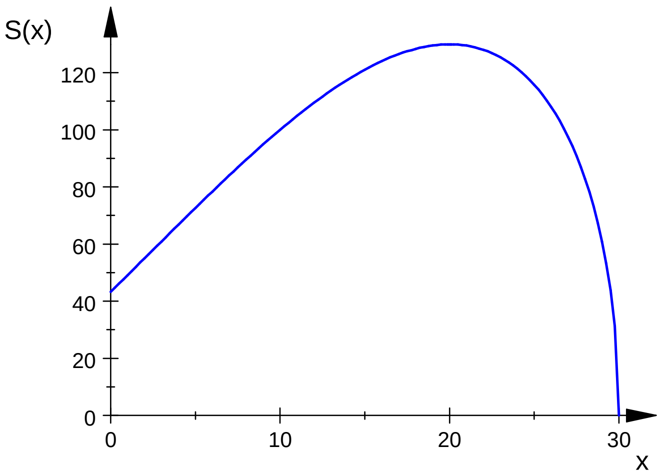
$S'(x)=\frac{-x^3+3a^2x+8a^3}{2\sqrt{-x^4+6a^2x^2+8a^3x+3a^4}}$.

$S'(x)=0$, $-x^3+12a^2x+8a^3=0$.

Resolent l'equació amb la regla de Ruffini:
$x=-a,\ 2a$.

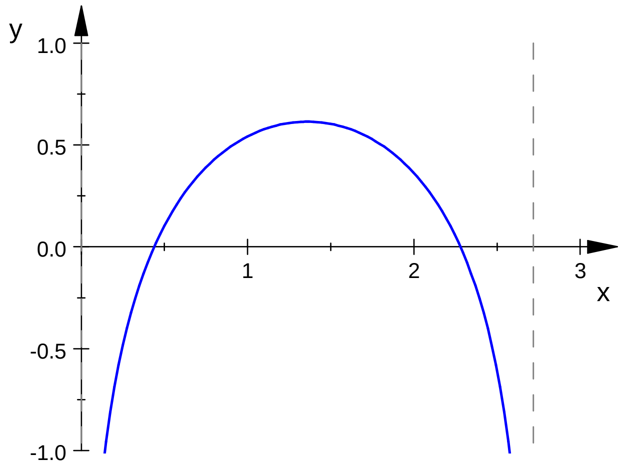
L'única solució en el domini és $x=2a$.
Estudiant la monotonia de la funció S(x):
La funció és estrictament creixent en $\left]0,2a\right[$
i estrictament decreixent en $\left]2a,3a\right[$.
Aleshores, $x=2a$ és un màxim relatiu estricte.
El costat que fa l'àrea màxima s'assoleix quan $x=2a$.
L'àrea màxima del trapezi és

$S(2a)=\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$.



Problema 24
La suma de dos nombres positius és e.
Determineu-los a fi que la suma dels logaritmes neperians dels dos nombres siga màxima.
Calculeu la suma màxima.

Solució:
Siguen $x > 0$, $y > 0$ tal que $x + y = e$.
Aleshores, $x, y \in \left]0, e\right[$.
$y = e - x$.



La funció a optimitzar és:
$f(x, y) = \ln x + \ln y = \ln(xy)$.
$f(x) = \ln\left(x(e - x)\right)$, $x \in \left]0, e\right[$.

$$f'(x) = \frac{-2x + e}{x(e - x)}.$$

$f'(x) = 0$, $-2x + e = 0$.
Resolent l'equació:
$$x = \frac{e}{2}.$$

$$f''(x) = \frac{-2x^2 + 2ex - e^2}{x^2(e - x)^2},$$

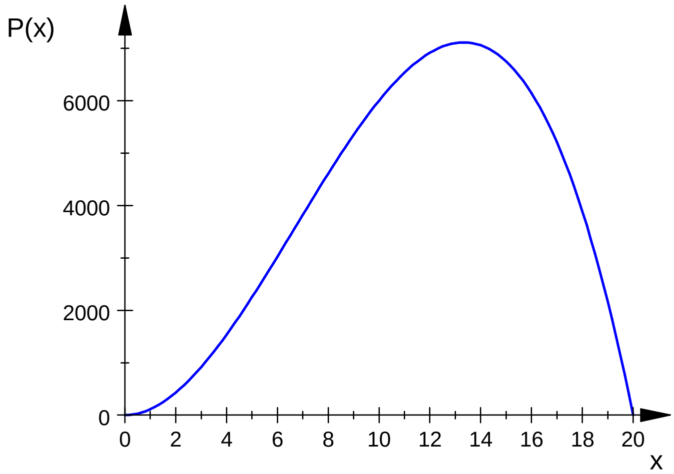
$f''\left(\frac{e}{2}\right) = \frac{-8}{e^2} < 0$. Aleshores, $x = \frac{e}{2}$ és un màxim relatiu estricte.

El màxim de la suma s'assoleix quan $x = \frac{e}{2}$ i el valor màxim de la suma és:

$$f\left(\frac{e}{2}\right) = \ln\left(\left(\frac{e}{2}\right)^2\right) \approx 0'6137.$$

Problema 25
Expresseu el nombre 60 com suma de tres nombres positius de forma que el segon siga el doble que el primer i el seu producte siga màxim. Determineu el valor del producte màxim.

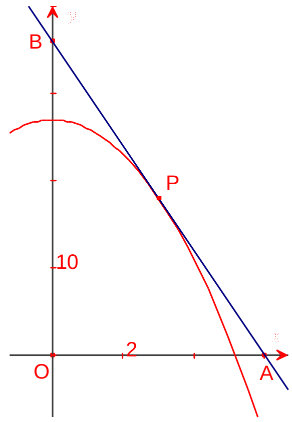
Solució:
Siguen els nombres $x>0, 2x>0, y>0$ tal que $x+2x+y=60$.
$y=60-3x$
La funció a optimtizar és:
$P(x,y)=x\cdot 2x\cdot y$.
$P(x)=2x^2(60-3x)$, $x\in\left]0,20\right[$.
$P'(x)=-18x^2+240x$.
$P'(x)=0$, $-18x^2+240x=0$.
Resolent l'equació:
$x=\dfrac{40}{3}$.
$P''(x)=-36x+240$,
$P''\left(\dfrac{40}{3}\right)=-240<0$. Aleshores, $x=\dfrac{40}{3}$ és un màxim relatiu estricte.



El màxim del producte s'assoleix quan $x=\dfrac{40}{3}$ i el producte màxim és:
$P\left(\dfrac{40}{3}\right)=\dfrac{64000}{9}$.

Problema 26

Determineu el punt de la paràbola $y = 27 - x^2$, situat en el primer quadrant, tal que el triangle determinat per la tangent a la paràbola en aquest punt i els eixos coordenats tinga àrea mínima. Obteniu el punt i el valor de l'àrea).



Solució:

Siga $P(a, 27 - a^2)$, $a > 0$ punt de la paràbola en el primer quadrant.

Determineu la recta tangent en el punt P a la paràbola.

El pendent de la recta tangent és $y'(a)$.

$y'(x) = -2x$, aleshores, $y'(a) = -2a$.

L'equació de la recta tangent a la paràbola en el punt P té equació:

$y - (27 - a^2) = -2a(x - a)$.

El punt de tall de la recta tangent en l'eix d'abscisses és:

$y = 0$, $x = \frac{27 + a^2}{2a}$, $A\left(\frac{27 + a^2}{2a}, 0\right)$

El punt de tall de la recta tangent en l'eix d'ordenades és:

$x = 0$, $y = 27 + a^2$, $B(0, 27 + a^2)$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{OAB}$ és:

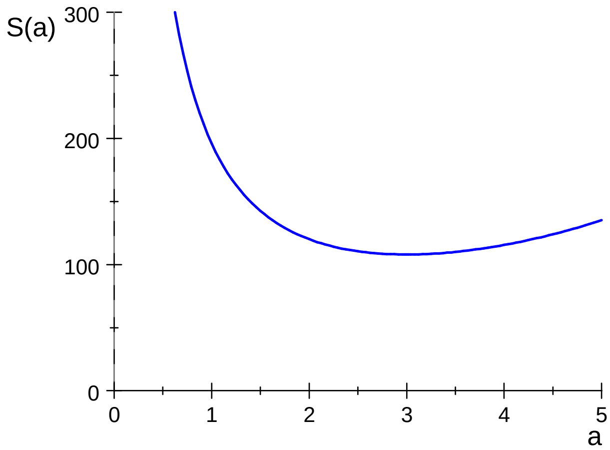
$$S_{OAB} = \frac{\overline{OA} \cdot \overline{OB}}{2} = \frac{\frac{27 + a^2}{2a}(27 + a^2)}{2}$$

La funció a optimitzar és:

$$S(a) = \frac{(27 + a^2)^2}{4a}, \quad a > 0.$$

$$S'(a) = \frac{3(a^4 + 18a^2 - 243)}{4a^2}.$$

$S'(x) = 0$, $a^4 + 18a^2 - 243 = 0$.



Resolent l'equació:

$a = 3$.

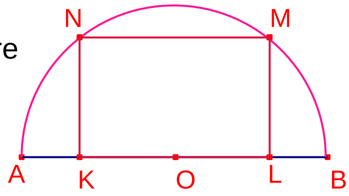
$S''(a) = \frac{3(a^4 + 243)}{2a^3}$, $S''(3) > 0$. Aleshores, $a = 3$ és un mínim relatiu estricte.

La menor àrea s'assoleix en la recta tangent que passa pel punt $P(3, 18)$ i el valor de l'àrea mínima és:

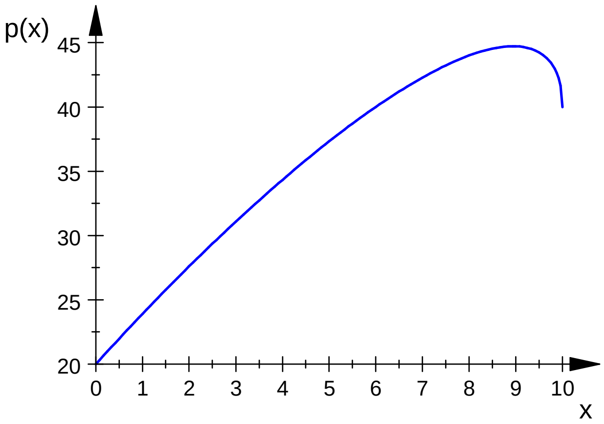
$S(3) = 108$.

Problema 27
De tots els rectangles inscrits en una semicircumferència de radi 10cm determineu el de major perímetre. (Un costat del rectangle està en el diàmetre). Determineu les seues mesures i l'àrea màxima.

Solució:
Siga KLMN el rectangle inscrit en la semicircumferència de centre O i diàmetre $\overline{AB}=20$.



Notem que el rectangle KLMN és simètric respecte de la mediatriu al diàmetre $\overline{AB}$.
Siga $\overline{KL}=2x$, $\overline{KN}=y$.
La funció perímetre a optimitzar és:
$p(x,y)=4x+2y$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OKN}$:
$x^2+y^2=10^2$.
$y=\sqrt{100-x^2}$.
La funció a optimitzar és:
$p(x)=4x+2\sqrt{100-x^2}$, $x\in \left]0,10\right[$.



$$p'(x)=4+2\frac{-x}{\sqrt{100-x^2}}.$$
$$p'(x)=0,\ 4+2\frac{-x}{\sqrt{100-x^2}}=0.$$
Resolent l'equació:
$x=4\sqrt{5}$.
$p''(x)=\dfrac{-200}{(100-x^2)\sqrt{100-x^2}}$. $p''\left(4\sqrt{5}\right)<0$. Aleshores, $x=4\sqrt{5}$ és un màxim relatiu estricte.

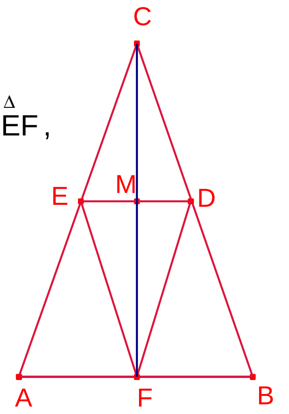
El perímetre màxim del rectangle s'assoleix quan $\overline{KL}=8\sqrt{5}\approx 17'89\text{cm}$, $\overline{KN}=2\sqrt{5}\approx 4.47\text{cm}$.
El perímetre màxim és $p\left(4\sqrt{5}\right)=20\sqrt{5}\approx 44'72\text{cm}$

Generalització:
De tots els rectangles inscrits en una semicircumferència de radi r determineu el de major perímetre. (Un costat del rectangle està en el diàmetre). Determineu les seues mesures i l'àrea màxima.

Solució:
El perímetre màxim del rectangle KLMN s'assoleix quan $\overline{KL}=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}r$, $\overline{KN}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}r$.
El perímetre màxim és $p=2r\sqrt{5}$.

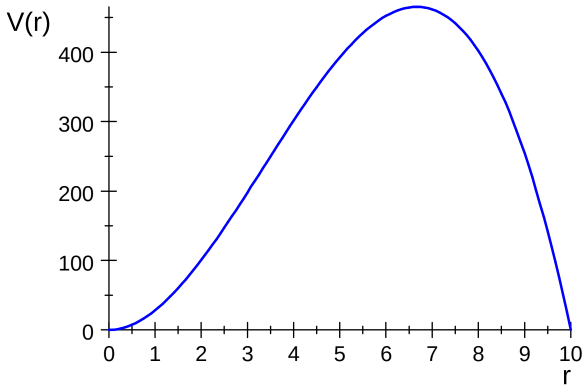
Problema 28
En un con de revolució d'altura 30cm i radi 10cm s'ha inscrit un altre con de revolució amb el vèrtex invertit a l'anterior. Determineu les dimensions del con de volum màxim. Determineu el volum màxim.

Solució:
Siga el con de diàmetre $\overline{AB} = 20$ i altura $\overline{CF} = 30$.



La secció del con que passa per A, B i C forma un triangle isòsceles $\overset{\Delta}{DEF}$, secció del con inscrit.
Siga M el punt mig del segment $\overline{DE}$.
Siga $r = \overline{DM}$ radi del con inscrit.
Siga $h = \overline{MF}$ altura del con inscrit.
La funció volum a optimitzar és:
$V(r,h) = \frac{\pi}{3} r^2 h$.

Els triangles $\overset{\Delta}{BCF}$, $\overset{\Delta}{DCM}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$\frac{30}{10} = \frac{30-h}{r}$. Aïllant r:
$h = 30 - 3r$.
La funció volum a optimitzar és:
$V(r) = \frac{\pi}{3} r^2 (30 - 3r)$, $r \in \left]0, 10\right[$.
$V'(r) = \pi\left(20r - 3r^2\right)$.
$V'(r) = 0$, $20r - 3r^2$. Resolent l'equació:
$r = \frac{20}{3}$.
$V''(r) = \pi(20 - 6r)$, $V''\left(\frac{20}{3}\right) = -20\pi < 0$.



Aleshores, $r = \frac{20}{3}$ és un màxim relatiu estricte.
Les dimensions del con de volum màxim inscrit són:
$r = \frac{20}{3} \approx 6'67\text{cm}$, $h = 10\text{cm}$. El volum màxim és:
$V\left(\frac{20}{3}\right) = \frac{\pi}{3}\left(\frac{20}{3}\right)^2 10 = \frac{4000\pi}{27} \approx 465'42\text{cm}^3$.

Generalització:
En un con de revolució d'altura H i radi R s'ha inscrit un altre con de revolució amb el vèrtex invertit a l'anterior. Determineu les dimensions del con de volum màxim. Determineu el volum màxim.

Solució:
Les dimensions del con de volum màxim inscrit són:
$r = \frac{2}{3}R$, $h = \frac{1}{3}H$. El volum màxim és: $V\left(\frac{2}{3}R\right) = \frac{4\pi}{81}R^2 H$.

Problema 29
De tots els triangles de costat $a = 10\text{cm}$ i perímetre $p = 40\text{cm}$ determineu el de major àrea. Calculeu l'àrea màxima.

Solució 1:

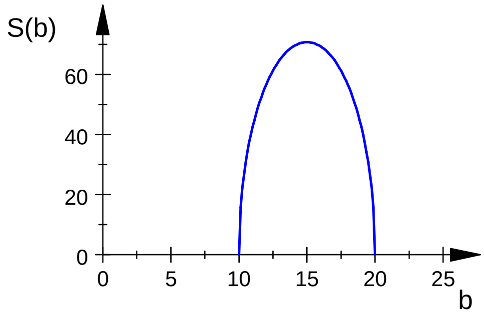
Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$. $a = 10$, $p = a + b + c = 40$.
$10 + b + c = 40$.
Aleshores, $c = 30 - b$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ aplicant la fórmula d'Heró és:

$$S = \frac{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}{4} = \frac{\sqrt{40(-10+b+c)(10-b+c)(10+b-c)}}{4}$$

La funció àrea a optimitzar és:

$$S(b) = \frac{\sqrt{40\cdot 20(40-2b)(2b-20)}}{4},\ b \in \left]10, 20\right[.$$



$$S'(b) = 5\sqrt{2}\frac{-2b+30}{\sqrt{-b^2+30b-200}}.$$

$S'(b) = 0$, $-2b + 30 = 0$. Resolent l'equació:
$b = 15$.

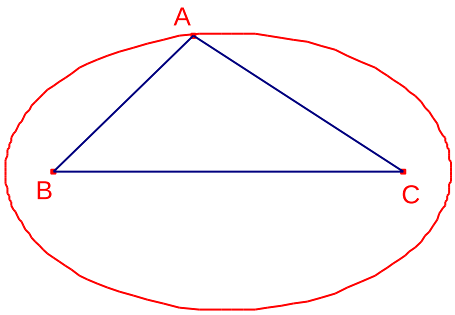
$$S''(b) = -250\sqrt{2}\frac{1}{\left(-b^2+30b-200\right)\sqrt{-b^2+30b-200}},$$

$S''(15) < 0$. Aleshores, $b = 15$ és un màxim relatiu estricte.

L'àrea màxima s'assoleix quan $b = 15\text{cm}$, $c = 15\text{cm}$, és a dir quan el triangle és isòsceles.

L'àrea màxima és: $S(15) = \dfrac{\sqrt{40\cdot 20\cdot 10\cdot 10}}{4} = 50\sqrt{2} \approx 70'71\text{cm}^2$.

Solució 2:



Si el costat $\overline{AB} = a$ és fix i el perímetre $p = a + b + c$ és fix.
$b + c = p - a$ és fix.
Aleshores, el vèrtex A del triangle recorre una el·lipse de distància focal $\overline{BC} = a$ i eix major $p - a$.
Aleshores, l'àrea màxima s'assoleix en la màxima altura que correspon als extrems de l'eix menor.
Aleshores, el triangle és isòsceles.

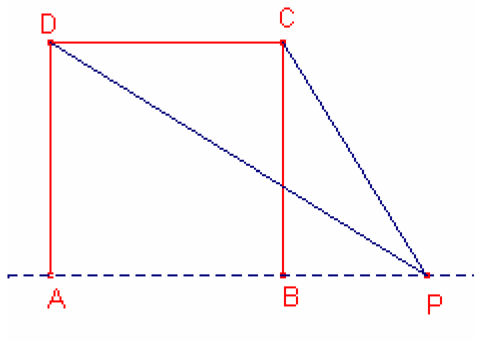
Aleshores, $b = c = \dfrac{p-a}{2}$.

L'àrea màxima utilitzant la fórmula d'Heró és:

$$S = \frac{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}{4} = \frac{\sqrt{p(p-2a)a^2}}{4}.$$

Problema 30

Donat el quadrat ABCD de costat 6 determineu la distància del vèrtex B al punt P de la recta AB tal que la relació $\frac{\overline{PC}}{\overline{PD}}$ siga mínima.



Solució:

Siga $x = \overline{BP}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BPC}$:

$\overline{PC} = \sqrt{x^2 + 36}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{APD}$:

$\overline{PD} = \sqrt{x^2 + 12x + 72}$.

$$\frac{\overline{PC}}{\overline{PD}} = \sqrt{\frac{x^2 + 36}{x^2 + 12x + 72}}.$$

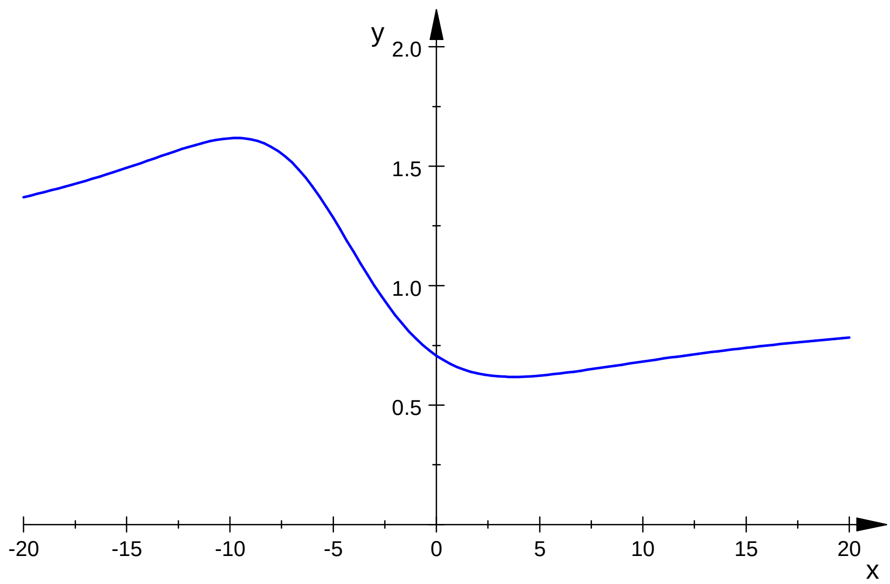
Considerem la funció $g(x) = \sqrt{\frac{x^2 + 36}{x^2 + 12x + 72}}$, el mínim d'aquesta funció és el mínim de la funció: $f(x) = \frac{x^2 + 36}{x^2 + 12x + 72}$.

$$f'(x) = \frac{12x^2 + 72x - 432}{x^2 + 12x + 72}.$$

$f'(x) = 0$ si $x = 6\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$, $x = 6\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$

$f''\left(6\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\right) > 0$, aleshores, $x = 6\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) \approx 3'71$ és un mínim.

$f''\left(6\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\right) < 0$, aleshores, $x = 6\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$ és un màxim.



$$g(x) = \sqrt{\frac{x^2 + 36}{x^2 + 12x + 72}}$$