Proves Pau's 2017 juliol

Problema A1

Siguen A i B dues matrius quadrades d'ordre 3 tals que $A^2 = -A - I$ i $2B^3 = B$, en què $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ és la matriu identitat. Obteniu raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:

a) La justificació que la matriu A és invertible i el càlcul de la matriu A^3 en funció d'A i d'I.

b) Els valors possibles del determinant B.

c) El valor del determinant de la matriu B^2, sabent que la matriu B té inversa.

Problema A2

Es donen la recta $r \equiv \begin{cases} x - 2y - 2z = 1 \\ x + 3y - z = 1 \end{cases}$ i el plànol $\Pi \equiv 2x + y + mz = n$.

Obteniu raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:

a) Els valors d'm i n per als quals la recta r i el plànol Π es tallen en un punt.

b) Els valors d'm i n per als quals la recta r i el plànol Π no es tallen

c) Els valors d'm i n per als quals la recta r està continguda en el plànol Π.

Problema A3

Es consideren les corbes $y = x^3$, $y = ax$ i la funció $f(x) = x^3 - ax$, en què a és un paràmetre real i $a > 0$. Obteniu raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:

a) Els punts de tall de la corba $y = f(x)$ amb els eixos de coordenades i els intervals de creixement i de decreixement de la funció f(x).

b) La gràfica de la funció f(x) quan $a = 9$.

c) Calculeu, en funció del paràmetre a, l'àrea de la regió afitada del primer quadrant tancada per les corbes $y = x^3$, $y = ax$ quan $a > 1$.

d) El valor del paràmetre a per al qual l'àrea obtinguda en l'apartat c) coincideix amb l'àrea de la regió afitada compresa entre la corba $y = x^3$, l'eix OX i les rectes $x = 0$ i $x = 2$.

Problema B1

Es consideren les matrius $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ i $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Obteniu raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:

a) La justificació que A té inversa i el càlcul d'aquesta inversa A^{-1}.

b) La justificació que $A^4 = I$.

c) El càlcul de les matrius A^7, A^{30} i A^{100}.

Problema B2

Es donen la recta $r \equiv \frac{x-1}{4} = \frac{y}{a} = \frac{z-1}{-1}$ i el plànol $\Pi \equiv 2x - y + bz = 0$ en què a i b són dos paràmetres reals. Obteniu raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:

a) El punt d'intersecció de la recta r i el plànol Π quan $a = -b = 1$.

b) La distancia entre la recta r i el plànol Π quan $a = b = 4$.

c) La posició relativa de la recta r i el plànol Π en funció dels valors dels paràmetres a i b.

Problema B3

Es considera el triangle T de vèrtexs $O(0,0)$, $A(x,y)$ i $B(0,y)$, en què $x > 0$, $y > 0$, i tal que la suma de les longituds dels costats $\overline{OA}$ i $\overline{AB}$ és de 30 metres.

Obteniu raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:

a) L'àrea del triangle T en funció d'x.

b) El valor d'x per al qual aquesta àrea és màxima.

c) El valor d'aquesta àrea màxima.

Problema A1

Siguen A i B dues matrius quadrades d'ordre 3 tals que $A^2 = -A - I$ i $2B^3 = B$, en què $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ és la matriu identitat. Obteniu raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:

a) La justificació que la matriu A és invertible i el càlcul de la matriu A^3 en funció d'A i d'I.

b) Els valors possibles del determinant B.

c) El valor del determinant de la matriu B^2, sabent que la matriu B té inversa.

Solució:

a)

$A^2 = -A - I$. Aleshores:

$-A^2 - A = I$.

$A(-A - I) = I$.

Aleshores, A té inversa i a més a més, $A^{-1} = -A - I$

$A^3 = A \cdot A^2 = A(-A - I) = -A^2 - A$.

$A^3 = -(-A - I) - A = I$.

b)

Propietats de determinant:

1.- $\det(M \cdot N) = \det(M) \cdot \det(N)$

2.- Si $M \in M_{3\times3}$ i $\alpha \in R$, aleshores, $\det(\alpha M) = \alpha^3 \det(M)$.

$\det(2B^3) = \det(B)$. Aplicant les propietats anteriors:

$8 \cdot (\det(B))^3 = \det(B)$. Una equació de tercer grau:

$8 \cdot (\det(B))^3 - \det(B) = 0$. Factoritzant l'equació:

$\det(B) \cdot (8(\det(B))^2 - 1) = 0$.

$\det(B) = 0$, $\det(B) = \pm\sqrt{\frac{1}{8}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{4}$.

c)

$\det(B) = 0$.

$\det(B^2) = (\det(B))^2 = \left(\pm\sqrt{\frac{1}{8}}\right)^2 = \frac{1}{8}$.

Problema A2

Es donen la recta $r \equiv \begin{cases} x-2y-2z=1 \\ x+3y-z=1 \end{cases}$ i el plànol $\Pi \equiv 2x+y+mz=n$.

Obteniu raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:

a) Els valors d'm i n per als quals la recta r i el plànol Π es tallen en un punt.

b) Els valors d'm i n per als quals la recta r i el plànol Π no es tallen

c) Els valors d'm i n per als quals la recta r està continguda en el plànol Π.

Solució:

Considerem el sistema format per les equacions de la recta i el plànol:

$$\begin{cases} x-2y-2z=1 \\ x+3y-z=1 \\ 2x+y+mz=n \end{cases}.$$

La matriu de coeficients és $M=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & m \end{pmatrix}$.

La matriu ampliada és $M'=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & m & n \end{array}\right)$

a)

La recta i el plànol són secants si el sistema té solució única: és a dir si el sistema és compatible determinat:

$|M| \neq 0$.

$|M| = 3m+4-2+12+2m+1 \neq 0$.

$m \neq 3$.

Aleshores, la recta i el plànol són secants si $m \neq 3$, $\forall n \in R$.

b)

La recta i el plànol no es tallen (són paral·lels) si el sistema no té solució, és a dir:

si $\operatorname{rang} M = 2$, $\operatorname{rang} M' = 3$.

Si $m=3$, el menor $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$, aleshores, $\operatorname{rang} M = 2$

Considerem el menor de la matriu ampliada format per les columnes 1ª, 2ª i 3ª:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & n \end{vmatrix} = 3n-4+1-6+2n-1 = 5n-10.$$

Si $n \neq 2$ aleshores, $\operatorname{rang} M' = 3$.

Aleshores, la recta i el plànol no es tallen si $m=3$ i $n \neq 2$.

c)

La recta està continguda en el plànol si $\operatorname{rang} M = 2$, $\operatorname{rang} M' = 2$.

És a dir, si $m=3$ i $n=2$.

Problema A3

Es consideren les corbes $y = x^3$, $y = ax$ i la funció $f(x) = x^3 - ax$, en què a és un paràmetre real i $a > 0$. Obteniu raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:

a) Els punts de tall de la corba $y = f(x)$ amb els eixos de coordenades i els intervals de creixement i de decreixement de la funció f(x).

b) La gràfica de la funció f(x) quan $a = 9$.

c) Calculeu, en funció del paràmetre a, l'àrea de la regió afitada del primer quadrant tancada per les corbes $y = x^3$, $y = ax$ quan $a > 1$.

d) El valor del paràmetre a per al qual l'àrea obtinguda en l'apartat c) coincideix amb l'àrea de la regió afitada compresa entre la corba $y = x^3$, l'eix OX i les rectes $x = 0$ i $x = 2$.

Solució:

a)

Siga $f(x) = x^3 - ax$.

Per calcular el punt de tall amb l'eix d'ordenades:

$x = 0$, $f(0) = 0$. El punt de tall és $(0, 0)$.

Per calcular el punt de tall amb l'eix d'abscisses:

$f(x) = 0$, $x^3 - ax = 0$.

$x\left(x^2 - a\right) = 0$. Resolent l'equació, $x = 0, \sqrt{a}, -\sqrt{a}$. Els punts de tall són $(0, 0)$, $(\sqrt{a}, 0)$, $(-\sqrt{a}, 0)$.

Calculem la primera derivada de la funció:

$f'(x) = 3x^2 - a$.

La funció és estrictament creixent quan $f'(x) > 0$. Resolent la inequació:

La funció és estrictament creixent quan $x \in \left]-\infty, -\sqrt{\frac{a}{3}}\right[\cup \left]\sqrt{\frac{a}{3}}, +\infty\right[$.

La funció és estrictament decreixent quan $f'(x) < 0$. Resolent la inequació:

$x \in \left]-\sqrt{\frac{a}{3}}, \sqrt{\frac{a}{3}}\right[$.

b)

Siga $a = 9$, $f(x) = x^3 - 9x$. La funció és contínua i derivable en R. La funció és simètrica respecte de l'origen de coordenades.

El punt de tall amb l'eix d'ordenades és $(0, 0)$.

Els punts de tall amb l'eix d'abscisses són $(0, 0)$, $(3, 0)$, $(-3, 0)$.

La funció és estrictament creixent quan $x \in \left]-\infty, -\sqrt{3}\right[\cup \left]\sqrt{3}, +\infty\right[$.

La funció és estrictament decreixent quan $x \in \left]-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right[$.

En $x = -\sqrt{3}$ la funció té un màxim relatiu estricte. El punt màxim relatiu és $\left(-\sqrt{3}, 6\sqrt{3}\right)$.

En $x = \sqrt{3}$ la funció té un mínim relatiu estricte. El punt mínim relatiu és $\left(\sqrt{3}, -6\sqrt{3}\right)$.

Per estudiar la concavitat convexitat de la funció estudiarem el signe de la segona derivada:

$f''(x) = 6x$

La funció és còncava quan $f''(x) > 0$.

$6x > 0$, Resolent la inequació:

La funció és còncava quan $x \in \left]0, +\infty\right[$.

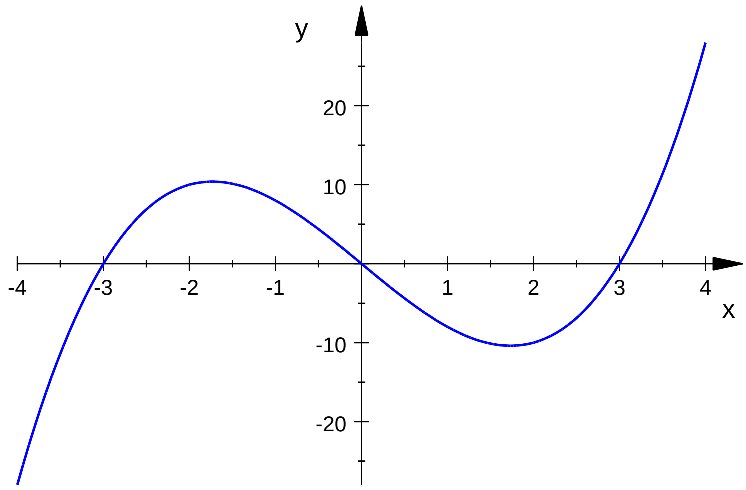
La funció és convexa quan $f''(x) < 0$.

$6x < 0$, Resolent la inequació:

La funció és còncava quan $x \in \left]-\infty, 0\right[$

En $x = 0$ la funció té un punt d'inflexió. El punt d'inflexió $(0, 0)$.

La gràfica és:



c)

Siga $a > 1$.

Calculem els punts intersecció de les dues corbes $y = x^3$, $y = ax$:

$x^3 - ax = 0$. Per l'apartat a) $x = 0, \sqrt{a}, -\sqrt{a}$.

L'àrea de la regió afitada del primer quadrant tancada per les corbes $y = x^3$, $y = ax$ és:

$$\int_0^{\sqrt{a}} \left(ax - x^3\right) dx = \left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg]_0^{\sqrt{a}} = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4} - 0 = \frac{a^2}{4}.$$

d)

Calculem l'àrea de la regió afitada compresa entre la corba $y = x^3$, l'eix OX i les rectes $x = 0$ i $x = 2$.

$$\int_0^2 x^3\, dx = \left(\frac{x^4}{4}\right)\Bigg]_0^2 = 4 - 0 = 4.$$

Per calcular el valor del paràmetre a per al qual l'àrea obtinguda en l'apartat c) coincideix amb l'àrea de la regió afitada compresa entre la corba $y = x^3$, l'eix OX i les rectes $x = 0$ i $x = 2$:

$\frac{a^2}{4} = 4$, $a > 1$. Resolent l'equació: $a = 4$.

Problema B1

Es consideren les matrius $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ i $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Obteniu raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:

a) La justificació que A té inversa i el càlcul d'aquesta inversa A^{-1}.

b) La justificació que $A^4 = I$.

c) El càlcul de les matrius A^7, A^{30} i A^{100}.

Solució:

a)

La matriu A té inversa si $|A| \neq 0$, i $A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{AdjA})^t$.

$|A| = 1$, aleshores, A té inversa.

Calculem la matriu adjunta de la matriu A:

$A_{11} = +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad A_{112} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad A_{113} = +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$

$A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad A_{22} = +\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$A_{31} = +\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad A_{33} = +\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\text{AdjA} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{AdjA})^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b)

$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

$A^3 = A \cdot A^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Notem que $A^3 = A^{-1}$.

$A^4 = A \cdot A^3 = A \cdot A^{-1} = I$.

c)

$A^7 = A^4 A^3 = IA^{-1} = A^{-1}$.

$A^{30} = (A^4)^7 A^2 = I \cdot A^2 = A^2$.

$A^{100} = (A^4)^{25} = I$.

Problema B2

Es donen la recta $r \equiv \frac{x-1}{4} = \frac{y}{a} = \frac{z-1}{-1}$ i el plànol $\Pi \equiv 2x - y + bz = 0$ en què a i b són dos paràmetres reals. Obteniu raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:

a) El punt d'intersecció de la recta r i el plànol Π quan $a = -b = 1$.

b) La distancia entre la recta r i el plànol Π quan $a = b = 4$.

c) La posició relativa de la recta r i el plànol Π en funció dels valors dels paràmetres a i b.

Solució:

a)

Si $a = -b = 1$, aleshores, $a = 1, b = -1$.

$r \equiv \frac{x-1}{4} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$. El vector director és $v = (4, 1, -1)$

$\Pi \equiv 2x - y - z = 0$. El vector característic és $a = (2, -1, -1)$.

$v \cdot a = 8 - 1 + 1 = 8 \neq 0$.

Aleshores, el plànol i la recta són secants.

Per calcular el punt intersecció resoldrem el sistema format per la recta i el plànol:

$\begin{cases} \begin{cases} x = 1 + 4\alpha \\ y = \alpha \\ z = 1 - \alpha \end{cases} \\ 2x - y - z = 0 \end{cases}$. $2(1 + 4\alpha) - \alpha - (1 - \alpha) = 0$. Resolent l'equació: $\alpha = \frac{-1}{8}$.

El punt d'intersecció és $P\left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{8}, \frac{9}{8}\right)$.

b)

Si $a = b = 4$.

$r \equiv \frac{x-1}{4} = \frac{y}{4} = \frac{z-1}{-1}$. El vector director és $v = (4, 4, -1)$

$\Pi \equiv 2x - y + 4z = 0$. El vector característic és $a = (2, -1, 4)$.

$v \cdot a = 8 - 4 - 4 = 0$.

El la recta o paral·lela al plànol o bé continguda en el plànol.

El punt $A(1, 0, 1)$ pertany a la recta r.

$$d(r, \Pi) = d(A, \Pi) = \left| \frac{2 \cdot 1 - 0 + 4 \cdot 1}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 4^2}} \right| = \frac{6}{\sqrt{21}}.$$

c)

Per estudiar la posició relativa de la recta i el plànol discutirem els sistema d'equacions format per les equacions de la recta i el plànol.

L'equació general de la recta r és:

$r \equiv \begin{cases} -x + 4z = 5 \\ y + az = a \end{cases}$.

Considerem el sistema $\begin{cases} -x+4z=5 \\ y+az=a \\ 2x-y+bz=0 \end{cases}$.

La matriu de coeficients és $M=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & a \\ 2 & -1 & b \end{pmatrix}$.

La matriu ampliada és $M'=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & a & a \\ 2 & -1 & b & 0 \end{array}\right)$.

Estudiem els rangs de les dues matrius en funció de a i b.

$|M|=a+b+8$.

El menor d'ordre 2 principal $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0$.

Si $a+b\neq -8$, $\text{rang}M=\text{rang}M'=3$.

La recta i el plànol son secants.

Si $a+b=-8$. $\text{rang}M=2$.

Per estudiar el rang de la matriu ampliada considerem el determinant format per la 1ª, 2ª i 4ª columna de la matriu ampliada:

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & a \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}=-10+a$.

Si $a+b=-8$, $a=10$ el $\text{rang}M'=2$.

Aleshores, si $a=10$, $b=-18$ la recta està continguda en el plànol.

Si $a+b=-8$, $a\neq 10$ el $\text{rang}M'=3$.

És a dir, si $a\neq 10$ i $b\neq -18$, la recta és paral·lela al plànol.

Problema B3

Es considera el triangle T de vèrtexs $O(0,0)$, $A(x,y)$ i $B(0,y)$, en què $x>0$, $y>0$, i tal que la suma de les longituds dels costats $\overline{OA}$ i $\overline{AB}$ és de 30 metres.

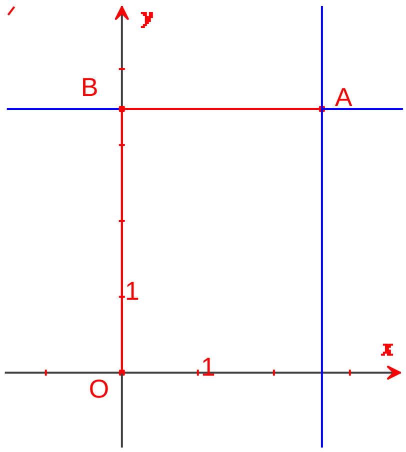
Obteniu raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:

a) L'àrea del triangle T en funció d'x.

b) El valor d'x per al qual aquesta àrea és màxima.

c) El valor d'aquesta àrea màxima.

Solució:



$\overline{AB}=x$, $\overline{OB}=y$. Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OAB}$:

$\overline{OA}=\sqrt{x^2+y^2}$.

L'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{OAB}$ és:

$S(x,y)=\dfrac{1}{2}xy$.

La suma de les longituds dels costats $\overline{OA}$ i $\overline{AB}$ és de 30 metres.

$\sqrt{x^2+y^2}+x=30$.

$\sqrt{x^2+y^2}=30-x$. Elevant al quadrat i simplificant:

$y^2=900-60x$.

$y=+\sqrt{900-60x}$.

L'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{OAB}$ és:

$S(x)=\dfrac{1}{2}x\sqrt{900-60x}$, $x>0$.

$S(x)=2\sqrt{225x^2-15x^3}$.

Derivant la funció àrea:

$S'(x)=\dfrac{450x-45x^2}{\sqrt{225x^2-15x^3}}$.

$S'(x)=0$, $450x-45x^2=0$. Resolent l'equació:

$x=0,10$, Aleshores, $x=10$.

Estudiant el signe de la derivada en un entorn de $x = 10$, notem que a l'esquerra de 10 la derivada és positiva i a la dreta negativa.

Aleshores, $x = 10$ és un màxim relatiu estricte.

L'àrea màxima és:

$S(10) = 50\sqrt{3} \approx 86.60\ m^2$.