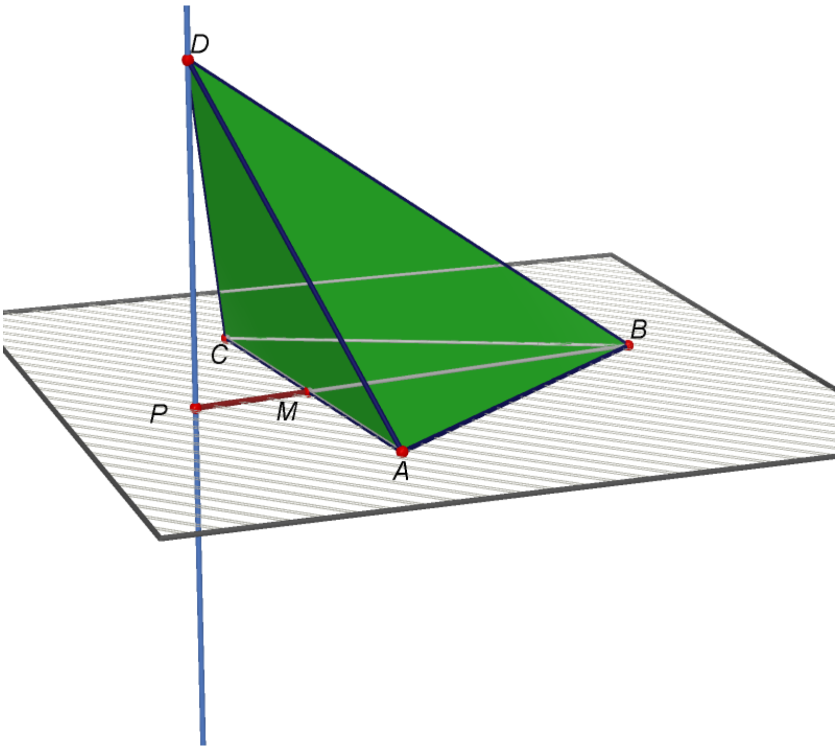
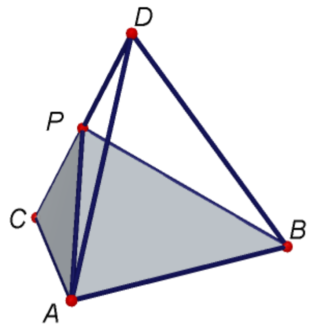
QUATRE TRIANGLES

50 problemes amb tetraedres

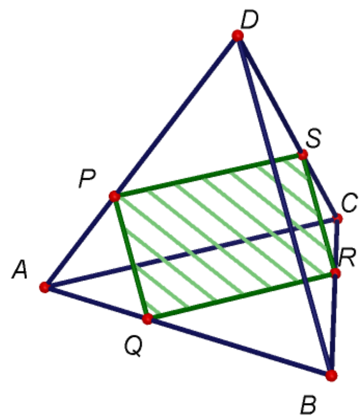


Ricard Peiró i Estruch

Problema 1
Siga el tetraedre regular ABCD.
Siga P el punt mig de l'aresta $\overline{CD}$.
Determineu la proporció entre les àrees del tetraedre ABCP i el tetraedre regular ABCD.

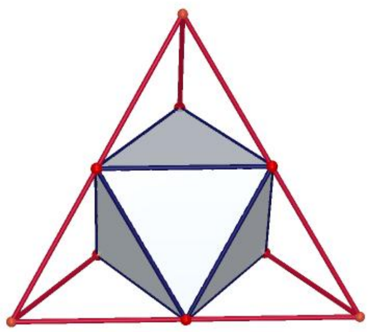


Problema 2
El perímetre de la secció paral·lela a dues arestes que es creuen d'un tetraedre regular és constant.
Calculeu el perímetre.



Problema 3
En una piràmide triangular regular l'aresta lateral és igual a tres vegades l'aresta de la base.
Calculeu l'angle diedre d'una aresta lateral.

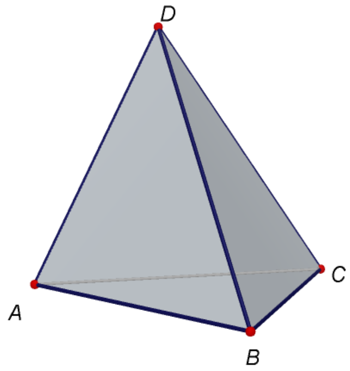
Problema 4
Proveu que els punts migs de les arestes d'un tetraedre regular són vèrtexs d'un octaedre regular.
Calculeu la proporció entre els volums de l'octaedre i el del tetraedre.



Problema 5
La base d'un tetraedre és un triangle rectangle isòsceles d'hipotenusa 8cm i l'aresta lateral sobre l'angle recte de la base és perpendicular a la base i mesura 5cm.
Calculeu l'àrea i el volum del tetraedre.

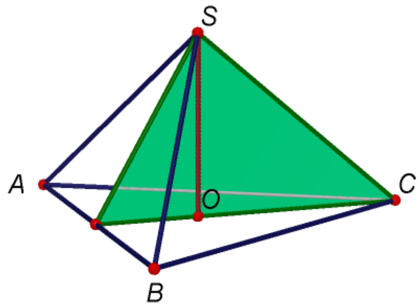
Problema 6

Un tetraedre està format per dos triangles equilàters de costat a i dos triangles rectangles isòsceles.
Calculeu l'àrea i el volum.



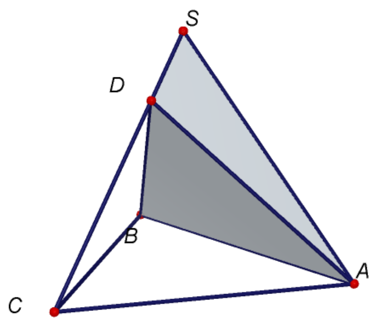
Problema 7

En la piràmide triangular regular ABCD l'àrea de la secció que passa per l'aresta lateral $\overline{SC}$ i l'altura $\overline{SO}$ és la meitat de l'àrea de la base $\overset{\Delta}{ABC}$ de la piràmide.
L'aresta lateral és igual $\sqrt{21}$. Determineu el volum de la piràmide i la seua àrea.



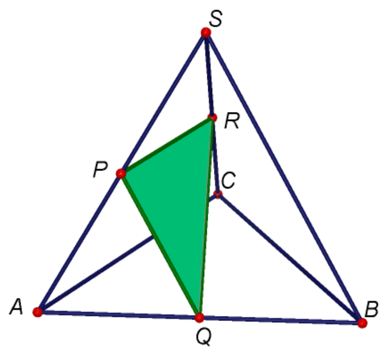
Problema 8

Siga ABCS un tetraedre regular d'aresta 4.
Siga D un punt de l'aresta $\overline{SC}$ tal que $\overline{SD}:\overline{DC}=1:3$.
Determineu el volum del tetraedre ABDS.



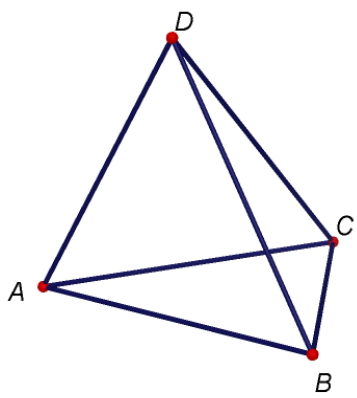
Problema 9

Siga el tetraedre regular ABCS d'aresta 6.
Siga P el punt mig de l'aresta $\overline{SA}$.
Siga Q el punt mig de l'aresta $\overline{AB}$.
Siga R el punt mig de l'aresta $\overline{SC}$.
Determineu l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{PQR}$.

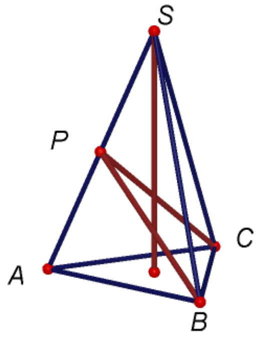


Problema 10

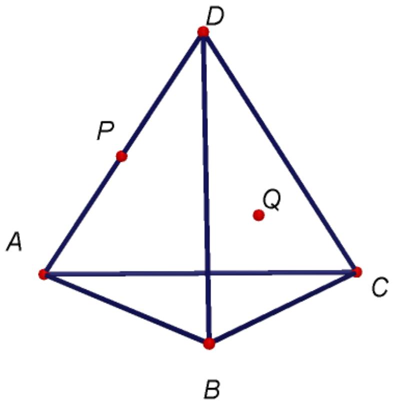
La base d'una piràmide és un triangle equilàter de costat a. Una de les cares laterals, perpendicular al plànol de la base, també és un triangle equilàter.
Determineu l'àrea i el volum de la piràmide.



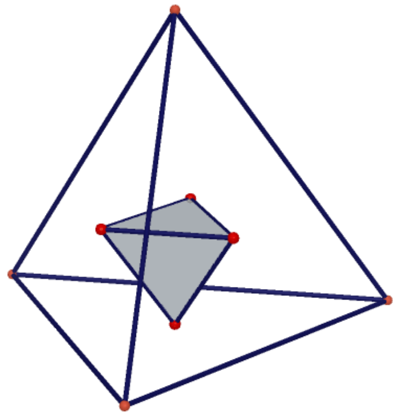
Problema 11
Una piràmide ABCS (S el vèrtex) triangular regular l'aresta de la base és 3 i l'altura 4.
Siga P el punt mig de l'aresta $\overline{AS}$.
Calculeu la mesura de l'angle $\angle BPC$.



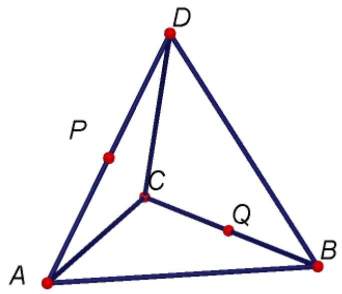
Problema 12
Siga el tetraedre regular ABCD.
Siga P el punt mig de l'aresta $\overline{AD}$.
Siga Q el centre de la cara $\overset{\Delta}{BCD}$.
Calculeu la proporció $\dfrac{\overline{PQ}}{\overline{AB}}$.



Problema 13
Determineu la proporció entre els volums d'un tetraedre regular i el seu dual (dual és aquest que té per vèrtex els centres de les cares del primer).



Problema 14
Siga el tetraedre regular ABCD.
Siga P el punt mig de l'aresta $\overline{AD}$.
Siga Q el punt mig de l'aresta $\overline{BC}$.
Calculeu la proporció $\dfrac{\overline{PQ}}{\overline{AB}}$.



Problema 15
En una piràmide triangular regular l'angle diedre de la base és igual a φ .
Determineu l'angle format per dues arestes laterals en el vèrtex de la piràmide.

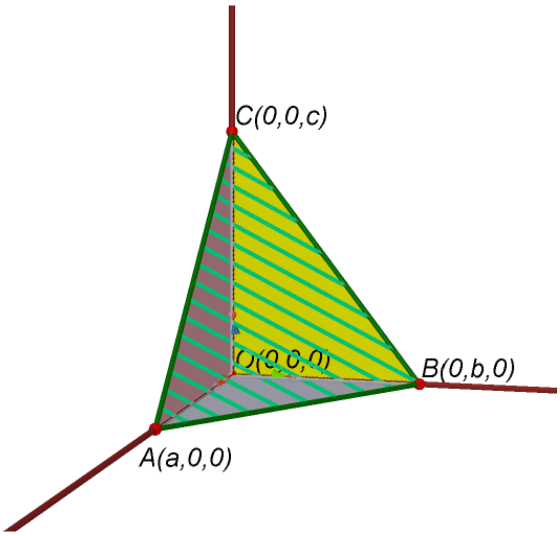
Problema 16
L'altura d'una piràmide triangular regular és 4 vegades el radi de la circumferència inscrita a la base. El volum és 36.
Determineu la mesura de l'aresta de la base:

Problema 17
Una piràmide regular de base triangular té altura 6 i volum $72\sqrt{3}$.
Determineu el radi de l'esfera inscrita a la piràmide.

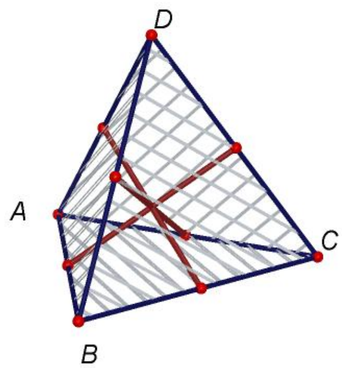
Problema 18
Un plànol secant paral·lel a la base d'una piràmide regular triangular divideix per la meitat l'àrea lateral de la piràmide. Determineu la proporció entre els segments en què queda dividida l'altura de la piràmide pel plànol secant.

Problema 19
En una piràmide triangular regular, per l'aresta de la base de longitud a, es traça una secció perpendicular a l'aresta lateral oposada. Determineu la superfície de la piràmide si el plànol secant divideix l'aresta lateral en la raó $m : n$ comptant des del vèrtex de la piràmide.

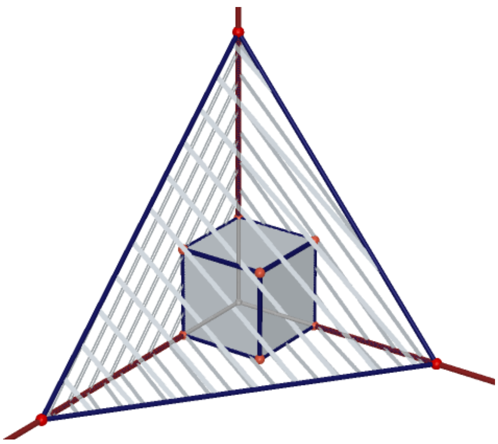
Problema 20
Considerem el sistema de referència afí
$\{O; \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}\}$
Siguen els punts $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$.
Siguen les àrees: $P = S_{OAB}$, $Q = S_{OAC}$, $R = S_{OBC}$, $S = S_{ABC}$.
Proveu que $P^2 + Q^2 + R^2 = S^2$.



Problema 21
Siga un tetraedre qualsevol.
a) Els segments que uneixen els punts migs de les arestes oposades s'intersecten en un punt
b) La suma dels quadrats de les arestes és quatre vegades la suma dels quadrats dels segments que uneixen els punts migs de les arestes oposades.



Problema 22
Les arestes d'una piràmide triangular que ixen del vèrtex A són perpendiculars a parelles i les seues mesures són a, b, c.
Determineu el volum del cub inscrit en la piràmide tal que un dels seus vèrtexs és A.



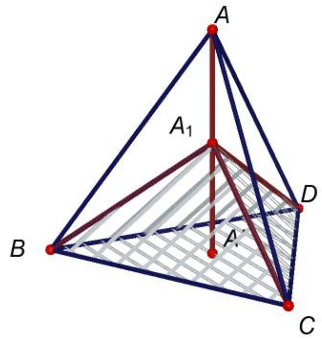
Problema 23

Siga el tetraedre regular ABCD d'aresta a.

Siga A' la projecció de A sobre la base $\overset{\Delta}{BCD}$.

Siga A_1 el punt mig del segment $\overline{AA'}$.

Proveu que el tetraedre A_1BCD té tres cares triangles rectangles.



Problema 24

La suma dels quadrats de totes les arestes d'una piràmide triangular regular és P. Determineu l'àrea màxima d'una cara lateral.

Problema 25

a) Calculeu el volum màxim d'una piràmide regular triangular inscrita en una esfera de radi R.

b) Calculeu el valor màxim de la suma de les arestes d'una piràmide regular triangular inscrita en una esfera de radi R.

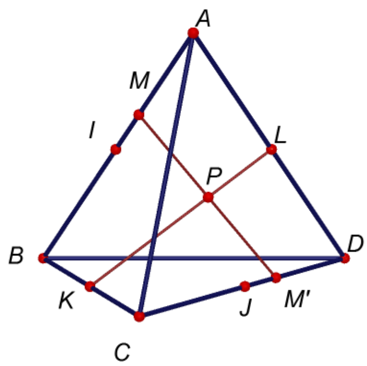
Problema 26

Siga el tetraedre ABCD.

Siguen I, J, K, L els punts migs de les arestes $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{BC}$, $\overline{AD}$, respectivament.

a) Demostreu que $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=2\cdot\overrightarrow{JK}$.

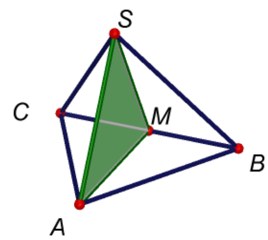
b) Demostreu que per a cada punt O del segment $\overline{KL}$ existeixen els punts M i M' de les arestes $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ tal que P és el punt mig del segment $\overline{MM'}$.



Problema 27

Siga la piràmide ABCS de base el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$

La secció produïda en la piràmide ABCS per un plànol que passa pel vèrtexs S i A, i pel punt mig M de l'aresta de la base $\overline{BC}$ és un triangle equilàter de costat 6cm. Calculeu l'àrea i el volum de la piràmide.



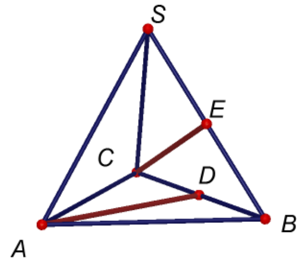
Problema 28

La suma de distàncies d'un punt interior d'un tetraedre regular a les cares és igual a l'altura del tetraedre.

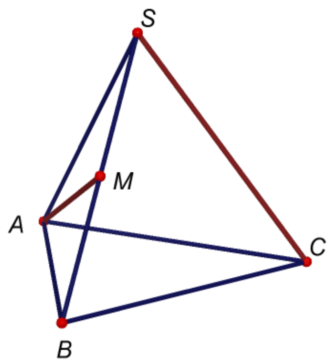
Problema 29

En el tetraedre regular ABCS, $\overline{AD}$ és la mitjana del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$, E és el punt mig de l'aresta $\overline{BS}$.

Determineu l'angle que formen les rectes AD, CE.



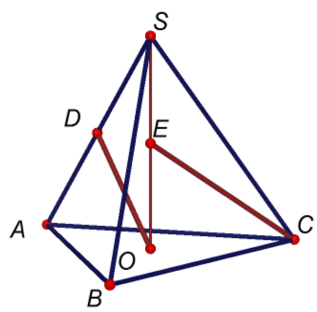
Problema 30
En el tetraedre regular ABCS, $\overline{AM}$ és la mitjana del triangle $\overset{\Delta}{ABS}$.
Determineu l'angle que formen les rectes AM, CS.



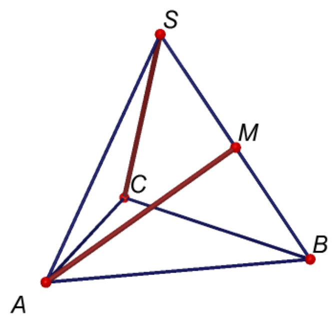
Problema 31
Siga ABCS un tetraedre regular.
Calculeu l'angle que formen l'aresta $\overline{AB}$ i la cara $\overset{\Delta}{ACS}$.

Problema 32
En el tetraedre regular ABCS, per la mitjana $\overline{AD}$ de la base $\overset{\Delta}{ABC}$ i K el punt mig de l'aresta $\overline{SB}$, s'ha dibuixat un plànol. Determineu l'angle d'aquest plànol i la base $\overset{\Delta}{ABC}$.

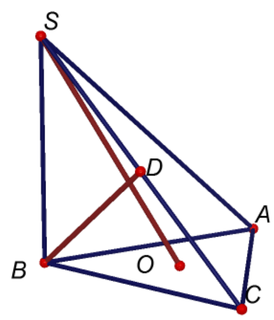
Problema 33
Siga D el punt mig de l'aresta $\overline{AS}$ del tetraedre regular ABCS.
Siga E el punt mig de l'altura $\overline{OS}$.
Determineu l'angle de les rectes CE i DO.



Problema 34
Siga ABCD un tetraedre regular.
Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{BS}$.
Calculeu l'angle de la mitjana $\overline{AM}$ i l'aresta $\overline{CS}$.



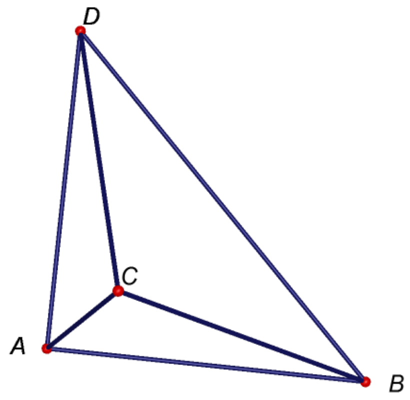
Problema 35
En la piràmide triangular ABCS la base $\overset{\Delta}{ABC}$ és un triangle equilàter i les cares $\overset{\Delta}{SAB}$ i $\overset{\Delta}{SBC}$ són perpendiculars a la base.
Siga l'aresta $\overline{SB}$ igual a l'aresta $\overline{AB}$.
Siga O el baricentre de la base $\overset{\Delta}{ABC}$. Siga D el punt mig de l'aresta $\overline{SC}$.
Calculeu l'angle que formen les rectes BD i SO.



Problema 36
La base d'una piràmide triangular és un triangle equilàter de costat 1.
Les altres arestes mesuren a.
Determineu la secció de la piràmide, perpendicular a la base, d'àrea màxima.

Problema 37
La perpendicular baixada des del baricentre de la base d'una piràmide triangular regular a l'aresta és d. Determineu el volum de la piràmide si l'angle diedre de l'aresta de la base és α.

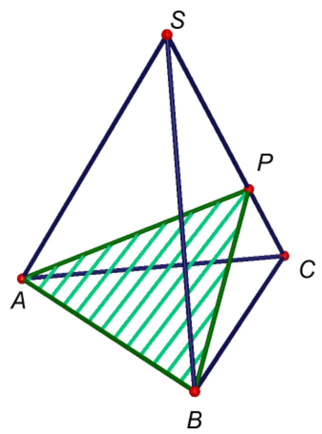
Problema 38
Les arestes del tetraedre ABCD són: $\overline{AC} = 4$,
$\overline{AB} = \overline{AD} = 4\sqrt{2}$, $\overline{BC} = \overline{CD} = 6$, $\overline{BD} = 8$.
Calculeu el seu volum.



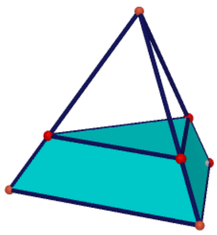
Problema 39
Una piràmide triangular regular està tallada per un plànol que passa per un vèrtex de la base i pels punts migs de les arestes laterals oposades.
Determineu la raó entre l'àrea lateral i l'àrea de la base si sabem que el plànol secant és perpendicular a la cara oposada al vèrtex de la base del plànol.

Problema 40
La base d'una piràmide és un triangle equilàter de costat a.
Una de les cares laterals de la piràmide és perpendicular a la base i és un triangle isòsceles de costat b.
Determineu l'àrea de la secció de la piràmide que és un quadrat.

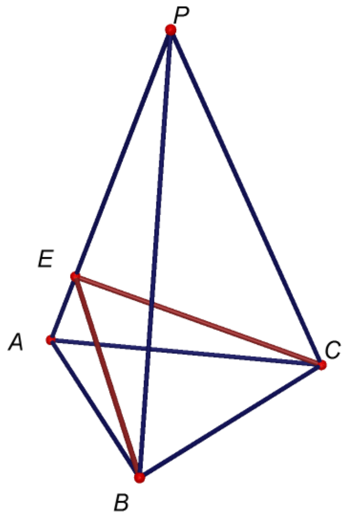
Problema 41
En una piràmide triangular regular l'aresta de la base és a.
L'angle entre l'aresta de la base i una aresta lateral és α.
Construïm la secció de la piràmide formada pel plànol que passa per una aresta de la base i és perpendicular a l'aresta lateral oposada.
Calculeu la seua àrea.



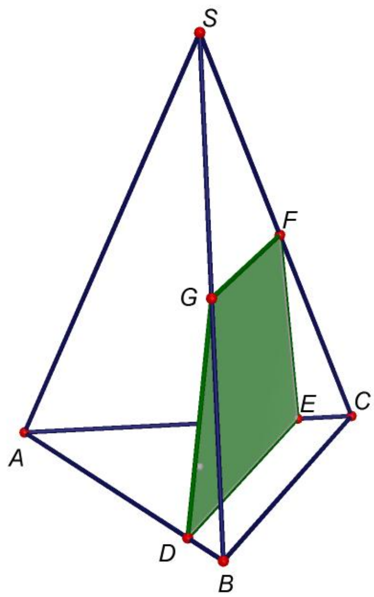
Problema 42
Un tetraedre regular d'aresta 20cm conté aigua fins una altura de 5cm.
Calculeu el volum d'aigua.



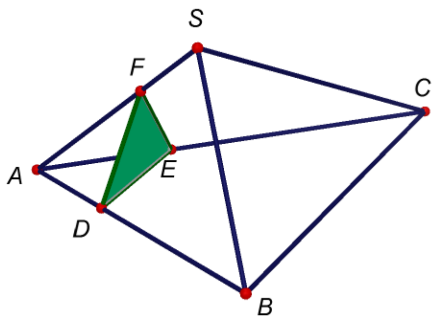
Problema 43
Siga la piràmide triangular regular ABCP de base el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ tal que l'aresta de la base és 5.
Siga E un punt de l'aresta $\overline{AP}$ tal que l'aresta $\overline{AP}$ és perpendicular al plànol BEC i a més a més, $\frac{\overline{PE}}{\overline{AE}} = \frac{7}{2}$.
Calculeu la superfície de la piràmide.



Problema 44
Siga ABCS la piràmide triangular regular d'aresta de la base 6 i altura 8.
Siguen D, E punst de les arestes $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, respectivament, tal que $\overline{AD} = \overline{AE} = 5$.
Determineu l'àrea de la secció de la piràmide que conté $\overline{DE}$ i és perpendicular a la base.



Problema 45
Siga el tetraedre ABCS.
Siguen els punts D, E, F sobre les arestes $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ i $\overline{AS}$, respectivament, tals que $\overline{BD} = 2 \cdot \overline{AD}$, $\overline{CE} = 2 \cdot \overline{AE}$, $\overline{AF} = 2 \cdot \overline{SF}$.
Determineu la proporció entre els volums dels dos sòlids en què divideix el tetraedre ABCS el plànol que formen els punts D, E, F.

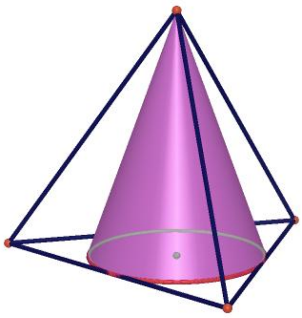


Problema 46
En una piràmide triangular regular l'altura és igual a l'aresta de la base.
Determineu l'angle que forma una aresta lateral i la base.

Problema 47
En una piràmide regular triangular l'angle diedre de l'aresta de la base és α.
Determineu l'angle que forma l'aresta lateral i la base.

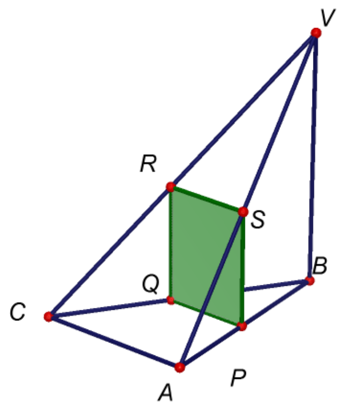
Problema 48
La perpendicular baixada des del baricentre de la base d'una piràmide triangular regular a l'aresta és d. Determineu el volum de la piràmide si l'angle l'aresta lateral i la base és β.

Problema 49
Siga un con inscrit en un tetraedre regular.
Calculeu la proporció entre el volum del con i del tetraedre.

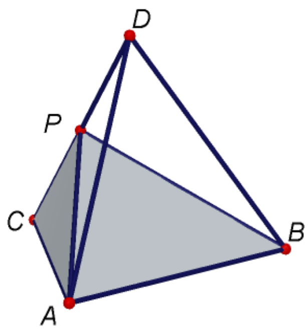


Problema 50
La base del tetraedre VABC és el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $A = 90^o$.
L'aresta $\overline{VB}$ és perpendicular al plànol de la base.
Tenim que $\overline{VB} = 5dm$, $\overline{BA} = 4dm$, $\overline{AC} = 3dm$.
Sobre l'aresta $\overline{BA}$ agafem el punt P tal que $\overline{PB} = x$.
Pel punt P tracem un plànol perpendicular a l'aresta $\overline{BA}$.
Es demana determinar:

a) L'àrea de la secció que determina el plànol en el tetraedre.
b) El valor de x a fi que aquesta àrea siga màxima.
c) El valor de l'àrea màxima.

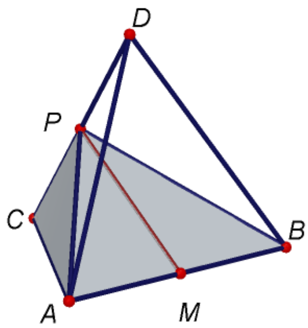


Problema 1
Siga el tetraedre regular ABCD.
Siga P el punt mig de l'aresta $\overline{CD}$.
Determineu la proporció entre les àrees del tetraedre ABCP i el tetraedre regular ABCD.



Solució:
Siga $\overline{AB} = a$ aresta del tetraedre regular ABCD:.
L'àrea del tetraedre regular ABCD és:

$$S_{ABCD} = 4 \cdot S_{ABC} = 4\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = a^2\sqrt{3}$$



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{APC}$:

$$\overline{AP} = \overline{BP} = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{AB}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMP}$:

$$\overline{MP} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 - \left(\frac{1}{2}a\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}a.$$

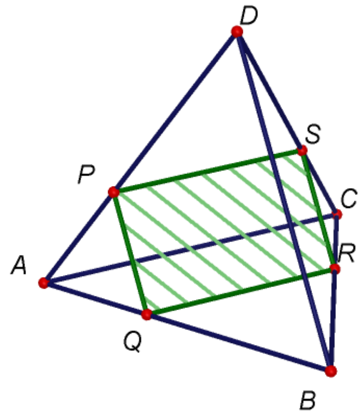
L'àrea del tetraedre ABCP és igual a la suma de les àrees dels triangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{APC}$, $\overset{\Delta}{BPC}$ i $\overset{\Delta}{APB}$:

$$S_{ABCP} = S_{ABC} + 2 \cdot S_{APC} + S_{APB} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 + 2\left(\frac{\frac{1}{2}a\frac{\sqrt{3}}{2}a}{2}\right) + \frac{a\frac{\sqrt{2}}{2}a}{2} = \frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{4}a^2.$$

La proporció entre les àrees del tetraedre ABCP i el tetraedre regular ABCD és:

$$\frac{S_{ABCP}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{4}a^2}{a^2\sqrt{3}} = \frac{6+\sqrt{6}}{12} \approx 0.7041.$$

Problema 2
El perímetre de la secció paral·lela a dues arestes que es creuen d'un tetraedre regular és constant.
Calculeu el perímetre.



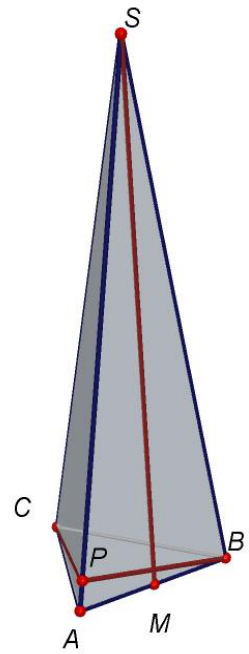
Solució:
Siga ABCD el tetraedre regular d'aresta $\overline{AB} = a$.
Siga PQRS la secció del tetraedre $\overline{PS}, \overline{QS}$ paral·lels a $\overline{AC}$,
$\overline{PQ}, \overline{RS}$ paral·lels a $\overline{BD}$.
$\overline{AC}$, $\overline{BD}$ són arestes que es creuen.

Siga $x = \overline{AP}$, $\overline{PD} = a - x$.
$\overset{\Delta}{APQ}$, és un triangle equilàter, aleshores:
$\overline{PQ} = \overline{AP} = x$.
$\overset{\Delta}{PSD}$, és un triangle equilàter, aleshores:
$\overline{PS} = \overline{PD} = a - x$.
El perímetre de la secció és:
$p = 2\left(\overline{PQ} + \overline{PS}\right) = 2(x + a - x) = 2a$.
El perímetre de la secció és constant i igual al doble de l'aresta del tetraedre.

Problema 3
En una piràmide triangular regular l'aresta lateral és igual a tres vegades l'aresta de la base.
Calculeu l'angle diedre d'una aresta lateral.

Solució:

Siga la piràmide recta ABCS, on $\overset{\Delta}{ABC}$ és un triangle equilàter.
Siga $\overline{AB} = a$, $\overline{AS} = 3a$.
Siga P de l'aresta $\overline{AS}$ tal que $\overline{BP} \perp \overline{AS}$.
L'angle diedre que cerquem és $\angle BPC = \alpha$.
Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{AB}$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\overset{\Delta}{AMS}$:

$$\overline{MS} = \sqrt{(3a)^2 - \left(\frac{1}{2}a\right)^2} = \frac{\sqrt{35}}{2}a.$$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AMS}$, $\overset{\Delta}{APB}$ són semblants i la raó és 3:1.

Aleshores, $\overline{PB} = \frac{1}{3}\overline{MS} = \frac{\sqrt{35}}{6}a$.

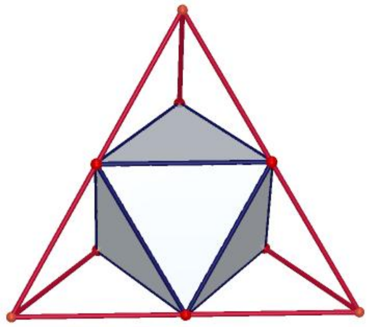
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{BPC}$:

$$a^2 = \left(\frac{\sqrt{35}}{6}a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{35}}{6}\right)^2 - 2\frac{\sqrt{35}}{6}\frac{\sqrt{35}}{6}\cos\alpha.$$

Simplificant:

$$\cos\alpha = \frac{17}{35}, \quad \alpha = \arccos\frac{17}{35} \approx 60º56'27''.$$

Problema 4
Proveu que els punts migs de les arestes d'un tetraedre regular són vèrtexs d'un octaedre regular.
Calculeu la proporció entre els volums de l'octaedre i el del tetraedre.

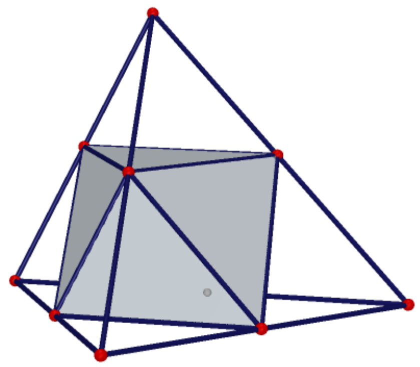


Solució:
Els punts migs de les arestes que formen les cares formen 4 triangles equilàters de costat la meitat de l'aresta.
Els punts migs de les arestes que s'intersecten en un vèrtex formen 4 triangles equilàters de costat la meitat de l'aresta.
El poliedre resultant està format per 8 cares triangles equilàters iguals 6 vèrtexs i cada vèrtex d'índex 4. El poliedre és un octaedre regular.

El truncament del tetraedre per la meitat de les arestes separa del tetraedre 4 tetraedres regular d'aresta la meitat de l'aresta del tetraedre inicial.
Cadascun dels 4 tetraedres té per volum la vuitena part del tetraedre inicial ja que estan en proporció 1:2.

Aleshores el volum de l'octaedre és la meitat del volum tetraedre.

Problema
Proveu que els punts migs de les arestes d'un tetraedre són vèrtexs d'un octaedre tal que les arestes oposades són iguals i paral·leles i el volum del qual és igual a la meitat del volum del tetraedre.



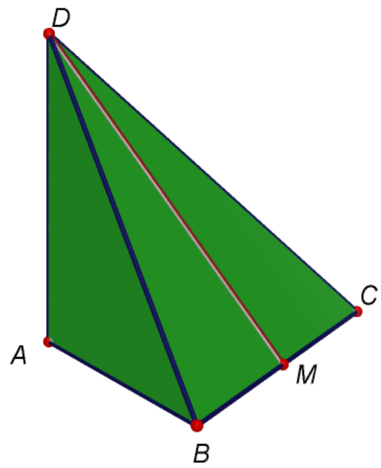
Problema 5
La base d'un tetraedre és un triangle rectangle isòsceles d'hipotenusa 8cm i l'aresta lateral sobre l'angle recte de la base és perpendicular a la base i mesura 5cm.
Calculeu l'àrea i el volum del tetraedre.

Solució:

Siga el tetraedre de base $\overset{\Delta}{ABC}$, $A = 90º$, $\overline{BC} = 8$.
Siga $\overline{AD} = 5$, $\angle DAB = \angle DAC = 90º$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$:
$\overline{AB} = \overline{AC} = 4\sqrt{2}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABD}$:
$\overline{BD} = \overline{CD} = \sqrt{57}$.



El triangle $\overset{\Delta}{BCD}$ és isòsceles.
Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{BC}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CMD}$:
$\overline{DM} = \sqrt{41}$.
L'àrea del tetraedre ABCD és:
$S_{ABCD} = 2 \cdot S_{ABD} + S_{ABC} + S_{BCD}$.

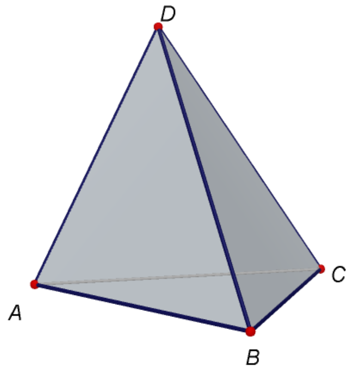
$$S_{ABCD} = 2 \cdot \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AD}}{2} + \frac{\overline{AB}^2}{2} + \frac{\overline{BC} \cdot \overline{DM}}{2}.$$

$S_{ABCD} = 20\sqrt{2} + 16 + 4\sqrt{41} \approx 69.90\text{cm}^2$.
El volum del tetraedre és:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot \overline{AD}.$$

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} 16 \cdot 5 = \frac{80}{3} \approx 26.66\text{cm}^3.$$

Problema 6
Un tetraedre està format per dos triangles equilàters de costat a i dos triangles rectangles isòsceles.
Calculeu l'àrea i el volum.



Solució:

Siga el tetraedre ABCD tal que les cares $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{ACD}$ són triangles equilàters de costat a. Siguen $\overset{\Delta}{ABD}$, $\overset{\Delta}{BCD}$ les cares que són triangles rectangles isòsceles.

$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC} = \overline{AD} = \overline{CD} = a$.

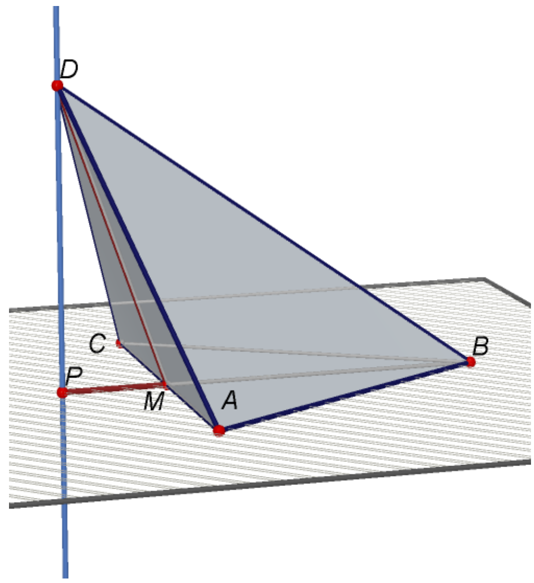
$\angle BAD = BCD = 90^o$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABD}$:

$\overline{AD} = a\sqrt{2}$.

L'àrea del tetraedre és:

$$S_{ABCD} = 2 \cdot S_{aBC} + 2 \cdot S_{ABD} = 2\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 + 2\frac{a^2}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}a^2 .$$



Siga P la projecció de C sobre la base $\overset{\Delta}{ABC}$.

Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{AC}$.

M pertany al segment $\overline{PB}$.

Siga $\overline{DP} = h$ altura del tetraedre. Siga $\overline{PM} = x$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMB}$:

$$\overline{BM} = \overline{DM} = \frac{\sqrt{3}}{2}a .$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PMD}$:

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 = x^2 + h^2 \qquad (1)$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PBD}$:

$$\left(a\sqrt{2}\right)^2 = \left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 + h^2 \qquad (2)$$

Considerem el sistema format per les expressions (1) (2):

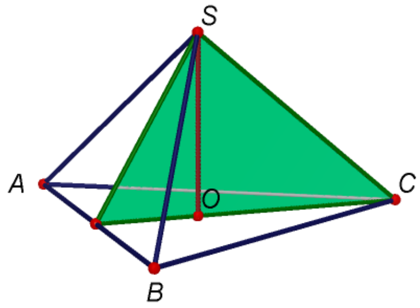
$$\begin{cases} \frac{3}{4}a^2 = x^2 + h^2 \\ 2a^2 = x^2 + \frac{3}{4}a^2 + \sqrt{3}ax + h^2 \end{cases} . \text{ La solució és } \begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{6}a \\ h = \frac{\sqrt{6}}{3}a \end{cases} .$$

El volum del tetraedre és:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABC} \cdot h = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\frac{\sqrt{6}}{3}a = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3 .$$

Problema 7

En la piràmide triangular regular ABCD l'àrea de la secció que passa per l'aresta lateral $\overline{SC}$ i l'altura $\overline{SO}$ és la meitat de l'àrea de la base $\overset{\Delta}{ABC}$ de la piràmide. L'aresta lateral és igual $\sqrt{21}$. Determineu el volum de la piràmide i la seua àrea.



Solució:

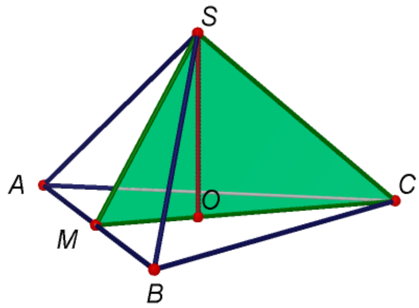
Siga $a=\overline{AB}$ aresta de la base $\overset{\Delta}{ABC}$ (triangle equilàter).

Per ser la piràmide regular el peu de l'altura $\overline{SO}$, és el baricentre del triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$. Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{AB}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BMC}$:

$\overline{CM}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$. Aplicant la propietat del baricentre O:

$\overline{CO}=\frac{2}{3}\overline{CM}=\frac{\sqrt{3}}{3}a$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{COS}$:

$$\overline{SO}=\sqrt{\left(\sqrt{21}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2}=\sqrt{21-\frac{1}{3}a^2}.$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{CMS}$ (secció del plànol que formen $\overline{SC}$ i l'altura $\overline{SO}$ és:

$$S_{CMS}=\frac{1}{2}\overline{CM}\cdot\overline{SO}=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}a\sqrt{21-\frac{1}{3}a^2}=\frac{1}{4}a\sqrt{63-a^2}.$$

L'àrea de la base $\overset{\Delta}{ABC}$ és: $S_{ABC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Com que l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{CMS}$ és la meitat de l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$\frac{1}{4}a\sqrt{63-a^2}=\frac{1}{2}\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Resolent l'equació:

$a=6$. $\overline{SO}=3$.

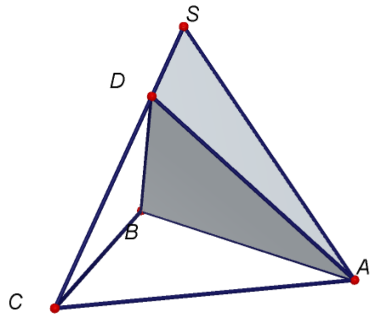
El volum de la piràmide ABCS és: $V=\frac{1}{3}S_{ABC}\cdot\overline{SO}=\frac{1}{3}\frac{6^2\sqrt{3}}{4}3=9\sqrt{3}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMS}$:

$$\overline{SM}=\sqrt{\left(\sqrt{21}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\sqrt{21-3^2}=2\sqrt{3}.$$

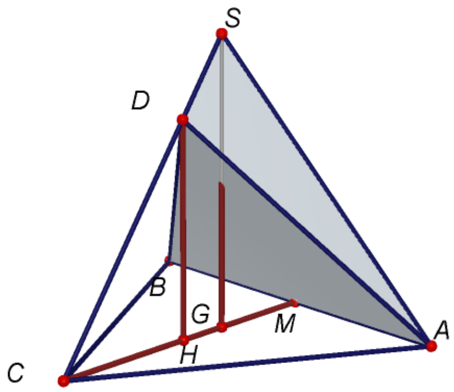
L'àrea de la piràmide ABCS és: $S_{ABCS}=S_{ABC}+3\cdot S_{ABS}=\frac{6^2\sqrt{3}}{4}+3\frac{6\cdot2\sqrt{3}}{2}=27\sqrt{3}$.

Problema 8
Siga ABCS un tetraedre regular d'aresta 4.
Siga D un punt de l'aresta $\overline{SC}$ tal que $\overline{SD}:\overline{DC}=1:3$.
Determineu el volum del tetraedre ABDS.



Solució:
$\overline{SD}:\overline{DC}=1:3$, $\overline{SC}=4$, Aleshores:
$\overline{DC}=3$.
El volum del tetraedre ABDS és igual al volum del tetraedre regular ABCS menys el volum del tetraedre ABCD.
Siga $\overline{SG}$ l'altura del tetraedre regular ABCS. G és el baricentre de la cara base.
Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{AB}$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMC}$:
$\overline{CM}=2\sqrt{3}$.
Aplicant la propietat del baricentre G.
$\overline{CG}=\frac{2}{3}\overline{CM}=\frac{4}{3}\sqrt{3}$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CGS}$:

$$\overline{SG}=\sqrt{4^2-\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{4}{3}\sqrt{6}.$$



El volum del tetraedre regular ABCS és:

$$V_{ABCS}=\frac{1}{3}S_{ABC}\cdot\overline{SG}=\frac{1}{3}\frac{4^2\sqrt{3}}{4}\frac{4\sqrt{6}}{3}=\frac{16}{3}\sqrt{2}.$$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{CGS}$, $\overset{\Delta}{CHD}$ són semblants i la raó de semblança és $4:3$, aleshores:

$$\overline{DH}=\frac{3}{4}\overline{SG}=\sqrt{6}.$$

El volum del tetraedre ABCD és:

$$V_{ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABC}\cdot\overline{DH}=\frac{1}{3}\frac{4^2\sqrt{3}}{4}\sqrt{6}=4\sqrt{2}.$$

El volum del tetraedre ABDS és:

$$V_{ABCD}=V_{ABCS}-V_{ABCD}=\frac{16}{3}\sqrt{2}-4\sqrt{2}=\frac{4}{3}\sqrt{2}.$$

Problema 9

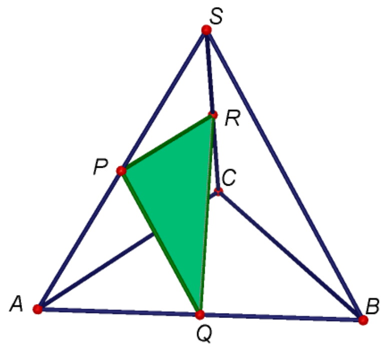
Siga el tetraedre regular ABCS d'aresta 6.

Siga P el punt mig de l'aresta $\overline{SA}$.

Siga Q el punt mig de l'aresta $\overline{AB}$.

Siga R el punt mig de l'aresta $\overline{SC}$.

Determineu l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{PQR}$.



Solució:

$\overline{PQ}$ és paral·lela mitjana del triangle $\overset{\Delta}{ABS}$, $\overline{PQ} = \frac{1}{2}\overline{SB} = 3$.

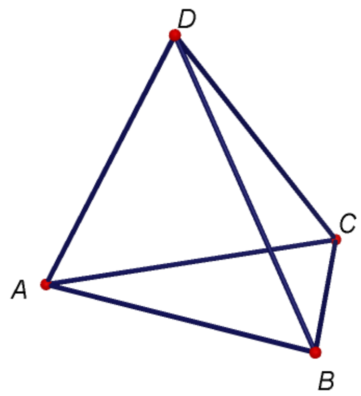
$\overline{PR}$ és paral·lela mitjana del triangle $\overset{\Delta}{ACS}$. $\overline{PR} = \frac{1}{2}\overline{AC} = 3$.

L'angle $\angle RPQ$ és igual a l'angle que formen $\overline{AC}$ i $\overline{SB}$ que és recte.

Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{PQR}$ és rectangle i isòsceles.

$S_{PQR} = \frac{1}{2}\overline{PQ}^2 = \frac{9}{2}$.

Problema 10
La base d'una piràmide és un triangle equilàter de costat a. Una de les cares laterals, perpendicular al plànol de la base, també és un triangle equilàter. Determineu l'àrea i el volum de la piràmide.



Solució:

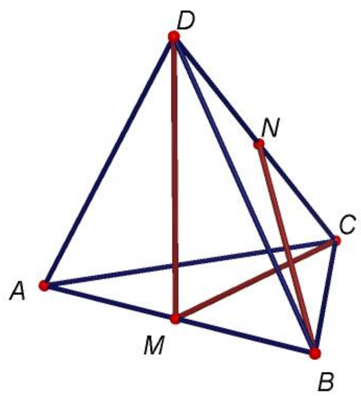
Siga la piràmide ABCD de base $\overset{\Delta}{ABC}$ triangle equilàter, $\overline{AB}=a$.

Siga $\overset{\Delta}{ABD}$ la cara lateral perpendicular a la base i triangle equilàter.

L'àrea dels triangles equilàters $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{ABD}$ és:

$$S_{ABC}=S_{ABD}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{AB}$. Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMD}$:



$$\overline{DM}=\overline{CM}=\frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

$\overline{DM}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$ és altura de la piràmide.

El volum és:

$$V_{ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABC}\cdot\overline{DM}=\frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{1}{8}a^3.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{DMC}$:

$$\overline{CD}=\overline{CM}\cdot\sqrt{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}a.$$

Els triangle $\overset{\Delta}{BCD}$, $\overset{\Delta}{ACD}$ són iguals i isòsceles.
Siga N el punt mig de l'aresta $\overline{CD}$.

$\overline{CN}=\frac{\sqrt{6}}{4}a$. $\angle BNC=90^{\circ}$. Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BNC}$:

$$\overline{BN}=\sqrt{a^2-\left(\frac{\sqrt{6}}{4}a\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{4}a.$$

L'àrea dels triangles $\overset{\Delta}{BCD}$, $\overset{\Delta}{ACD}$ és:

$$S_{BCD}=S_{ACD}=\frac{\overline{CD}\cdot\overline{BN}}{2}=\frac{\frac{\sqrt{6}}{2}a\frac{\sqrt{10}}{4}a}{2}=\frac{\sqrt{15}}{8}a^2.$$

L'àrea de la piràmide és:

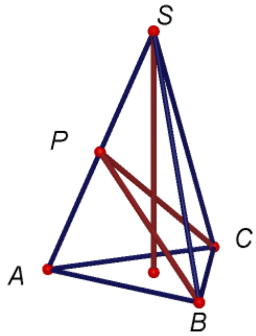
$$S_{ABCD}=2S_{ABC}+2S_{BCD}=2\frac{\sqrt{3}}{4}a^2+2\frac{\sqrt{15}}{8}a^2=\frac{a^2}{4}\left(2\sqrt{3}+\sqrt{15}\right).$$

Problema 11

Una piràmide ABCS (S el vèrtex) triangular regular l'aresta de la base és 3 i l'altura 4.

Siga P el punt mig de l'aresta $\overline{AS}$.

Calculeu la mesura de l'angle $\angle BPC$.



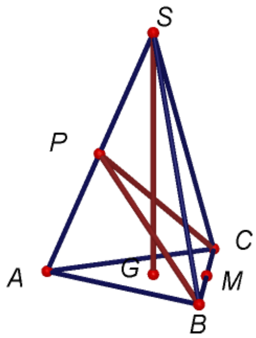
Solució:

La base $\overset{\Delta}{ABC}$ és un triangle equilàter de costat $\overline{AB} = 3$.

Siga G el baricentre del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

L'altura de la piràmide és $\overline{SG} = 4$.

Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{BC}$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMB}$:

$$\overline{AM} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Aplicant la propietat del baricentre G:

$$\overline{AG} = \frac{2}{3}\overline{AM} = \sqrt{3}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AGS}$:

$$\overline{AS} = \sqrt{4^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{19}.$$

$$\overline{AS} = \overline{BS}$$

La mitjana $\overline{BP}$ del triangle $\overset{\Delta}{ABS}$ mesura: $\overline{BP} = \dfrac{\sqrt{2\overline{BS}^2 + 2\overline{AB}^2 - \overline{AS}^2}}{2}$:

$$\overline{BS} = \frac{\sqrt{2\cdot 19 + 2\cdot 9 - 19}}{2} = \frac{\sqrt{37}}{2}.$$

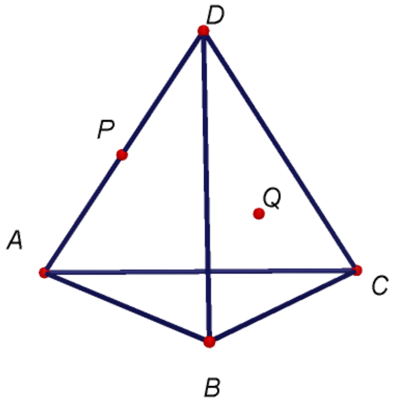
Siga $\alpha = \angle BPC$, aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{BPC}$:

$$3^2 = \left(\frac{\sqrt{37}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{37}}{2}\right)^2 - 2\frac{\sqrt{37}}{2}\frac{\sqrt{37}}{2}\cos\alpha.$$ Simplificant:

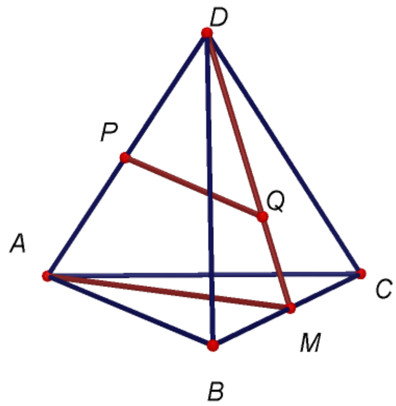
$$\cos\alpha = \frac{19}{37}.$$

$$\alpha = \arccos\frac{19}{37} \approx 59º6'7''.$$

Problema 12
Siga el tetraedre regular ABCD.
Siga P el punt mig de l'aresta $\overline{AD}$.
Siga Q el centre de la cara $\overset{\Delta}{BCD}$.
Calculeu la proporció $\dfrac{\overline{PQ}}{\overline{AB}}$.



Solució:
Siga $a=\overline{AB}$ aresta del tetraedre regular.
Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{BC}$.
$\overline{AM}=\overline{DM}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$.
Siga $\alpha=\angle ADM$.

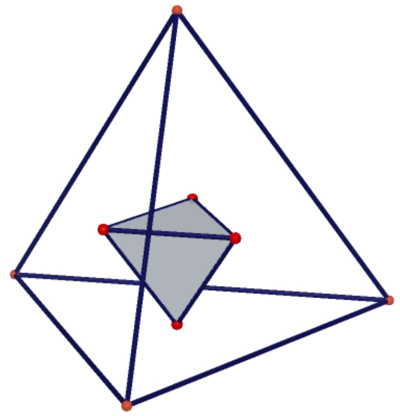


Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{AMD}$:
$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2+a^2-2\dfrac{\sqrt{3}}{2}a\cdot a\cdot\cos\alpha$. Simplificant:
$\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.
Aplicant la propietat del baricentre Q del triangle $\overset{\Delta}{BCD}$:
$\overline{DQ}=\dfrac{2}{3}\overline{DM}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$.
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{PQD}$:
$$\overline{PQ}^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2-2\frac{a}{2}\frac{\sqrt{3}}{3}a\cdot\cos\alpha$$
$$\overline{PQ}^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2-2\frac{a}{2}\frac{\sqrt{3}}{3}a\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}.$$
Simplificant:
$\overline{PQ}=\dfrac{1}{2}a$.
$\dfrac{\overline{PQ}}{\overline{AB}}=\dfrac{1}{2}$.

Notem que el triangle $\overset{\Delta}{DPQ}$ és isòsceles, aleshores, els triangles $\overset{\Delta}{DPQ}$, $\overset{\Delta}{AMD}$ són semblants i la raó de semblança és $\dfrac{\overline{PQ}}{\overline{AM}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Problema 13

Determineu la proporció entre els volums d'un tetraedre regular i el seu dual (dual és aquest que té per vèrtex els centres de les cares del primer).



Solució:

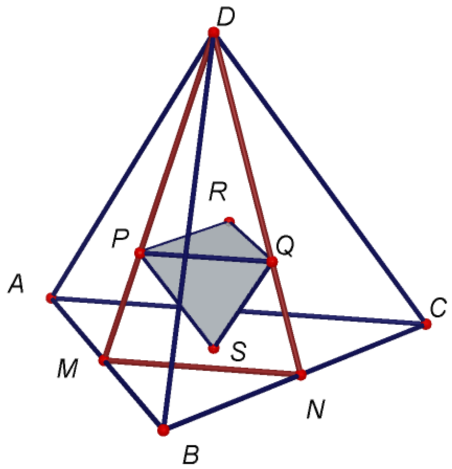
Siga el tetraedre regular ABCD d'aresta $a = \overline{AB}$.

Siga PQRS el tratraedre dual, P centre de la cara $\overset{\Delta}{ABD}$ i Q centre de la cara $\overset{\Delta}{BCD}$.

Els dos tetraedres regulars són semblants, la proporció entre els volums és el cub de la proporció de les seues arestes.

Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{AB}$.

Siga N el punt mig de l'aresta $\overline{BC}$.



$\overline{MN}$ és paral·lela mitjana del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$, aleshores:

$\overline{MN} = \frac{a}{2}$.

Els triangles $\overset{\Delta}{MDN}$, $\overset{\Delta}{PDQ}$ són semblants.

Per la propietat del baricentre P del triangle $\overset{\Delta}{ABD}$.

$\frac{\overline{DP}}{\overline{DM}} = \frac{2}{3}$, aleshores:

$\frac{\overline{PQ}}{\overline{MN}} = \frac{2}{3}$.

Per tant, $\overline{PQ} = \frac{2}{3}\frac{a}{2} = \frac{1}{3}a$.

$$\frac{V_{PQRS}}{S_{ABCD}} = \left(\frac{\overline{PQ}}{\overline{AB}}\right)^3 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}.$$

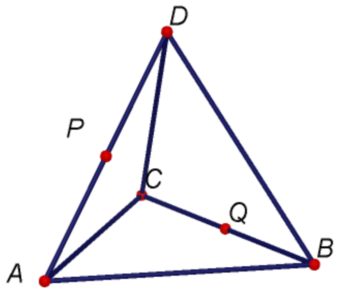
Problema 14

Siga el tetraedre regular ABCD.

Siga P el punt mig de l'aresta $\overline{AD}$.

Siga Q el punt mig de l'aresta $\overline{BC}$.

Calculeu la proporció $\dfrac{\overline{PQ}}{\overline{AB}}$.

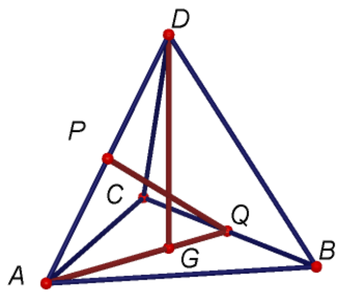


Solució:

Siga $a=\overline{AB}$ aresta del tetraedre regular.

El peu de l'altura del tetraedre regular sobre la base $\overset{\Delta}{ABC}$ és el baricentre G del triangle equilàter.

Siga $\alpha=\angle DAQ$.



$$\overline{AQ}=\frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

Aplicant la propietat del baricentre G:

$$\overline{AG}=\frac{2}{3}\overline{AQ}=\frac{\sqrt{3}}{3}a.$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AGD}$;

$$\cos\alpha=\frac{\overline{AG}}{\overline{AD}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{APQ}$:

$$\overline{PQ}^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2-2\frac{a}{2}\frac{\sqrt{3}}{3}a\cdot\cos\alpha$$

$$\overline{PQ}^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2-2\frac{a}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}a\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Simplificant:

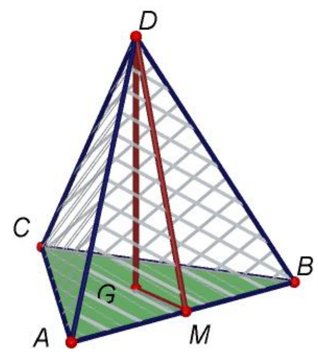
$$\overline{PQ}=\frac{\sqrt{2}}{2}a.$$

$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{AB}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Notem que el triangle $\overset{\Delta}{APQ}$ és rectangle ja que $\overline{AQ}^2=\overline{AP}^2+\overline{PQ}^2$.

Problema 15
En una piràmide triangular regular l'angle diedre de la base és igual a φ.
Determineu l'angle format per dues arestes laterals en el vèrtex de la piràmide.

Solució:
La piràmide és triangular regular, és a dir, la base és un triangle equilàter i és recta.
Siga ABCD la piràmide triangular regular, de base $\overset{\Delta}{ABC}$ triangle equilàter.
Siga G el peu de l'altura. G és el baricentre del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
Siga $a=\overline{AB}$ aresta de la base
Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{AB}$ de la base .



$\overline{AM}=\frac{a}{2}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMC}$:

$\overline{CM}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$.

Aplicant la propietat de la bisectriu:

$\overline{GM}=\frac{1}{3}\overline{CM}=\frac{\sqrt{3}}{6}a$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DGM}$:

$\overline{DM}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{6}a}{\cos\varphi}$.

Siga $\alpha=\angle ADM$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ADM}$

$\mathrm{tg}\alpha=\frac{\overline{AM}}{\overline{DM}}=\frac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{6\cos\varphi}}=\sqrt{3}\cos\varphi$.

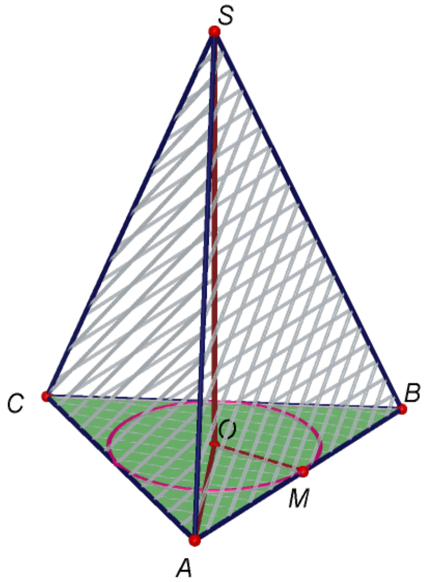
$\alpha=\mathrm{arctg}\left(\sqrt{3}\cos\varphi\right)$.

L'angle format per dues arestes laterals en el vèrtex de la piràmide és:

$2\alpha=2\mathrm{arctg}\left(\sqrt{3}\cos\varphi\right)$.

Problema 16
L'altura d'una piràmide triangular regular és 4 vegades el radi de la circumferència inscrita a la base. El volum és 36.
Determineu la mesura de l'aresta de la base:

Solució:

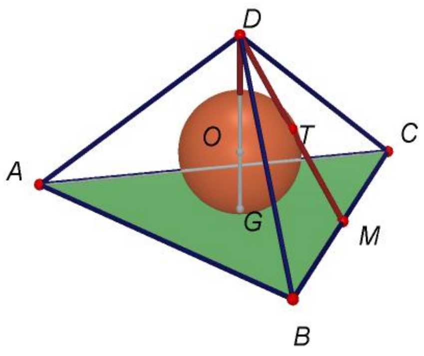


Siga ABCS la piràmide de base el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$.
Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{AB}$.
Siga O l'incentre del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
Siga $r = \overline{OM}$ radi de la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
L'altura de la piràmide és $\overline{OS} = 4r$.
Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMO}$:
$\overline{AM} = r\sqrt{3}$.
$\overline{AB} = 2r\sqrt{3}$.
El volum de la piràmide és:
$$V = \frac{1}{3}\frac{\overline{AB}^2\sqrt{3}}{4}\overline{OS}.$$
$$\frac{1}{3}\frac{\left(2r\sqrt{3}\right)^2\sqrt{3}}{4}4r = 36.$$
$r^3 = 3\sqrt{3}$. Resolent l'equació:
$r = \sqrt{3}$.
L'aresta de la base mesura:
$\overline{AB} = 2r\sqrt{3} = 6$.

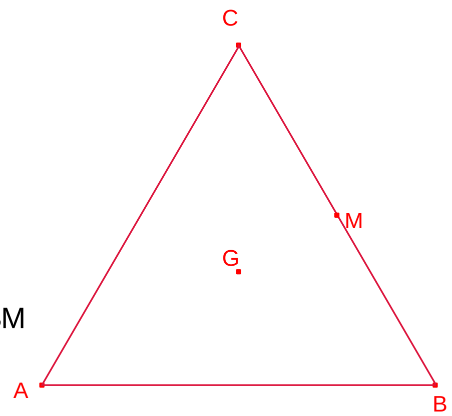
Problema 17

Una piràmide regular de base triangular té altura 6 i volum $72\sqrt{3}$.
Determineu el radi de l'esfera inscrita a la piràmide.

Solució:
La piràmide regular aleshores, és recta i la base un triangle equilàter.



Siga la piràmide ABCD de base el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$.
Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{BC}$.
L'altura de la piràmide s'intersecta en el baricentre G del triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$.
El centre de O l'esfera pertany a l'altura $\overline{DG}$
El punt de tangència T de l'esfera i la cara $\overset{\Delta}{BCD}$ pertany a l'apotema $\overline{DM}$.
$\overline{OT}$ és perpendicular a l'apotema $\overline{DM}$.
Siga $\overline{OT}=\overline{OG}=r$ radis de l'esfera.
Siga la secció $\overset{\Delta}{GMD}$ de la piràmide que conté l'altura i l'apotema de la cara $\overset{\Delta}{BCD}$.



Siga $a=\overline{AB}$, aresta de la base.

$$V_p=\frac{1}{3}S_b h.$$

$$V_p=\frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4}6=72\sqrt{3}$$. Resolent l'equació:

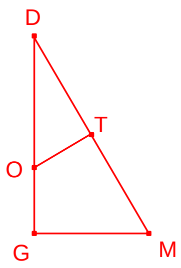
$a=12$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABM}$:

$\overline{AM}=6\sqrt{3}$.

Per la propietat del baricentre:

$$\overline{GM}=\frac{1}{3}\overline{AM}=2\sqrt{3}.$$



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DGM}$:

$\overline{DM}=6^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2$.

$\overline{DM}=4\sqrt{3}$.

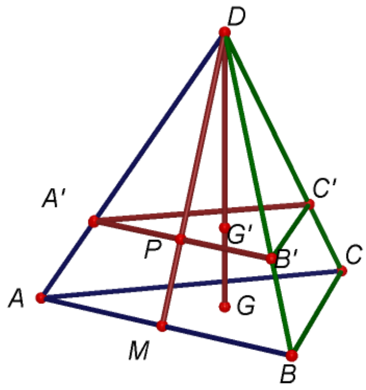
Els triangles $\overset{\Delta}{DGM}$, $\overset{\Delta}{DTO}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}=\frac{r}{6-r}$$. Resolent l'equació:

$r=2$.

Problema 18
Un plànol secant paral·lel a la base d'una piràmide regular triangular divideix per la meitat l'àrea lateral de la piràmide. Determineu la proporció entre els segments en què queda dividida l'altura de la piràmide pel plànol secant.

Solució:



Siga la piràmide ABCD de base el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$.

El peu de l'altura és el baricentre G del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
El plànol secant talla les arestes laterals de la piràmide en els punts A', B', C', i la l'altura $\overline{DG}$ en el punt G'.

Volem calcular $\dfrac{\overline{DG'}}{\overline{G'G}}$.

Els triangles $\overset{\Delta}{ABD}$, $A'\overset{\Delta}{B'}D$ són semblants i la raó de les àrees és 2:1.
Aleshores, la raó dels costats és $\sqrt{2}:1$.
Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{AB}$.
$\overline{A'B'}$ talla $\overline{DM}$ en el punt P.
$\overline{DM}:\overline{DP}=\sqrt{2}:1$.

Els triangles $D\overset{\Delta}{G}M$, $D\overset{\Delta}{G'}P$ són semblants i la raó de semblança és:
$\dfrac{\overline{DM}}{\overline{DP}}=\sqrt{2}$.

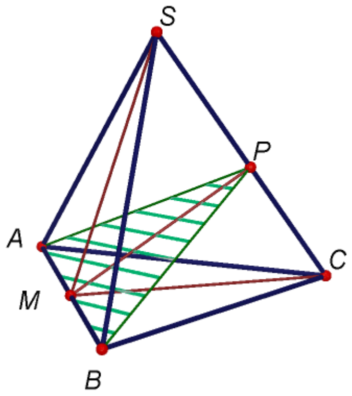
Aleshores, $\dfrac{\overline{DG}}{\overline{DG'}}=\sqrt{2}$. $\dfrac{\overline{DG'}}{\overline{DG}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\frac{\overline{DG'}}{\overline{G'G}}=\frac{\overline{DG'}}{\overline{DG}-\overline{DG'}}=\frac{\dfrac{\overline{DG'}}{\overline{DG}}}{1-\dfrac{\overline{DG'}}{\overline{DG}}}=\frac{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}}=1+\sqrt{2}.$$

Problema 19
En una piràmide triangular regular, per l'aresta de la base de longitud a, es traça una secció perpendicular a l'aresta lateral oposada. Determineu la superfície de la piràmide si el plànol secant divideix l'aresta lateral en la raó $m:n$ comptant des del vèrtex de la piràmide.

Solució:
Siga la piràmide regular triangular ABCS, d'aresta de la base $\overline{AB}=a$

Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABP}$ secció per l'aresta $\overline{AB}$ perpendicular a l'aresta lateral $\overline{SC}$.
Siga $\overline{SP}=mx$, $\overline{PC}=nx$. $\overline{SB}=\overline{SC}=(m+n)x$.
Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{AB}$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BMC}$:

$$\overline{MC}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MPC}$:

$$\overline{MP}^2=\frac{3}{4}a^2-n^2x^2 \qquad (1)$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BMS}$:

$$\overline{MS}^2=(m+n)^2x^2-\frac{1}{4}a^2 \qquad (2)$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MPS}$:

$$\overline{MP}^2=\overline{MS}^2-m^2x^2 \qquad (3)$$

Substituint l'expressió (2) en l'expressió (3):

$$\overline{MP}^2=(m+n)^2x^2-\frac{1}{4}a^2-m^2x^2 \qquad (4)$$

Igualant les expressions (1) (4):

$$\frac{3}{4}a^2-n^2=(m+n)^2x^2-\frac{1}{4}a^2-m^2x^2.$$

Resolent l'equació:

$$x^2=\frac{a^2}{2n(m+n)} \qquad (5)$$

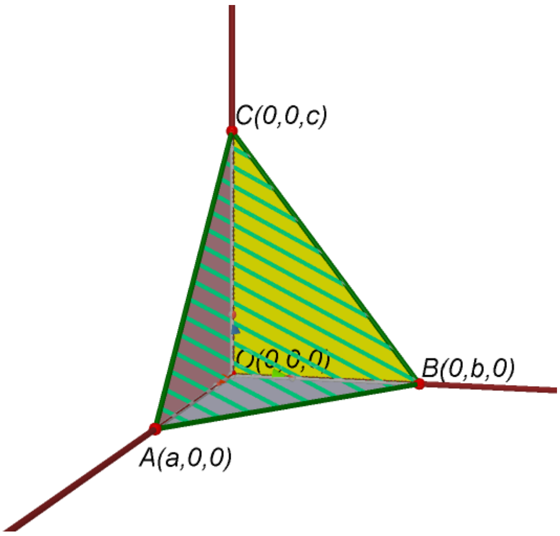
Substituint l'expressió (5) en l'expressió (2):

$$\overline{MS}^2=(m+n)^2\frac{a^2}{2n(m+n)}-\frac{1}{4}a^2=\left(\frac{2m+n}{4n}\right)a^2 \qquad (6)$$

La superfície total de la piràmide ABCS és:

$$S_{ABCS}=S_{ABC}+3\cdot S_{ABS}=S_{ABC}+3\frac{\overline{AB}\cdot\overline{MS}}{2}.$$

$$S_{ABCS}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2+3\cdot\frac{a\frac{a}{2}\sqrt{\frac{2m+n}{n}}}{2}=\frac{a^2}{4}\left(\sqrt{3}+3\sqrt{\frac{2m+n}{n}}\right).$$



Problema 20

Considerem el sistema de referència afí $\{O;\{e_1=(1,0,0),e_2=(0,1,0),e_3=(0,0,1)\}\}$

Siguen els punts $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$, $C(0,0,c)$.

Siguen les àrees: $P=S_{OAB}$, $Q=S_{OAC}$, $R=S_{OBC}$, $S=S_{ABC}$.

Proveu que $P^2+Q^2+R^2=S^2$.

Solució:

$\overset{\Delta}{OAB}$, $\overset{\Delta}{OAC}$, $\overset{\Delta}{OBC}$ són triangles rectangles.

$P=S_{OAB}=\frac{1}{2}|ab|$.

$Q=S_{OAC}=\frac{1}{2}|ac|$.

$R=S_{OBC}=\frac{1}{2}|bc|$.

$P^2+Q^2+R^2=\frac{1}{4}\left((ab)^2+(ac)^2+(bc)^2\right)$.

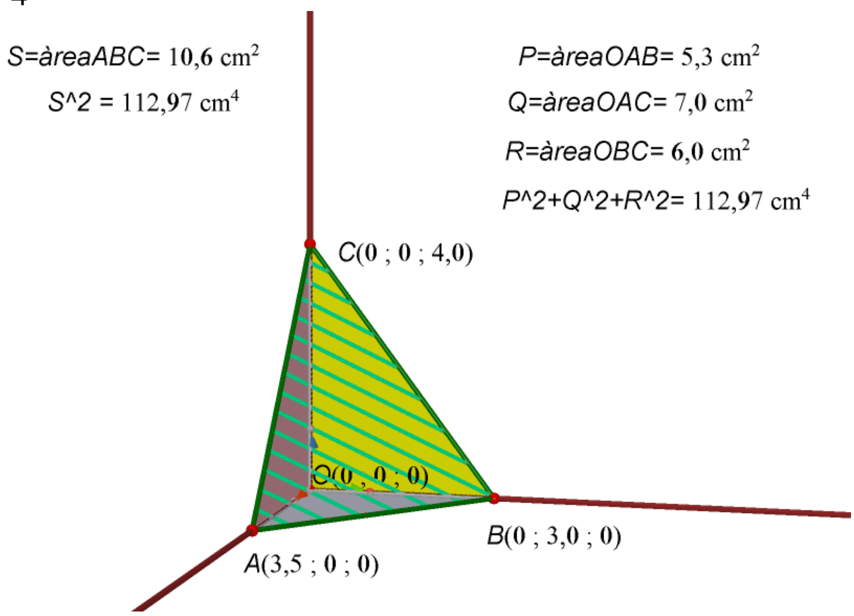
$\overrightarrow{AB}=(-a,b,0)$, $\overrightarrow{AC}=(-a,0,c)$.

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix}=(bc,ac,ab).$$

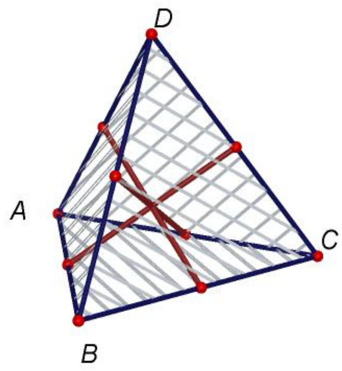
$$\left\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right\|=\|(bc,ac,ab)\|=\sqrt{(bc)^2+(ac)^2+(ab)^2}.$$

$$S=S_{ABC}=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right\|=\frac{1}{2}\sqrt{(ab)^2+(ac)^2+(bc)^2}.$$

$$S^2=\frac{1}{4}\left((ab)^2+(ac)^2+(bc)^2\right).$$

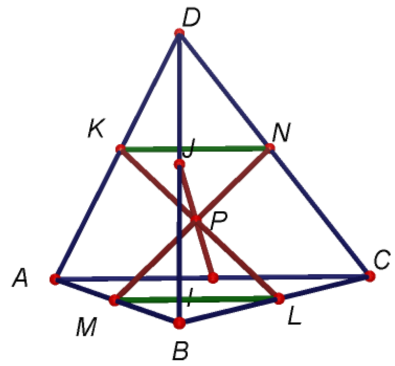


Problema 21
Siga un tetraedre qualsevol.
a) Els segments que uneixen els punts migs de les arestes oposades s'intersecten en un punt
b) La suma dels quadrats de les arestes és quatre vegades la suma dels quadrats dels segments que uneixen els punts migs de les arestes oposades.



Solució:

a)
Siguen K i L els punts mig de les arestes oposades $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$, respectivament.
Siguen M i N els punts mig de les arestes oposades $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$, respectivament.
$\overline{KN}$ és paral·lela mitjana del triangle $\overset{\Delta}{ACD}$.
$\overline{ML}$ és paral·lela mitjana del triangle $\overset{\Delta}{ACB}$.
Aleshores, MLNK és un paral·lelogram.
Les diagonals $\overline{KL}$, $\overline{MN}$ del paral·lelogram s'intersecten en el punt mig dels dos segments.



Anàlogament, MINJ és un paral·lelogram.
Per tant, Les diagonals $\overline{IJ}$, $\overline{MN}$ del paral·lelogram s'intersecten en el punt mig dels dos segments.
Aleshores, els segments que uneixen els punts migs de les arestes oposades s'intersecten en un punt, a més a més, aquest punt és el punt mig dels tres segments.

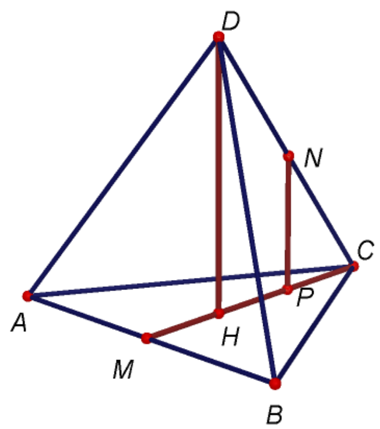
b) **Solució per a tetraedre regular**
Siga el tetraedre regular ABCD d'aresta $\overline{AB} = a$
Siga $\overline{DH}$ altura del tetraedre.
Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{AB}$.
Siga N el punt mig de l'artesta $\overline{CD}$ oposada a l'aresta $\overline{AB}$.
H és el baricentre del triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$.

$\overline{CM} = a\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Aplicant la propietat del baricentre: $\overline{CH} = \dfrac{2}{3}\overline{CM} = a\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CHD}$:

$\overline{DH} = a\sqrt{\dfrac{2}{3}}$



Siga P la projecció de N sobre el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
Els triangles $\overset{\Delta}{CHD}$, $\overset{\Delta}{CPN}$ són semblants i de raó 2:1.

Aplicant el teorema de Tales: $\overline{PN} = \dfrac{1}{2}\overline{DN} = \dfrac{a}{2}\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

$\overline{MP} = \overline{MH} + \overline{HP} = \dfrac{2}{3}\overline{MC} = a\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MPN}$: $\overline{MN}^2 = \frac{1}{2}a^2$.

La suma dels quadrats de les arestes del tetraedre regular ABCD és: $6\overline{AB}^2 = 6a^2$.
La suma dels quadrats dels tres segments que uneixen els punts migs les arestes del tetraedre equilàter ABCD és: $3\overline{MN}^2 = 3\frac{1}{2}a^2 = \frac{3}{2}a^2$.

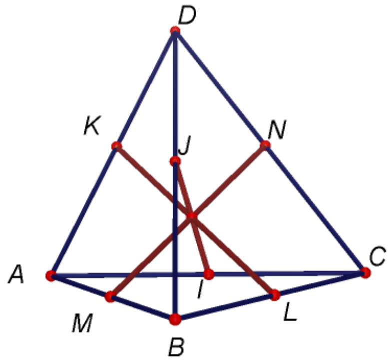
Notem que $6\cdot\overline{AB}^2 = 4\cdot 3\cdot\overline{MN}$.

Solució general
Sense pèrdua de generalitat, siga el tetraedre ABCD amb les següents coordenades cartesianes.

$A(0,0,0)$, $B(b,0,0)$, $C(a,c,0)$, $D(d,e,f)$.

$\overrightarrow{AB}=(b,0,0)$, $\overrightarrow{AC}=(a,c,0)$, $\overrightarrow{BC}=(a-b,c,0)$,

$\overrightarrow{BD}=(d-b,e,f)$, $\overrightarrow{AD}=(d,e,f)$, $\overrightarrow{CD}=(d-a,e-c,f)$.



$\overline{AB}^2 = b^2$.

$\overline{AC}^2 = a^2+c^2$.

$\overline{BC}^2 = a^2+b^2+c^2-2ab$.

$\overline{BD}^2 = b^2+d^2+e^2+f^2-2bd$.

$\overline{AD}^2 = d^2+e^2+f^2$.

$\overline{CD}^2 = a^2+d^2+e^2+f^2-2ad-2ce$.

$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2+\overline{BC}^2+\overline{BD}^2+\overline{AD}^2+\overline{CD}^2 = 3\left(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2\right)-2(ab+bd+ad+ce)$$

Siguen I i J els punts mig de les arestes oposades $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$, respectivament.
Les seues coordenades són:

$I\left(\frac{a}{2},\frac{c}{2},0\right)$, $J\left(\frac{b+d}{2},\frac{e}{2},\frac{f}{2}\right)$, $\overrightarrow{IJ}=\left(\frac{b+d-a}{2},\frac{e-c}{2},\frac{f}{2}\right)$.

$$\overline{IJ}^2 = \frac{1}{4}\left(b^2+c^2+d^2+e^2+f^2+2(bd-ce-ab-ad)\right).$$

Siguen K i L els punts mig de les arestes oposades $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$, respectivament.
Les seues coordenades són:

$K\left(\frac{d}{2},\frac{e}{2},\frac{f}{2}\right)$, $L\left(\frac{a+b}{2},\frac{c}{2},0\right)$, $\overrightarrow{KL}=\left(\frac{a+b-d}{2},\frac{c-e}{2},\frac{-f}{2}\right)$.

$$\overline{KL}^2 = \frac{1}{4}\left(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2+2(ab-ad-bd-ce)\right).$$

Siguen M i N els punts mig de les arestes oposades $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$, respectivament.
Les seues coordenades són:

$M\left(\frac{b}{2},0,0\right)$, $N\left(\frac{a+d}{2},\frac{c+e}{2},\frac{f}{2}\right)$, $\overrightarrow{MN}=\left(\frac{a+d-b}{2},\frac{c+e}{2},\frac{f}{2}\right)$.

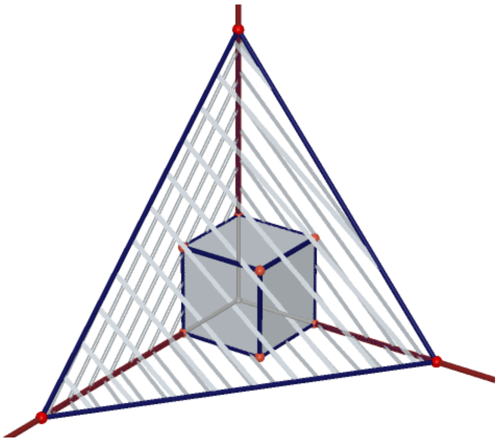
$$\overline{MN}^2 = \frac{1}{4}\left(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2+2(ad-ab-bd+ce)\right).$$

$$\overline{IJ}^2+\overline{KL}^2+\overline{MN}^2 = \frac{1}{4}\left(3\left(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2\right)-2(ab+bd+ad+ce)\right).$$

$$4\left(\overline{IJ}^2+\overline{KL}^2+\overline{MN}^2\right) = 3\left(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2\right)-2(ab+bd+ad+ce).$$

Problema 22

Les arestes d'una piràmide triangular que ixen del vèrtex A són perpendiculars a parelles i les seues mesures són a, b, c.
Determineu el volum del cub inscrit en la piràmide tal que un dels seus vèrtexs és A.



Solució:

Siga la piràmide triangular APQR, $\overline{AP}=a$, $\overline{AQ}=b$, $\overline{AR}=c$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{APQ}$:

$\overline{PQ}=\sqrt{a^2+b^2}$.

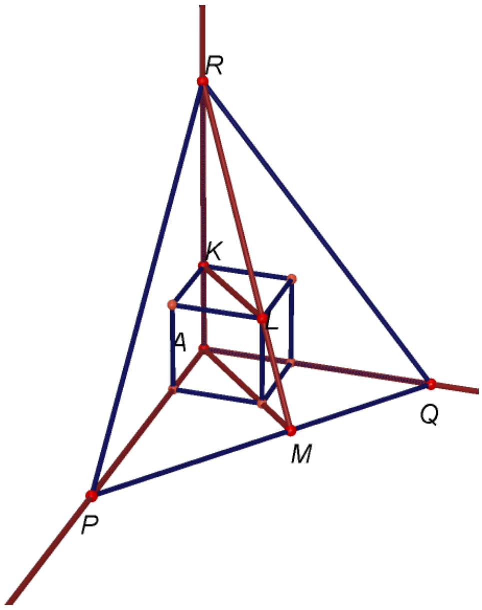
Siga K en l'aresta $\overline{AR}$ vèrtex del cub inscrit en la piràmide.

Siga $\overline{AK}=x$, aresta del cub.

Siga $\overline{KL}=x\sqrt{2}$ diagonal de la cara superior del cub.

La recta RL talla l'aresta $\overline{PQ}$ en el punt M.

$\angle PAM=45^o$. AM és bisectriu de $\angle PAQ$.



Aplicant la propietat de la bisectriu al triangle $\overset{\Delta}{APQ}$:

$$\frac{\overline{PM}}{a}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}-\overline{PM}}{b}.$$

$$\overline{PM}=\frac{a}{a+b}\sqrt{a^2+b^2}.$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{APM}$:

$$\frac{\overline{PM}}{\sin 45^o}=\frac{\overline{AM}}{\sin\angle APM}.$$

$$\frac{\frac{a}{a+b}\sqrt{a^2+b^2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\overline{AM}}{\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}.$$

$$\overline{AM}=\frac{ab\sqrt{2}}{a+b}.$$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{MAR}$, $\overset{\Delta}{LKR}$ són semblants, aplicant el teorema de Tales:

$\frac{x\sqrt{2}}{c-x}=\frac{\frac{ab\sqrt{2}}{a+b}}{c}$. Resolent l'equació:

$$x=\frac{abc}{ab+bc+ca}.$$

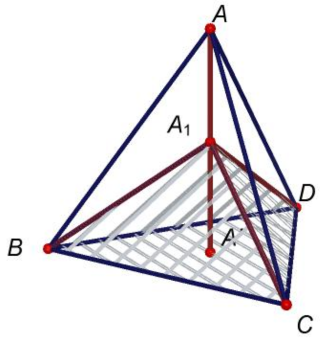
El volum del cub és: $V_{cub}=x^3=\left(\frac{abc}{ab+bc+ca}\right)^3$.

Problema 23
Siga el tetraedre regular ABCD d'aresta a.

Siga A' la projecció de A sobre la base $\overset{\Delta}{BCD}$.

Siga A_1 el punt mig del segment $\overline{AA'}$.

Proveu que el tetraedre A_1BCD té tres cares triangles rectangles.



Solució:

Els triangles $\overset{\Delta}{AA'B}$, $\overset{\Delta}{AA'C}$, $\overset{\Delta}{AA'D}$ són rectangles i d'hipotenusa a, aleshores:

$\overline{BA'} = \overline{CA'} = \overline{DA'} = \sqrt{a^2 - \overline{AA'}}$.

Aleshores, A' és el circumcentre (també el baricentre) del triangle equilàter $\overset{\Delta}{BCD}$.

Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{CD}$.

$\overline{BM} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.

Per la propietat del baricentre:

$\overline{BA'} = \frac{2}{3}\overline{BM} = \frac{\sqrt{3}}{3}a$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BA'A}$:

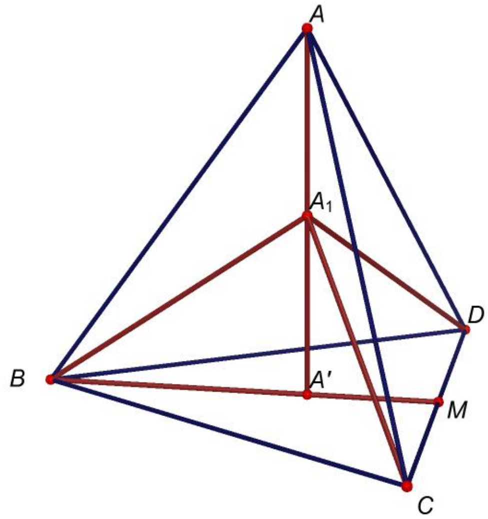
$\overline{AA'} = \sqrt{\frac{2}{3}}a$.

$\overline{A'A_1} = \frac{1}{2}\overline{AA'} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}a$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BA'A_1}$:

$\overline{BA_1} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$.

$\overline{BA_1} = \overline{CA_1} = \overline{DA_1} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$.



Notem que $\overline{BA_1}^2 + \overline{CA_1}^2 = \overline{BC}^2$. Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{BA_1C}$ és rectangle.

Aleshores, el tetraedre A_1BCD té tres cares triangles rectangles.

Problema 24
La suma dels quadrats de totes les arestes d'una piràmide triangular regular és P. Determineu l'àrea màxima d'una cara lateral.

Solució:

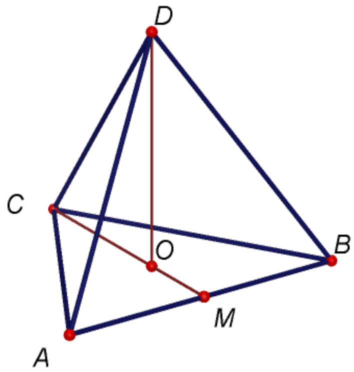
Siga ABCD la piràmide triangular de base $\overset{\Delta}{ABC}$ triangle equilàter.
Siga $\overline{AB}=a$ aresta de la base. Siga $\overline{AD}=b$ aresta lateral.
Per hipòtesi $3(a^2+b^2)=P$.

Siga O el baricentre de la base $\overset{\Delta}{ABC}$. Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{AB}$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMC}$:

$\overline{CM}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$. Aplicant la propietat del baricentre:

$\overline{CO}=\frac{2}{3}\overline{CM}=\frac{\sqrt{3}}{3}a$, $\overline{OM}=\frac{1}{3}\overline{CM}=\frac{\sqrt{3}}{6}a$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{COD}$:

$\overline{OD}^2=b^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DOM}$:

$\overline{DM}^2=\overline{OD}^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{6}a\right)^2$. $\overline{SM}^2=b^2-\frac{1}{3}a^2+\frac{1}{12}a^2$.

$\overline{DM}^2=b^2-\frac{1}{4}a^2$.

L'àrea de la cara lateral $\overset{\Delta}{ABD}$ és:

$S(a,b)=\frac{1}{2}a\sqrt{b^2-\frac{1}{4}a^2}$. $b^2=\frac{P}{3}-a^2$. $S(a)=\frac{1}{2}a\sqrt{\frac{P}{3}-a^2-\frac{1}{4}a^2}$.

$S(a)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{P}{3}a^2-\frac{5}{4}a^4}$, $a>0$.

L'àrea màxima s'assoleix en el màxim de la funció $f(a)=\frac{P}{3}a^2-\frac{5}{4}a^4$.

Derivem la funció f(a):

$f'(a)=\frac{2P}{3}a-5a^3$.

$f'(a)=0$, $\frac{2P}{3}a-5a^3=0$. Resolent l'equació: $a=\sqrt{\frac{2P}{15}}$.

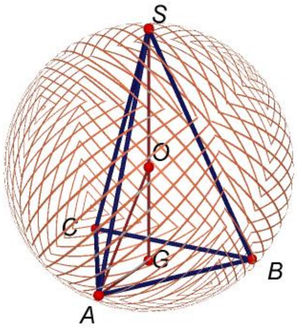
$f''(a)=\frac{2P}{3}-15a^2$. $f''\left(\sqrt{\frac{2P}{15}}\right)=\frac{2P}{3}-15\frac{2P}{5}=-\frac{14P}{3}<0$.

Aleshores, el màxim s'assoleix quan $a=\sqrt{\frac{2P}{15}}$.

L'àrea màxima és: $S\left(\sqrt{\frac{2P}{15}}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{P}{3}\left(\sqrt{\frac{2P}{15}}\right)^2-\frac{5}{4}\left(\sqrt{\frac{2P}{15}}\right)^4}=\frac{P\sqrt{5}}{30}$.

Problema 25
a) Calculeu el volum màxim d'una piràmide regular triangular inscrita en una esfera de radi R.
b) Calculeu el valor màxim de la suma de les arestes d'una piràmide regular triangular inscrita en una esfera de radi R.

Solució:
Siga l'esfera de centre O i radi R



Siga la piràmide ABCS de base el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$
Siga $\overline{AB}=a$, $\overline{AS}=\overline{BS}=\overline{CS}=b$.
Siga G el baricentre.
$\overline{OS}=\overline{OA}=R$. Siga $\alpha=\angle AOS$.

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{AOS}$
$b^2=R^2+R^2-2R^2\cos\alpha$.
$b=R\sqrt{2-2\cos\alpha}$.
$\overline{AG}=\frac{\sqrt{3}}{3}a$.

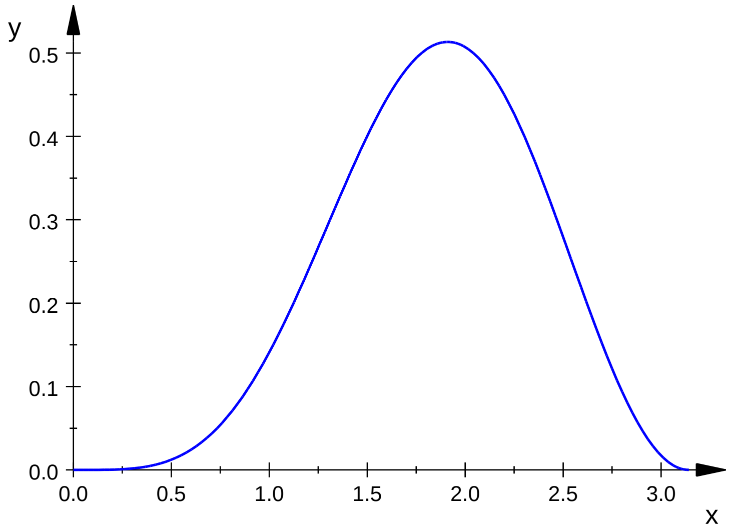
Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AOG}$.
$a=R\sqrt{3}\sin\alpha$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AGS}$:
$$\overline{SG}^2=2R^2-2R^2\cos\alpha-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}R\sqrt{3}\sin\alpha\right)^2.$$
$\overline{SG}=R\sqrt{2-2\cos\alpha-\sin^2\alpha}$
a)
El volum de la piràmide ABCS és:
$$V=\frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\overline{SG}.$$
$$V(\alpha)=\frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{4}3R^2\sin^2\alpha\cdot R\sqrt{2-2\cos\alpha-\sin^2\alpha},\ \alpha\in[0,\pi].$$
$$V(\alpha)=\frac{\sqrt{3}}{4}R^3\sqrt{2\sin^4\alpha-2\sin^4\alpha\cos\alpha-\sin^6\alpha}.$$
$$V'(\alpha)=\frac{\sqrt{3}}{4}R^3\frac{8\sin^3\alpha\cos\alpha-8\sin^3\alpha\cos^2\alpha+2\sin^5\alpha-6\sin^5\alpha\cos\alpha}{2\sqrt{2\sin^4-2\sin^2\alpha\cos\alpha-\sin^6\alpha}}.$$
$V'(\alpha)=0$.
$8\sin^3\alpha\cos\alpha-8\sin^3\alpha\cos^2\alpha+2\sin^5\alpha-6\sin^5\alpha\cos\alpha=0$. Simplificant:
$4\cos\alpha-4\cos^2\alpha+\sin^2\alpha-3\sin^2\alpha\cos\alpha=0$.
$4\cos\alpha-4\cos^2\alpha+\sin^2\alpha-3\sin^2\alpha\cos\alpha=0$.
$3\cos^3\alpha-5\cos^2\alpha+\cos\alpha+1=0$.
$\cos\alpha=\frac{-1}{3}$.
Estudiant el signe de la primera derivada:
$\cos\alpha=\frac{-1}{3}$ és un màxim relatiu estricte.

$a = b = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$, és a dir, és un tetraedre regular.

El volum màxim és:

$$V\left(\arccos\frac{-1}{3}\right) = \frac{8\sqrt{3}}{27}R^3 .$$



Gràfica per a $R = 1$, $y = \dfrac{\sqrt{3}}{4}\sin^2\alpha\sqrt{2 - 2\cos\alpha - \sin^2\alpha}$.

b)

La suma de les arestes és:

$f(a,b) = 3a + 3b$.

$f(\alpha) = 3\left(\sqrt{3}R \cdot \sin\alpha + R\sqrt{2 - 2\cos\alpha}\right)$, $\alpha \in [0, \pi]$.

$$f'(\alpha) = 3R\left(\sqrt{3}\cos\alpha + \frac{\sqrt{2}\sin\alpha}{2\sqrt{1-\cos\alpha}}\right)$$

$f'(\alpha) = 0$.

$$\sqrt{3}\cos\alpha + \frac{\sqrt{2}\sin\alpha}{2\sqrt{1-\cos\alpha}} = 0 .$$

$$3\cos^2\alpha = \frac{1}{2}\frac{\sin^2\alpha}{1-\cos\alpha} .$$

$3\cos^3\alpha - 7\cos^2\alpha + 1 = 0$. Resolent l'equació:

$\cos\alpha = \dfrac{-1}{3}$, $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$.

La solució $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$ no és solució de $\sqrt{3}\cos\alpha + \dfrac{\sqrt{2}\sin\alpha}{2\sqrt{1-\cos\alpha}} = 0$.

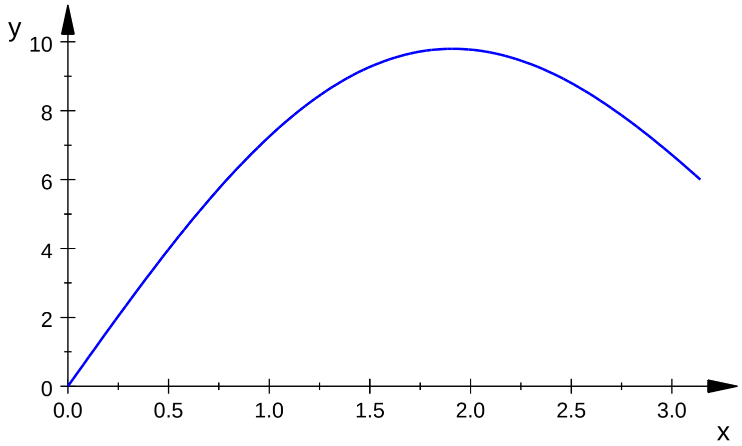
Estudiant el signe de la primera derivada:

$\cos\alpha = \dfrac{-1}{3}$ és un màxim relatiu estricte.

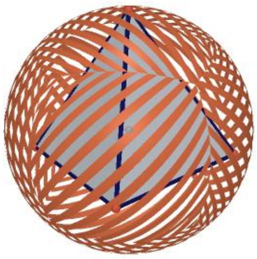
$a = b = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$, és a dir, és un tetraedre regular.

La suma màxima és:

$f\left(\arccos\frac{-1}{3}\right)=4\sqrt{6}R$.



Gràfica per a $R=1$, $y=3\left(\sqrt{3}\sin x+\sqrt{2-2\cos x}\right)$.



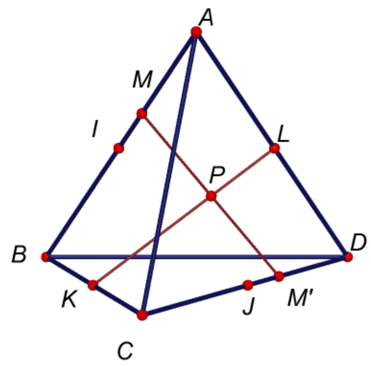
Problema 26

Siga el tetraedre ABCD.

Siguen I, J, K, L els punts migs de les arestes $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{BC}$, $\overline{AD}$, respectivament.

a) Demostreu que $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=2\cdot\overrightarrow{JK}$.

b) Demostreu que per a cada punt O del segment $\overline{KL}$ existeixen els punts M i M' de les arestes $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ tal que P és el punt mig del segment $\overline{MM'}$.



Solució:

a)

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AL}+\overrightarrow{LK}+\overrightarrow{KB}$ (1)

$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DL}+\overrightarrow{LK}+\overrightarrow{KC}$ (2)

Sumant ambdues expressions:

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=\left(\overrightarrow{AL}+\overrightarrow{DL}\right)+\left(\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}\right)+2\cdot\overrightarrow{JK}$ (3)

Per ser L punt mig del segment $\overline{AD}$, $\overrightarrow{AL}+\overrightarrow{DL}=\vec{O}$.

Per ser K punt mig del segment $\overline{BC}$, $\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}=\vec{O}$.

Aleshores, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=2\cdot\overrightarrow{JK}$.

b)

Si P pertany al segment $\overline{KL}$, existeix $\lambda\in[0,1]$ tal que $\overrightarrow{KP}=\lambda\cdot\overrightarrow{KL}$.

Siga M un punt de l'aresta $\overline{AB}$, existeix $\alpha\in[0,1]$ tal que $\overrightarrow{BM}=\alpha\cdot\overrightarrow{BA}$.

Siga M' un punt de l'aresta $\overline{CDB}$, existeix $\beta\in[0,1]$ tal que $\overrightarrow{CM'}=\beta\cdot\overrightarrow{CD}$.

Vegem que existeixen $\alpha.\,\beta\in[0,1]$ tal que P és el punt mig del segment $\overline{MM'}$, és a dir, $\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{PM'}=\vec{O}$.

$\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{PK}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{BM}$ (4)

$\overrightarrow{PM'}=\overrightarrow{PK}+\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{CM'}$ (5)

Sumant ambdues expressions:

$\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{PM'}=2\cdot\overrightarrow{PK}+\left(\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}\right)+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM'}$ (6)

$\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{PM'}=2\cdot\overrightarrow{PK}+\vec{0}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM'}$ (7)

$\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{PM'}=2\cdot\overrightarrow{PK}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM'}$ (8)

$\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{PM'}=2\lambda\cdot\overrightarrow{LK}+\alpha\cdot\overrightarrow{BA}+\beta\cdot\overrightarrow{CD}$ (9)

Aplicant l'apartat a)

$\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{PM'}=-\lambda\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}\right)+\alpha\cdot\overrightarrow{BA}+\beta\cdot\overrightarrow{CD}$ (10)

$\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{PM'}=(\alpha-\lambda)\cdot\overrightarrow{BA}+(\beta-\lambda)\cdot\overrightarrow{CD}$ (11)

$\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{PM'}=\vec{O}$ si $(\alpha-\lambda)\cdot\overrightarrow{BA}+(\beta-\lambda)\cdot\overrightarrow{CD}=\vec{0}$.

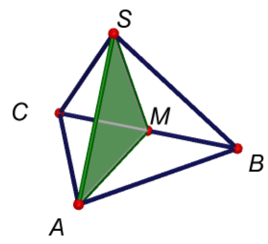
Els vectors $\overrightarrow{BA},\overrightarrow{CD}$ són linealment independents, aleshores:

$$\begin{cases}\alpha=\lambda\\ \beta=\lambda\end{cases}.$$

Per tant si $\begin{cases}\alpha=\lambda\\ \beta=\lambda\end{cases}$, P és el punt mig del segment $\overline{MM'}$.

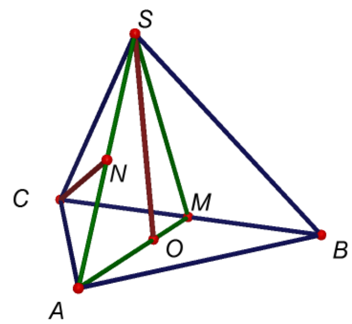
Problema 27

Siga la piràmide ABCS de base el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$
La secció produïda en la piràmide ABCS per un plànol que passa pel vèrtexs S i A, i pel punt mig M de l'aresta de la base $\overline{BC}$ és un triangle equilàter de costat 6cm. Calculeu l'àrea i el volum de la piràmide.



Solució:
$\overline{AM}=\overline{AS}=\overline{MS}=6$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMB}$:
$\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{BS}=\overline{BC}=\overline{CS}=4\sqrt{3}$.
Siga O el punt mig del segment $\overline{AM}$.
$\overline{OS}$ és l'altura de la piràmide ABCS.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AOS}$:
$\overline{OS}=3\sqrt{3}$.
El volum de la piràmide és:

$$V_{ABCS}=\frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{4}\left(4\sqrt{3}\right)^2\cdot 3\sqrt{3}=36cm^3.$$

Notem que el triangle $\overset{\Delta}{BCS}$ és equilàter de costat $\overline{BC}=4\sqrt{3}$
.

Els triangles $\overset{\Delta}{ABS}$, $\overset{\Delta}{ACS}$ són iguals.
Siga N el punt mig de l'aresta $\overline{AS}$.
$\overline{AN}=3$, $\overline{AC}=4\sqrt{3}$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ANC}$:
$\overline{CN}=\sqrt{39}$.

L'àrea del triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ACS}$ és:

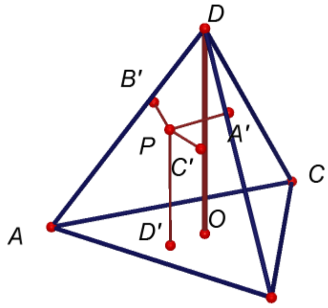
$$S_{ACS}=\frac{1}{2}6\sqrt{39}$$

L'àrea de la piràmide ABCDS és:

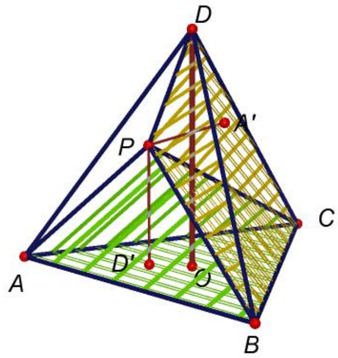
$$S_{ABCDS}=2S_{ABC}+2\cdot S_{ACS}=2\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\left(4\sqrt{3}\right)^2\right)+6\sqrt{39}=79.04cm^2.$$

Problema 28
La suma de distàncies d'un punt interior d'un tetraedre regular a les cares és igual a l'altura del tetraedre.

Solució:
Siga el tetraedre regular ABCD.
Siga P un punt interior al tetraedre.



Siga A' la projecció de P sobre la cara $\overset{\Delta}{BCD}$.
Siga B' la projecció de P sobre la cara $\overset{\Delta}{ACD}$.
Siga C' la projecció de P sobre la cara $\overset{\Delta}{ABD}$.
Siga D' la projecció de P sobre la cara $\overset{\Delta}{ABC}$.



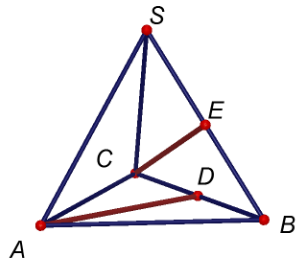
Siga O la projecció de D sobre la cara $\overset{\Delta}{ABC}$.
L'altura del tetraedre ABCD és $\overline{OD}$.

El volum del tetraedre ABCD és:
$V_{ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABC}\cdot\overline{OD}$.
El volum del tetraedre ABCD és igual a la suma dels volums dels tetraedres ABCP, ABDP, ACDP i BCDP.

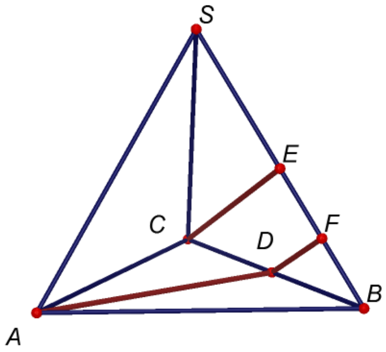
$V_{ABCD}=V_{ABCP}+V_{ABDP}+V_{ACDP}+V_{BCDP}$.
$V_{ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABC}\cdot\overline{PB'}+\frac{1}{3}S_{ABD}\cdot\overline{PC'}+\frac{1}{3}S_{ACD}\cdot\overline{PB'}+\frac{1}{3}S_{BCD}\cdot\overline{PA'}$.
$V_{ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABC}\left(\overline{PB'}+\overline{PC'}+\overline{PB'}+\overline{PA'}\right)$.
Aleshores:
$\frac{1}{3}S_{ABC}\left(\overline{PB'}+\overline{PC'}+\overline{PB'}+\overline{PA'}\right)=\frac{1}{3}S_{ABC}\cdot\overline{OD}$.
Per tant, $\overline{PA'}+\overline{PB'}+\overline{PC'}+\overline{PD'}=\overline{OD}$.

Problema 29

En el tetraedre regular ABCS, $\overline{AD}$ és la mitjana del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$, E és el punt mig de l'aresta $\overline{BS}$.
Determineu l'angle que formen les rectes AD, CE.
Gúsiev, problema 657.



Solució:
Siga $\overline{AB} = a$ aresta del tetraedre regular.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ADB}$:

$$\overline{AD} = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

$$\overline{CE} = \overline{AD} = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

Pel punt D tracem una recta paral·lela a la recta CE que talla l'aresta $\overline{BS}$ en el punt F.

Els triangles $\overset{\Delta}{BCE}$, $\overset{\Delta}{BDF}$ són semblants i de raó 2:1.

Aleshores, $\overline{DF} = \frac{1}{2}\overline{CE} = \frac{\sqrt{3}}{4}a$.

L'angle que formen les rectes AD i CE és igual a l'angle $\alpha = \angle ADF$.

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABF}$:

$$\overline{AF}^2 = a^2 + \left(\frac{a}{4}\right)^2 - 2a\frac{a}{4}\cos 60^\circ.$$

$$\overline{AF}^2 = \frac{13}{16}a^2.$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ADF}$

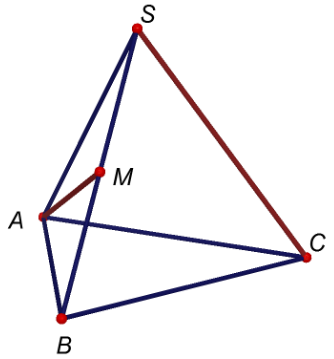
$$\overline{AF}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BF}^2 - 2\cdot\overline{AD}\cdot\overline{BF}\cdot\cos\alpha$$

$$\frac{13}{16} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}a\right)^2 - 2\frac{\sqrt{3}}{2}a\frac{\sqrt{3}}{2}a\cdot\cos\alpha.$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{6}. \quad \alpha = \arccos\frac{1}{6} \approx 80^\circ 24' 21''.$$

Problema 30

En el tetraedre regular ABCS, $\overline{AM}$ és la mitjana del triangle $\overset{\Delta}{ABS}$
.
Determineu l'angle que formen les rectes AM, CS.
Gúsiev, problema 662.



Solució:
Siga $\overline{AB} = a$ aresta del tetraedre regular.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABM}$:

$$\overline{AM} = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

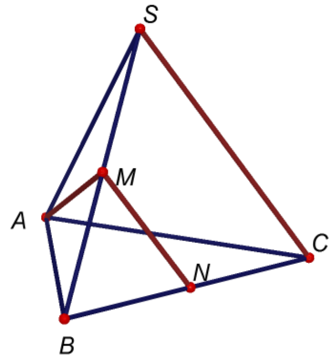
Pel punt M tracem una recta paral·lela a la recta CS que talla l'aresta $\overline{BC}$ en el punt N.

Els triangles $\overset{\Delta}{BCS}$, $\overset{\Delta}{BNM}$ són semblants i de raó 2:1.

Aleshores, $\overline{BN} = \frac{1}{2}\overline{CS} = \frac{1}{2}a$.

L'angle que formen les rectes AM i CS és igual a l'angle $\alpha = \angle AMN$.

$$\overline{AN} = \overline{AM} = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$



Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{AMN}$:

$$\overline{AN}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{MN}^2 - 2\cdot\overline{AM}\cdot\overline{MN}\cdot\cos\alpha.$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2 - 2\frac{\sqrt{3}}{2}a\frac{1}{2}a\cdot\cos\alpha.$$

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{6}. \quad \alpha = \arccos\frac{\sqrt{3}}{6} \approx 73º13'17''.$$

Problema 31
Siga ABCS un tetraedre regular.

Calculeu l'angle que formen l'aresta $\overline{AB}$ i la cara $\overset{\Delta}{ACS}$.
Gúsiev, problema 637.

Solució:
Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{CS}$.

La projecció de aresta $\overline{AB}$ sobre $\overset{\Delta}{ACS}$ pertany a la recta AM.
L'angle que cerquem és $\alpha = \angle MAB$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMC}$:

$$\overline{AM} = \overline{BM} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

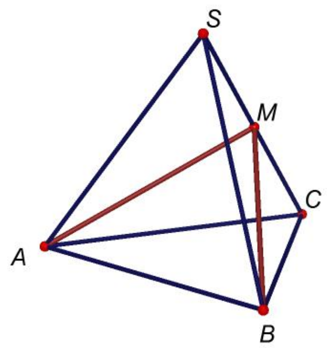
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{AMB}$:

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 + a^2 - 2\frac{\sqrt{3}}{2}a \cdot a \cdot \cos\alpha.$$

Simplificant:

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\alpha = \arccos\frac{\sqrt{3}}{3} \approx 54º44'8''.$$



Problema 32

En el tetraedre regular ABCS, per la mitjana $\overline{AD}$ de la base $\overset{\Delta}{ABC}$ i K el punt mig de l'aresta $\overline{SB}$, s'ha dibuixat un plànol. Determineu l'angle d'aquest plànol i la base $\overset{\Delta}{ABC}$.
Gúsiev problema 700.

Solució:
Siga el tetraedre ABCS d'aresta $\overline{AB} = a$.

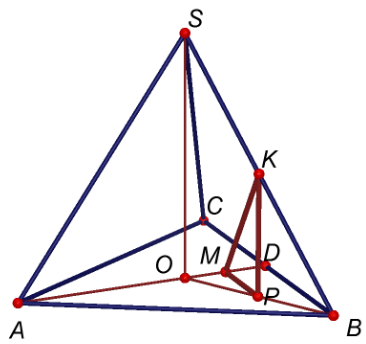
$\overline{KD} = \frac{1}{2}\overline{CS} = \frac{1}{2}a$.

Siga O la projecció de S sobre la base $\overset{\Delta}{ABC}$ (circumcentre del triangle).

$\overline{OS} = \frac{2}{3}\overline{AD} = \frac{\sqrt{3}}{3}a$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AOS}$:

$\overline{OS} = \frac{\sqrt{6}}{3}a$.



Siga P la projecció de K sobre la base $\overset{\Delta}{ABC}$.

$\overline{PK} = \frac{1}{2}\overline{OS} = \frac{\sqrt{6}}{6}a$.

Siga M la projecció de K sobre $\overline{AD}$.

L'angle que forma el plànol ADK i la base $\overset{\Delta}{ABC}$ és $\alpha = \angle KMP$.
Siga $x = \overline{AM}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangles $\overset{\Delta}{AMK}$, $\overset{\Delta}{DMK}$:

$$\overline{KM}^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 - x^2,\ \overline{KM}^2 = \left(\frac{1}{2}a\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a - x\right)^2.$$

Resolent el sistema:

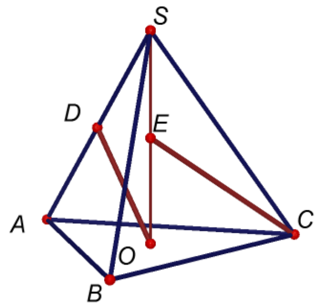
$$\begin{cases} x = \frac{5\sqrt{3}}{12}a \\ \overline{KM} = \frac{\sqrt{33}}{12}a \end{cases}.$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{KMP}$:

$$\sin\alpha = \frac{\frac{\sqrt{6}}{6}}{\frac{\sqrt{33}}{12}} = \frac{2\sqrt{22}}{11}.\quad \alpha = \arcsin\left(\frac{2\sqrt{22}}{11}\right) \approx 58º31'4''.$$

Problema 33

Siga D el punt mig de l'aresta $\overline{AS}$ del tetraedre regular ABCS.
Siga E el punt mig de l'altura $\overline{OS}$.
Determineu l'angle de les rectes CE i DO.
Gúsiev, problema 654.



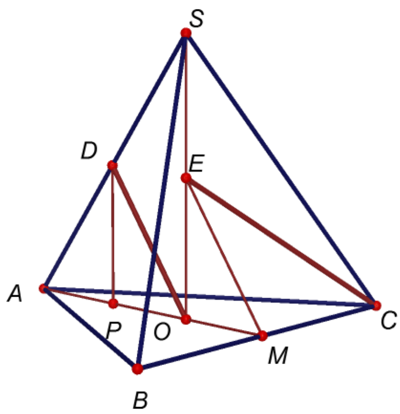
Solució:
Siga el tetraedre regular ABCS d'aresta $\overline{AB} = a$.
Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{BC}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\overset{\Delta}{BMA}$:

$$\overline{AM} = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

O és el baricentre de la base. Aplicant la propietat del baricentre:

$$\overline{AO} = \frac{2}{3}\overline{AM} = \frac{\sqrt{3}}{3}a. \quad \overline{OM} = \frac{1}{3}\overline{AM} = \frac{\sqrt{3}}{6}a.$$



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AOS}$:

$$\overline{OS} = \frac{\sqrt{6}}{3}a.$$

$$\overline{OE} = \frac{1}{2}\overline{OS} = \frac{\sqrt{6}}{6}a$$

Siga P la projecció de D sobre la base.

$$\overline{AP} = \overline{OP} = \overline{OM} = \frac{\sqrt{3}}{6}a.$$

Els triangles $\overset{\Delta}{OPD}$, $\overset{\Delta}{MOE}$. A més a més $\overline{PD}$, $\overline{OE}$ són paral·lels.
Aleshores, $\overline{OD}$ i $\overline{ME}$ són paral·lels.
L'angle que formen les rectes CE i DO és $\alpha = \angle MEC$.
$\angle EMC = 90^{\circ}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MOE}$:

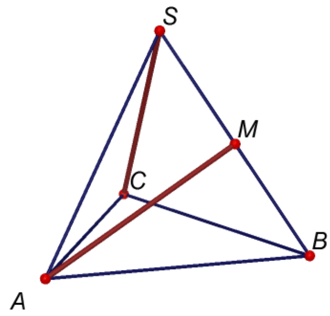
$$\overline{EM} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{6}a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6}a\right)^2} = \frac{1}{2}a.$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MEC}$:

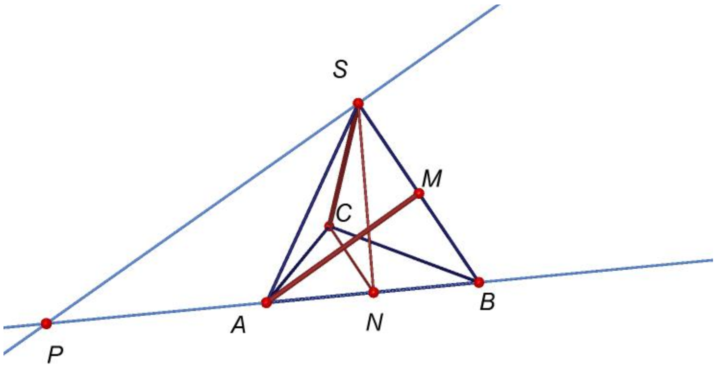
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\overline{MC}}{\overline{EM}} = \frac{\frac{1}{2}a}{\frac{1}{2}a} = 1.$$

$\alpha = 45^{\circ}$.

Problema 34
Siga ABCD un tetraedre regular.
Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{BS}$.
Calculeu l'angle de la mitjana $\overline{AM}$ i l'aresta $\overline{CS}$.
Gúsiev, problema 662.

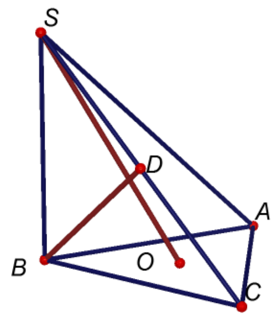


Solució:
Sig el tetraedre regular ABCS d'aresta $\overline{AB} = a$.
Pel vèrtex S tracem una paral·lela a la mitjana $\overline{AM}$ que talla la recta AB en el punt P.
$\angle SPB = 30^o$, $\angle PSB = 90^o$.
$\overline{PB} = 2\overline{BS} = 2a$, $\overline{PS} = a\sqrt{3}$



Siga N el punt mig de l'aresta $\overline{AB}$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMB}$:
$\overline{AM} = \overline{CN} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.
$\overline{PN} = \frac{3}{2}a$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PNC}$:
$\overline{PC} = a\sqrt{3}$.
L'angle que formen les rectes AM, CS és $\alpha = \angle PSC$.
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{PSC}$:
$\left(a\sqrt{3}\right)^2 = \left(a\sqrt{3}\right)^2 + a^2 - 2a\sqrt{3}a \cdot \cos\alpha$.
$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{6}$, $\alpha = \arccos\frac{\sqrt{3}}{6} \approx 73^o 13' 17''$.

Problema 35



En la piràmide triangular ABCS la base $\overset{\Delta}{ABC}$ és un triangle equilàter i les cares $\overset{\Delta}{SAB}$ i $\overset{\Delta}{SBC}$ són perpendiculars a la base.
Siga l'aresta $\overline{SB}$ igual a l'aresta $\overline{AB}$.

Siga O el baricentre de la base $\overset{\Delta}{ABC}$. Siga D el punt mig de l'aresta $\overline{SC}$.
Calculeu l'angle que formen les rectes BD i SO.
Gúsiev, problema 671.

Solució 1:
Siga l'aresta $\overline{AB} = a$. L'aresta $\overline{SB}$ és perpendicular a la base.
Siga α l'angle que formen els vectors $\overrightarrow{OS}, \overrightarrow{BD}$.

$\overline{BO} = \frac{\sqrt{3}}{3}a$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BOS}$: $\overline{OS} = \frac{2\sqrt{3}}{3}a$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BCS}$: $\overline{SC} = a\sqrt{2}$. $\overline{BD} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$.

Aplicant el producte escalar als vectors $\overrightarrow{OS}, \overrightarrow{BD}$:

$$\overrightarrow{OS} \cdot \overrightarrow{BD} = \left\|\overrightarrow{OS}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{BD}\right\| \cdot \cos\alpha .$$

$$\overrightarrow{OS} \cdot \overrightarrow{BD} = \frac{2\sqrt{3}}{3}a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}a \cdot \cos\alpha \qquad (1)$$

$$\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BS}\right).$$

Per la propietat del baricentre: $\overrightarrow{BO} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right)$.

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{BS} - \overrightarrow{BO}.$$

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \left\|\overrightarrow{BA}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{BC}\right\| \cdot \cos 60^{\circ} = \frac{1}{2}a^2 .$$

Per ser ortogonals, $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BS} = 0$, $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BS} = 0$.
Aplicant el producte escalar als vectors $\overrightarrow{OS}, \overrightarrow{BD}$:

$$\overrightarrow{OS} \cdot \overrightarrow{BD} = \left(\overrightarrow{BS} - \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right)\right)\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BS}\right).$$

$$\overrightarrow{OS} \cdot \overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BS} \cdot \overrightarrow{BC} + \left\|\overrightarrow{BS}\right\|^2 - \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BS} - \frac{1}{3}\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2 - \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BS}\right).$$

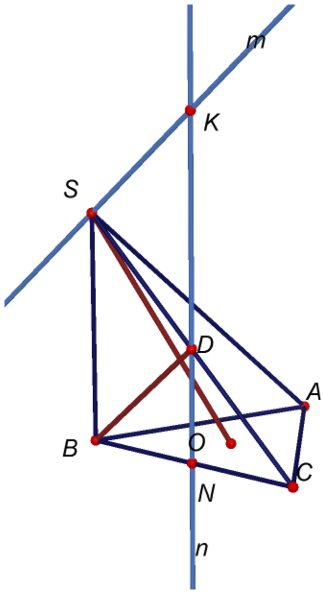
$$\overrightarrow{OS} \cdot \overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\left(a^2 - \frac{1}{6}a^2 - \frac{1}{3}a^2\right) = \frac{1}{4}a^2 \qquad (2)$$

Igualant les dues expressions del producte escalar:

$$\frac{\sqrt{6}}{3}a^2 \cdot \cos\alpha = \frac{1}{4}a^2 . \quad \cos\alpha = \frac{\sqrt{6}}{8} . \quad \alpha = \arccos\left(\frac{\sqrt{6}}{8}\right) \approx 72^{\circ}10'14'' .$$

Solució 2:

Siga l'aresta $\overline{AB} = a$. L'aresta $\overline{SB}$ és perpendicular a la base.
Siga la recta m paral·lela a la recta BD que passa pel vèrtex S.
Siga la recta n paral·lela a l'aresta $\overline{BS}$ que passa per D.
Les rectes m, n s'intersecten en el punt K que pertany al plànol BCS.
La recta n talla l'aresta $\overline{BC}$ en el punt mig N de la mateixa.
L'angle que formen les rectes OS i BD és l'angle $\beta = \angle KSO$.



$$\overline{BO} = \frac{\sqrt{3}}{3}a.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BOS}$:

$$\overline{OS} = \frac{2\sqrt{3}}{3}a.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BCS}$:

$$\overline{SC} = a\sqrt{2}. \quad \overline{BD} = \overline{SK} = \frac{\sqrt{2}}{2}a.$$

$$\overline{KN} = \overline{KD} + \overline{DN} = a + \frac{1}{2}a = \frac{3}{2}a$$

$$\overline{ON} = \frac{\sqrt{3}}{6}a$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ONK}$:

$$\overline{OK} = \frac{\sqrt{21}}{3}a.$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{KSO}$:

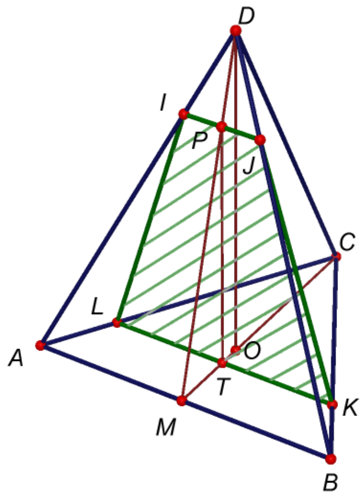
$$\left(\frac{\sqrt{21}}{3}a\right)^2 = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 - 2\frac{2\sqrt{3}}{3}a\frac{\sqrt{2}}{2}a\cdot\cos\beta.$$

$$\cos\beta = \frac{-\sqrt{6}}{8}, \quad \beta = \arccos\left(-\frac{\sqrt{6}}{8}\right) \approx 107^{o}49'46''.$$

Problema 36
La base d'una piràmide triangular és un triangle equilàter de costat 1.
Les altres arestes mesuren a.
Determineu la secció de la piràmide, perpendicular a la base, d'àrea màxima.

Solució:

Siga la piràmide ABCD de base el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat $\overline{AB}=1$.
Siga $\overline{AD}=\overline{BD}=\overline{CD}$.
La piràmide és recta. Siga $\overline{OD}=b$, altura de la piràmide. O és el baricentre de la base.
L'àrea màxima és igual a la secció IJKL, trapezi isòsceles.
L'aresta $\overline{AB}$ és paral·lela al costat $\overline{KL}$.
Siga $\overline{CK}=\overline{CL}=\overline{LK}=x$.
Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{AB}$.
Siga T el punt mig del segment $\overline{KL}$.
Siga P el punt mig del segment $\overline{IJ}$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CMA}$:
$\overline{CM}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CTL}$:
$\overline{CT}=\frac{\sqrt{3}}{2}x$. $\overline{MT}=\frac{\sqrt{3}}{2}(1-x)$.

Aplicant la propietat del baricentre al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$: $\overline{CO}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,

$\overline{OM}=\frac{\sqrt{3}}{6}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{COD}$: $b=\overline{OD}=\frac{1}{3}\sqrt{9a^2-3}$.

Siga $c=\overline{DM}$.

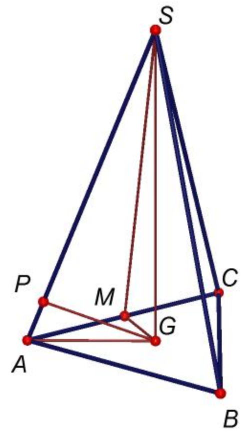
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{DOM}$, $\overset{\Delta}{PTM}$. Aplicant el teorema de Tales:
$\overline{PT}=3b(1-x)$, $\overline{PM}=3c(1-x)$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABD}$, $\overset{\Delta}{IJD}$. Aplicant el teorema de Tales:
$\overline{IJ}=3x-2$.
L'àrea del trapezi IJKL és:
$$S_{IJKL}=\frac{\overline{KL}+\overline{IJ}}{2}\overline{PT}=\frac{3x-2+x}{2}3b(1-x).$$
$$S(x)=3b(2x-1)(1-x)=3b\left(-2x^2+3x-1\right),\ x\in\left[\frac{2}{3},1\right].$$
La funció és una paràbola convexa.
El màxim s'assoleix en el vèrtex, $x=\frac{3}{4}$.
L'àrea màxima és: $S\left(\frac{3}{4}\right)=3b\frac{1}{8}=\frac{1}{8}\sqrt{9a^2-3}$.

Problema 37
La perpendicular baixada des del baricentre de la base d'una piràmide triangular regular a l'aresta és d. Determineu el volum de la piràmide si l'angle diedre de l'aresta de la base és α.

Solució:

Siga ABCS la piràmide triangular regular de base el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat $\overline{AB} = a$.
Siga G el baricentre de la base.
Siga $\overline{GS} = h$. Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{AC}$. $\angle SMG = \alpha$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMB}$:
$\overline{BM} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.
Aplicant la propietat del baricentre:
$\overline{AG} = \overline{BG} = \frac{2}{3}\overline{BM} = \frac{\sqrt{3}}{3}a$, $\overline{MG} = \frac{1}{3}\overline{BM} = \frac{\sqrt{3}}{6}a$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{GMS}$:
$\frac{h}{a} = \frac{\sqrt{3}}{6}\text{tg}\alpha$. Elevant al quadrat:

$$\frac{h^2}{a^2} = \frac{1}{12}\text{tg}^2\alpha \qquad (1)$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AGS}$: $\overline{AP} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2 - d^2}$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{GPS}$, $\overset{\Delta}{AGS}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{h}{d} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}a}{\sqrt{\frac{1}{3}a^2 - d^2}}.$$

Elevant al quadrat i simplificant:

$$h^2 = \frac{a^2d^2}{a^2 - 3d^2} \qquad (2)$$

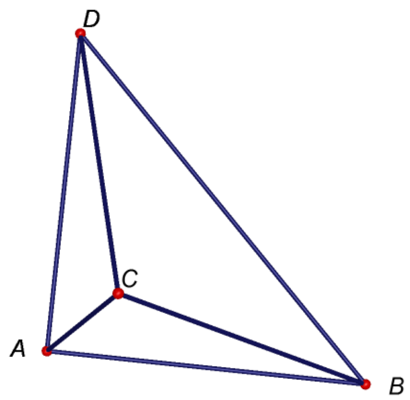
Resolent el sistema format per les expressions (1) (2):

$$a^2 = \frac{1}{\text{tg}^2\alpha}\left(12 + 3\text{tg}^2\alpha\right)d^2,\ h = \frac{\sqrt{3}}{6}\sqrt{12 + 3\text{tg}^2\alpha}\,d.$$

El volum de la piràmide és:

$$V = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{4}a^2h = \frac{4 + \text{tg}^2\alpha}{8\text{tg}^2\alpha}\sqrt{12 + 3\text{tg}^2\alpha} \cdot d^3.$$

Problema 38

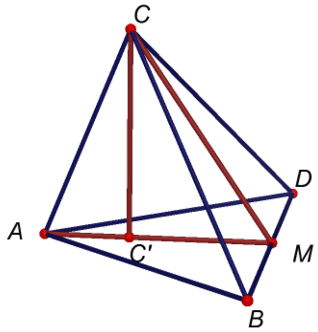


Les arestes del tetraedre ABCD són: $\overline{AC} = 4$,
$\overline{AB} = \overline{AD} = 4\sqrt{2}$, $\overline{BC} = \overline{CD} = 6$, $\overline{BD} = 8$.
Calculeu el seu volum.

Solució:

Notem que la cara $\overset{\Delta}{ABD}$ és un triangle rectangle isòsceles $A = 90^o$.

La cara $\overset{\Delta}{BDC}$ és un triangle isòsceles.
Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{BD}$.



Siga C' la projecció de C sobre la cara $\overset{\Delta}{ABD}$.
C' pertany al plànol mitja del segment $\overline{BD}$.

C' pertany a l'altura $\overline{AM}$ del triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABD}$.

Siga $\overline{CC'} = h$, altura del tetraedre sobre la base $\overset{\Delta}{ABD}$.
Siga $\overline{C'M} = x$.

El triangle $\overset{\Delta}{AMB}$ és rectangle i isòsceles, aleshores:
$\overline{AM} = \overline{BM} = 4$.
$\overline{AC'} = 4 - x$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CMB}$:
$\overline{CM} = 2\sqrt{5}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CC'M}$:
$x^2 + h^2 = \left(2\sqrt{5}\right)^2$.

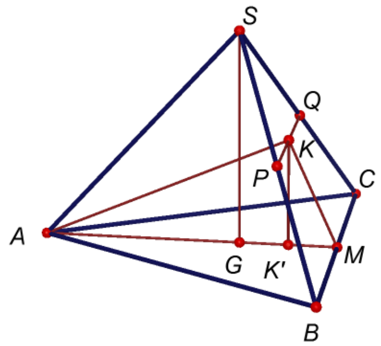
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ACC'}$:
$(4 - x)^2 + h^2 = 4^2$.
Resolent el sistema format per les dues equacions:

$$\begin{cases} x^2 + h^2 = 20 \\ x^2 - 8x + h^2 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = \dfrac{5}{2} \\ h = \dfrac{\sqrt{55}}{2} \end{cases}.$$

El volum del tetraedre ABCD és:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABD} \cdot h = \frac{1}{3}\frac{1}{2}4\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{55}}{2} = \frac{8\sqrt{55}}{3} \approx 19.7765.$$

Problema 39
Una piràmide triangular regular està tallada per un plànol que passa per un vèrtex de la base i pels punts migs de les arestes laterals oposades.
Determineu la raó entre l'àrea lateral i l'àrea de la base si sabem que el plànol secant és perpendicular a la cara oposada al vèrtex de la base del plànol.



Solució:

Siga ABCS la piràmide regular de base el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$.
Siga $\overline{AB} = a$.

Siga G el baricentre del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
Siga $\overline{SG} = h$ altura de la piràmide.
Siguen P i Q els punts migs de les arestes $\overline{SB}$, $\overline{SC}$.
Considerem la secció formada pels punts A, P, Q.
Siga K el punt mig del segment $\overline{PQ}$. Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{BC}$.

La secció i la cara $\overset{\Delta}{BCS}$ són perpendiculars, aleshores: $\angle AKM = 90º$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangles $\overset{\Delta}{AMB}$: $\overline{AM} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.

Aplicant la propietat del baricentre: $\overline{AG} = \frac{\sqrt{3}}{3}a$, $\overline{GM} = \frac{\sqrt{3}}{6}a$.

Siga K' la projecció de K sobre la base. K' pertany al segment $\overline{AM}$.

$\overline{KK'} = \frac{1}{2}\overline{SG} = \frac{1}{2}h$. $\overline{G'K'} = \overline{K'M} = \frac{1}{2}\overline{GM} = \frac{\sqrt{3}}{12}a$. $\overline{AK'} = \frac{5\sqrt{3}}{12}a$.

Aplicant el teorema de l'altura al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AKM}$:
$\overline{KK'} = \overline{AK'} \cdot \overline{K'M}$.

$\left(\frac{h}{2}\right)^2 = \left(\frac{5\sqrt{3}}{12}a\right)^2\left(\frac{\sqrt{3}}{12}a\right)^2$. Simplificant: $h^2 = \frac{5}{12}a^2$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{SGM}$:

$$\overline{SM} = \sqrt{h^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{6}a\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}a.$$

L'àrea lateral de la piràmide és: $S_L = 3S_{BCS} = 3\left(\frac{1}{2}a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}a\right) = \frac{3\sqrt{2}}{4}a^2$.

L'àrea de la base de la piràmide és: $S_B = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$.

La proporció entre l'àrea lateral i l'àrea de la base:

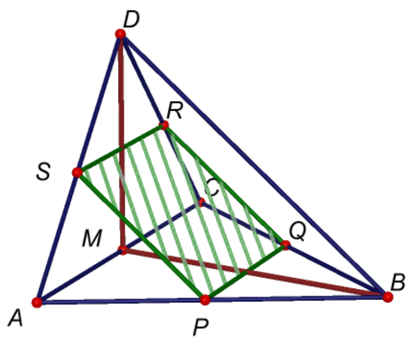
$$\frac{S_L}{S_B} = 3S_{BCS} = 3\left(\frac{1}{2}a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}a\right) = \frac{\frac{3\sqrt{2}}{4}a^2}{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2} = \sqrt{6}.$$

Problema 40
La base d'una piràmide és un triangle equilàter de costat a.
Una de les cares laterals de la piràmide és perpendicular a la base i és un triangle isòsceles de costat b.
Determineu l'àrea de la secció de la piràmide que és un quadrat.

Solució:

Siga la piràmide ABCD de base el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat $\overline{AB} = a$.

Siga la cara $\overset{\Delta}{ACD}$ perpendicular a la base i $\overline{AD} = \overline{CD} = b$.
Siga PQRS la secció quadrada de la piràmide.
Siga $\overline{PQ} = \overline{PS} = x$.



El triangle $\overset{\Delta}{PQB}$ és equilàter, aleshores, $\overline{BP} = x$.
Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{AC}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMB}$:

$$\overline{MB} = \frac{\sqrt{3}}{2} a .$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMD}$:

$$\overline{MD} = \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}} .$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BMD}$:

$$\overline{BD} = \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{2}} .$$

Els triangles $\overset{\Delta}{ABD}$, $\overset{\Delta}{APS}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{PS}}{\overline{AP}} .$$

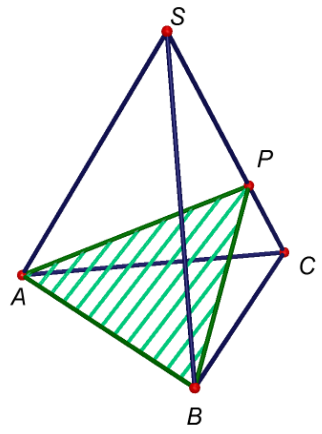
$$\frac{\overline{BD}}{a} = \frac{x}{a - x} .$$

$$x = \frac{a \cdot \overline{BD}}{a + \overline{BD}} = \frac{a\sqrt{b^2 + \frac{a^2}{2}}}{a + \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{2}}} = \frac{a\sqrt{2a^2 + 4b^2}}{2a + \sqrt{2a^2 + 4b^2}} .$$

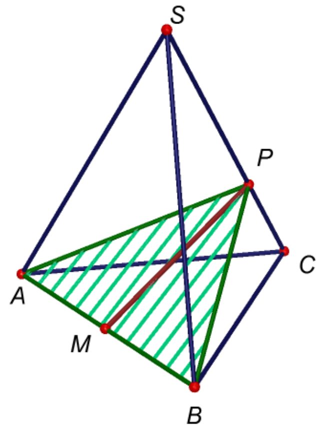
L'àrea del quadrat PQRS és:

$$S_{PQRS} = x^2 = \frac{2a^2 + 4a^2b^2}{\left(2a + \sqrt{2a^2 + 4b^2}\right)^2} .$$

Problema 41
En una piràmide triangular regular l'aresta de la base és a.
L'angle entre l'aresta de la base i una aresta lateral és α.
Construïm la secció de la piràmide formada pel plànol que passa per una aresta de la base i és perpendicular a l'aresta lateral oposada.
Calculeu la seua àrea.

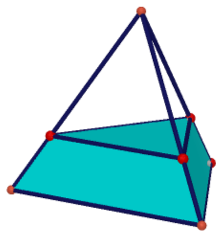


Solució:
Siga la piràmide triangular regular ABCD de base el triangle equilàter de costat $\overline{AB} = a$.
Siga $\angle SAC = \angle BCS = \alpha$.
Siga P el punt de l'aresta $\overline{CS}$, tal que la secció que conté l'aresta $\overline{AB}$ i és perpendicular a l'aresta $\overline{CS}$.



Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BPC}$:
$\overline{AP} = \overline{BP} = a \cdot \sin\alpha$.
Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{AB}$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BMP}$:
$\overline{PM} = \frac{a}{2}\sqrt{-1+4\sin^2\alpha}$.
L'àrea de la secció és:
$$S = \frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{PM} = \frac{1}{2}a\frac{a}{2}\sqrt{-1+4\sin^2\alpha} = \frac{a^2}{4}\sqrt{-1+4\sin^2\alpha}.$$

Problema 42
Un tetraedre regular d'aresta 20cm conté aigua fins una altura de 5cm.
Calculeu el volum d'aigua.



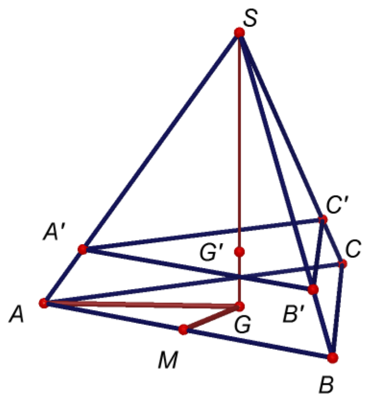
Solució:
Siga el tetraedre regular ABCS d'aresta $\overline{AB} = 20$.

Siga $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ la secció del tetraedre que forma l'aigua.

Siga G i G' els baricentres dels triangles equilàters $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{A'B'C'}$, respectivament.

$\overline{GG'} = 5$.

Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{AB}$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMG}$:

$$\overline{AG} = \frac{20\sqrt{3}}{3}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AGS}$:

$$\overline{SG} = \frac{20\sqrt{6}}{3}.$$

El volum del tetraedre ABCS és:

$$V_{ABCS} = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{4}20^2 \cdot \frac{20\sqrt{6}}{3} = \frac{2000\sqrt{2}}{3}.$$

$$\overline{SG'} = \frac{20\sqrt{6}}{3} - 5.$$

Els tetraedres ABCS, A'B'C'S són semblant, els volums són proporcionals als cubs de la proporció de les arestes.
El volum del tetraedre A'B'C'S és:

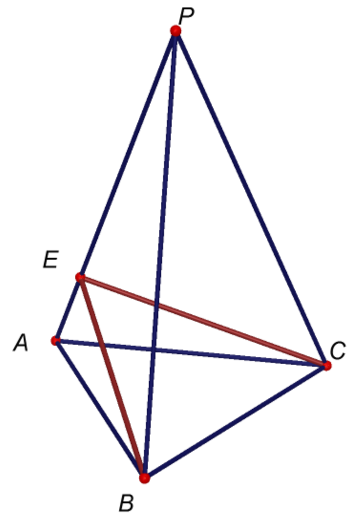
$$V_{A'B'C'S} = \left(\frac{\frac{20\sqrt{6}}{3} - 5}{\frac{20\sqrt{6}}{3}}\right)^3 \frac{2000\sqrt{2}}{3} = \frac{5125\sqrt{2}}{6} - \frac{4125\sqrt{3}}{8}.$$

El volum que ocupa l'aigua és igual a la diferència dels volums dels tetraedres ABCS A'B'C'S:

$$V_{ABCA'B'C'S} = \frac{4125\sqrt{3}}{8} - \frac{375\sqrt{2}}{2} \approx 627.9237\text{cm}^3.$$

Problema 43

Siga la piràmide triangular regular ABCP de base el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ tal que l'aresta de la base és 5.
Siga E un punt de l'aresta $\overline{AP}$ tal que l'aresta $\overline{AP}$ és perpendicular al plànol BEC i a més a més, $\frac{\overline{PE}}{\overline{AE}} = \frac{7}{2}$.
Calculeu la superfície de la piràmide.



Solució:
Siga $\overline{AE} = 2x$, $\overline{PE} = 7x$.
$\overline{AP} = \overline{BP} = 9x$
El segment $\overline{BE}$ és perpendicular a l'aresta $\overline{AP}$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AEB}$:

$$5^2 = (2x)^2 + \overline{BE}^2 \qquad (1)$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PEB}$:

$$(9x)^2 = (7x)^2 + \overline{BE}^2 \qquad (2)$$

Considerem el sistema format per les expressions (1) (2):

$$\begin{cases} 4x^2 + \overline{BE}^2 = 5^2 \\ -32x^2 + \overline{BE}^2 = 0 \end{cases}$$. Resolent el sistema:

$$\begin{cases} x = \frac{5}{6} \\ \overline{BE} = \frac{10\sqrt{2}}{3} \end{cases}.$$

$$\overline{AP} = 9x = \frac{15}{2}.$$

L'àrea lateral de la piràmide és:

$$S_L = 3\left(\frac{1}{2}\overline{AP}\cdot\overline{BE}\right) = 3\left(\frac{1}{2}\frac{15}{2}\frac{10\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{75\sqrt{2}}{2}.$$

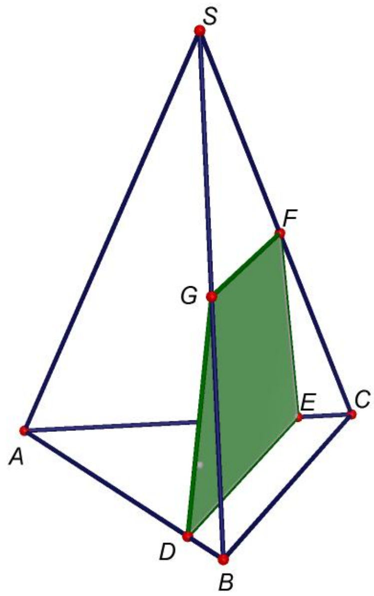
La superfície de la base és:

$$S_B = \frac{\sqrt{3}}{4}\overline{AB}^2 = \frac{25\sqrt{3}}{2}.$$

L'àrea de la piràmide és:

$$S_{ABCP} = \frac{25\sqrt{3}}{4} + \frac{75\sqrt{2}}{2} \approx 63.8583.$$

Problema 44
Siga ABCS la piràmide triangular regular d'aresta de la base 6 i altura 8.
Siguen D, E punst de les arestes $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, respectivament, tal que $\overline{AD} = \overline{AE} = 5$.
Determineu l'àrea de la secció de la piràmide que conté $\overline{DE}$ i és perpendicular a la base.



Solució:

Siga O el baricentre del triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$.
La secció és el trapezi DEFG.
Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{BC}$.
Siguen K, L els punts migs dels segments $\overline{DE}, \overline{FG}$, respectivament.

$\overset{\Delta}{ADE}$ és un triangle equilàter, aleshores, $\overline{DE} = 5$.

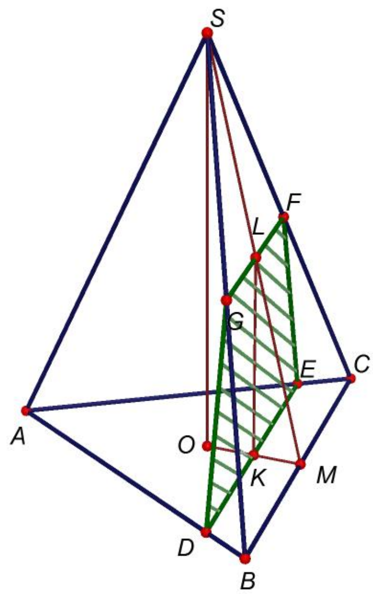
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BMO}$:
$\overline{OM} = \sqrt{3}$. Per la propietat del baricentre, $\overline{AO} = 2 \cdot \overline{OM} = 2\sqrt{3}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AKD}$:

$\overline{AK} = \frac{5}{2}\sqrt{3}$.

$\overline{OK} = \overline{AK} - \overline{AO} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Aleshores, K és el punt mig del segment $\overline{OM}$.



Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{SOM}$, $\overset{\Delta}{LKM}$ són semblants i de raó 2:1.
Aplicant el teorema de Tales:

$\overline{KL} = \frac{1}{2}\overline{SO} = 4$.

Els triangles isòsceles $\overset{\Delta}{SBC}$, $\overset{\Delta}{SGF}$ són semblants i de raó 2:1.
Aplicant el teorema de Tales:

$\overline{FG} = \frac{1}{2}\overline{BC} = 3$.

L'àrea del trapezi DEFG és:

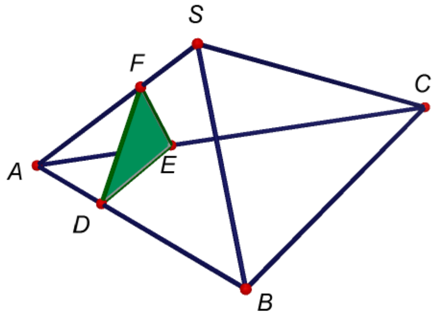
$$S_{DEFG} = \frac{\overline{DE} + \overline{FG}}{2}\overline{KL} = \frac{5+3}{2}4 = 16.$$

Problema 45

Siga el tetraedre ABCS.

Siguen els punts D, E, F sobre les arestes $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ i $\overline{AS}$, respectivament, tals que $\overline{BD} = 2 \cdot \overline{AD}$, $\overline{CE} = 2 \cdot \overline{AE}$, $\overline{AF} = 2 \cdot \overline{SF}$.

Determineu la proporció entre els volums dels dos sòlids en què divideix el tetraedre ABCS el plànol que formen els punts D, E, F.



Solució:

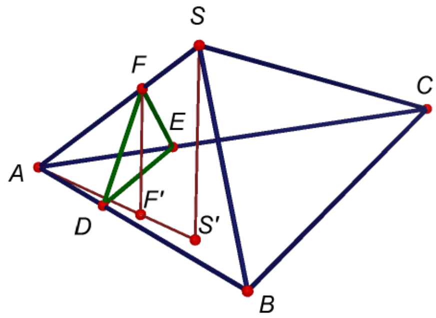
Siga S' la projecció de S sobre el plànol base ABC.

Siga $\overline{SS'} = h$ altura del tetraedre ABCS.

Siga F' la projecció de F sobre el plànol base ABC.

Els volum del tetraedre ABCS és:

$$V_{ABCS} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot h.$$



Els triangles $\overset{\Delta}{ADE}$, $\overset{\Delta}{ABC}$ són semblants i de raó 1:3.

$$S_{ADE} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 S_{ABC} = \frac{1}{9} S_{ABC}.$$

Els triangles $\overset{\Delta}{AF'F}$, $\overset{\Delta}{AS'S}$ són semblants i de raó 2:3.

Aplicant el teorema de Tales:

$$\overline{FF'} = \frac{2}{3}\overline{SS'} = \frac{2}{3} h.$$

Els plànol DEF divideix el tetradre inicial ABCS en un tetraedre ADEF i el poliedre de vèrtexs DEFBCS.

El volum del tetraedre ADEF és:

$$V_{AFDE} = \frac{1}{3} S_{ADE} \cdot 2h = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^2 S_{ABC} \cdot 2h = \frac{2}{27}\frac{1}{3} S_{ABC} \cdot h = \frac{2}{27} V_{ABCS}.$$

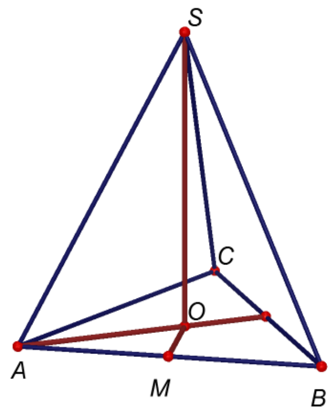
El volum del políedre DEFBCS és igual a la diferència dels volum dels tetraedres ABCS i ADEF:

$$V_{DEFBCS} = V_{ABCS} - V_{AFDE} = V_{ABCS} - \frac{2}{27} V_{ABCS} = \frac{25}{27} V_{ABCS}.$$

La raó entre els volums dels dos sòlids és:

$$\frac{V_{AFDE}}{V_{DEFBCS}} = \frac{\frac{2}{27} V_{ABCS}}{\frac{25}{27} V_{ABCS}} = \frac{2}{25}.$$

Problema 46
En una piràmide triangular regular l'altura és igual a l'aresta de la base.
Determineu l'angle que forma una aresta lateral i la base.

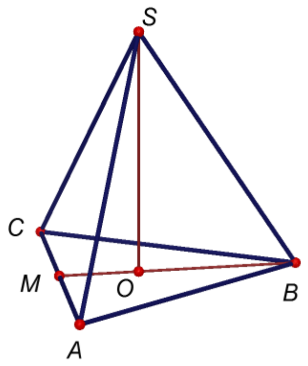


Solució:
Siga ABCS la piràmide regular d'aresta de la base $\overline{AB} = a$.
Siga O el baricentre de la base $\overset{\Delta}{ABC}$.
$\overline{SO} = a$, altura de la piràmide.
Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{AB}$.
L'angle que forma l'aresta lateral $\overline{AS}$ i la base és $\alpha = \angle SAO$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMO}$;
$\overline{AO} = \frac{\sqrt{3}}{3}a$.
Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AOS}$:
$$\text{tg}\alpha = \frac{a}{\frac{\sqrt{3}}{3}a} = \sqrt{3}.$$
$\alpha = \text{arctg}\sqrt{3} = 60^{\circ}$.

Problema 47
En una piràmide regular triangular l'angle diedre de l'aresta de la base és α.
Determineu l'angle que forma l'aresta lateral i la base.

Solució:

Siga ABCS la piràmide regular de base el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat $\overline{AB} = a$.
Siga O el baricentre del triangle de la base.
$\overline{SO}$ és l'altura de la piràmide ABCS.
Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{AC}$.
L'angle diedre de l'aresta de la base $\overline{AC}$ és $\angle SMB = \alpha$.
L'angle que forma l'aresta lateral $\overline{SB}$ i la base és $\angle SBO = \beta$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMB}$:

$$\overline{BM} = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

Aplicant la propietat del baricentre:

$$\overline{OM} = \frac{1}{3}\overline{BM} = \frac{\sqrt{3}}{6}a, \quad \overline{OB} = \frac{2}{3}\overline{BM} = \frac{\sqrt{3}}{3}a.$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MOS}$:

$$\overline{SO} = \frac{\sqrt{3}}{6}a \cdot \mathrm{tg}\alpha.$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{SOB}$:

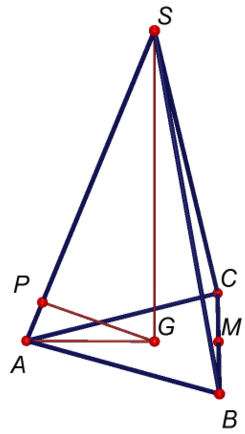
$$\mathrm{tg}\beta = \frac{\overline{SO}}{\overline{OB}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{6}a \cdot \mathrm{tg}\alpha}{\frac{\sqrt{3}}{3}a} = \frac{1}{2}\mathrm{tg}\alpha.$$

$$\beta = \mathrm{arctg}\left(\frac{1}{2}\mathrm{tg}\alpha\right).$$

Problema 48
La perpendicular baixada des del baricentre de la base d'una piràmide triangular regular a l'aresta és d. Determineu el volum de la piràmide si l'angle l'aresta lateral i la base és β.

Solució:

Siga ABCS la piràmide triangular regular de base el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat $\overline{AB} = a$.
Siga G el baricentre de la base. $\angle SAG = \beta$.
Siga $\overline{GS} = h$. Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{BC}$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMB}$:

$$\overline{AM} = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

Aplicant la propietat del baricentre:

$$\overline{AG} = \frac{2}{3}\overline{BM} = \frac{\sqrt{3}}{3}a.$$

$\angle SGP = \beta$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{GPS}$:

$$h = \frac{1}{\cos\beta}d.$$

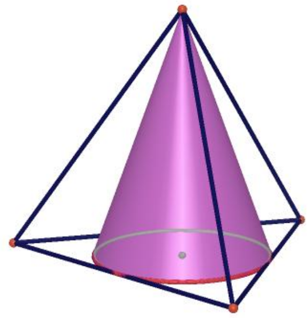
Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{GPA}$:

$$a = \frac{d}{\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\beta}.$$

$$V = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{4}a^2h = \frac{\sqrt{3}}{4}\frac{1}{\sin^2\beta\cdot\cos\beta}\cdot d^3.$$

Problema 49

Siga un con inscrit en un tetraedre regular.
Calculeu la proporció entre el volum del con i del tetraedre.

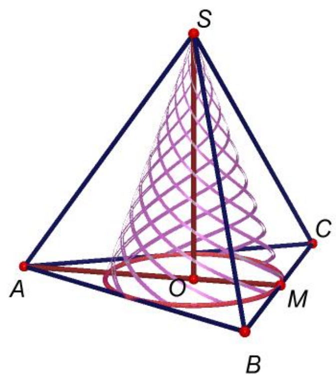


Solució:

Siga el teraedre regular ABCS d'aresta $\overline{AB} = a$.
Siga O el baricentre de la base.
O és el centre de la base del con inscrit.
Siga M el punt mig del costat $\overline{BC}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABM}$:

$\overline{AM} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.



Aplicant La propietat del baricentre:

$\overline{OM} = \frac{1}{3}\overline{AM} = \frac{\sqrt{3}}{6}a$, radi de la base del con.

L'àrea del triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

El volum del tetraedre és:

$V_T = \frac{1}{3}S_{ABC} \cdot \overline{OS}$.

El volum del con és:

$V_C = \frac{1}{3}\pi\overline{OM}^2 \cdot \overline{OS}$.

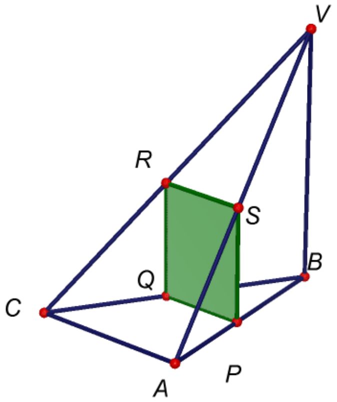
La proporció entre els volums és:

$$\frac{V_C}{V_T} = \frac{\frac{1}{3}\pi\overline{OM}^2 \cdot \overline{OS}}{\frac{1}{3}S_{ABC} \cdot \overline{OS}} = \frac{\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{6}a\right)^2}{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \approx 0.6046 .$$

Problema 50

La base del tetraedre VABC és el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $A = 90^{o}$.
L'aresta $\overline{VB}$ és perpendicular al plànol de la base.
Tenim que $\overline{VB} = 5dm$, $\overline{BA} = 4dm$, $\overline{AC} = 3dm$.
Sobre l'aresta $\overline{BA}$ agafem el punt P tal que $\overline{PB} = x$.
Pel punt P tracem un plànol perpendicular a l'aresta $\overline{BA}$.
Es demana determinar:

a) L'àrea de la secció que determina el plànol en el tetraedre.
b) El valor de x a fi que aquesta àrea siga màxima.
c) El valor de l'àrea màxima.



Solució:
$\overline{BC} = 5$, $\overline{AV} = \sqrt{41}$, $\overline{CV} = 5\sqrt{2}$.
Vegem que la secció és el rectangle PQRS:
Notem que $\overline{PS}$ és perpendicular a $\overline{BA}$ i $\overline{QR}$ és perpendicular a $\overline{BC}$ i $\overline{PQ}$ és paral·lel a $\overline{CA}$.

Aplicant el teorema de Tales als triangles semblants $\overset{\Delta}{ABV}$, $\overset{\Delta}{APS}$:

$\dfrac{\overline{PS}}{4-x} = \dfrac{5}{4}$, Aleshores, $\overline{PS} = \dfrac{5}{4}(4-x)$.

Aplicant el teorema de Tales als triangles semblants $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{PBQ}$:

$\dfrac{\overline{CQ}}{4-x} = \dfrac{5}{4}$, Aleshores, $\overline{CQ} = \dfrac{5}{4}(4-x)$.

El triangle $\overset{\Delta}{CQR}$ és rectangle i isòsceles com el triangle $\overset{\Delta}{CBV}$:

Aleshores, $\overline{QR} = \overline{CQ} = \dfrac{5}{4}(4-x)$.

Aleshores, $\overline{PS} = \overline{QR}$ i $\overline{PQ}$ és perpendicular a $\overline{PS}$ i a $\overline{QR}$.
Per tant, PQRS és un rectangle.

Aplicant el teorema de Tales als triangles semblants $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{PBQ}$:

$\dfrac{\overline{PQ}}{x} = \dfrac{3}{4}$, Aleshores, $\overline{PQ} = \dfrac{3}{4}x$.

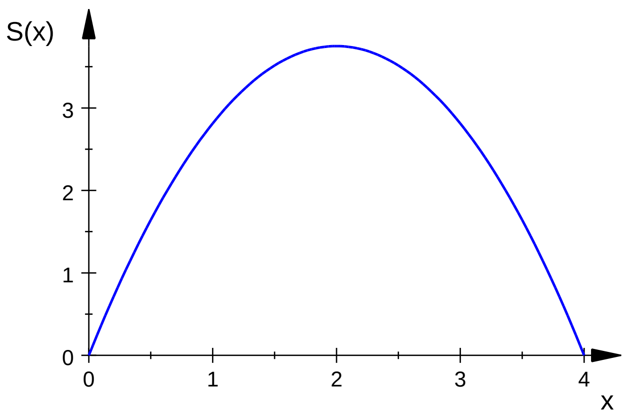
L'àrea del rectangle PQRS és:

$S_{PQRS} = \overline{PQ} \cdot \overline{PS} = \dfrac{3}{4}x \cdot \dfrac{5}{4}(4-x)$.

$S(x) = \dfrac{15}{16}\left(-x^2 + 4x\right),\ x \in [0, 4]$.

La funció és una paràbola convexa.
El màxim s'assoleix en el vèrtex, és a dir, quan $x = 2$ i l'àrea màxima és:

$S(2) = \dfrac{15}{4} = 3.75dm^2$.



Bibliografia:

GÚSIEV, V. i altres, *Prácticas para resolver problemas matemáticos. Geometría.* Editorial Mir. Moscou, 1989.

KLETENIK, D. *Problemas de geometría analítica.* Moscou. 1979.

POGORÉLOV A.V. *Geometría elemental.* Ed. Mir. Moscou. 1974.

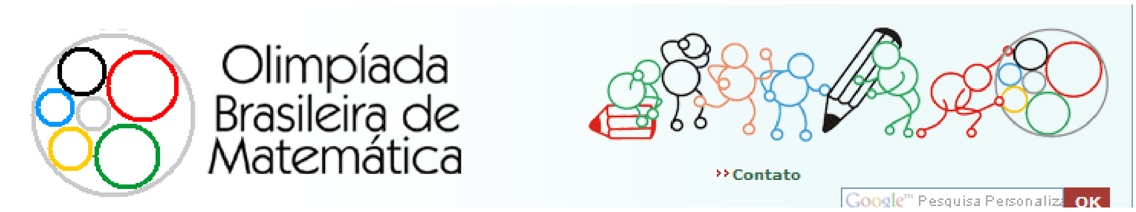
GUILLÉN SOLER, G. *Poliedros.* Ed. Ed. Síntesis. Col. Educación matemática en secundaria, 15. Madrid. 1997.

MEDVIÉDEV G.N. *Problemas de matemática. Olimpiadas y exámenes de admisión. Ed. URSS. Moscou 2010.*

SORTAIS , Y., SORTAIS R. *Géométrie de l'espace et du plane.* Ed. Hermann. Paris. 1988.

Pàgines Web:

http://www.komal.hu/info/bemutatkozas.e.shtml
Revista KöMaL. Societat Hongaresa de Física i Matemàtiques.
Problemes olímpics de tots els nivells.
Publiquen 8 números a l'any.
Idioma: Anglés i magiar.



http://www.obm.org.br/opencms/
Pàgina de l'Olimpíada brasileira de matemàtica.
Informació sobre les proves.
Revista de problemes EUREKA. Dos nivells de problemes.
Idioma: Portugués.