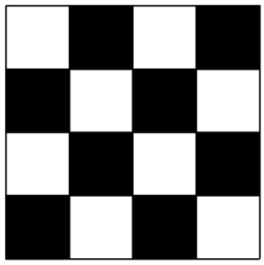
Tauler d’escacs.



Considerem el tauler 4×4 de la figura.

Quants quadrats es poden formar en el tauler (cadascun dels quadrats formats han de contindre quadrats complets blancs o negres).

Si tinguerem un tauler 8×8 quants quadrats es poden formar?

Si tinguerem un tauler $n \times n$ quants quadrats és poden formar?

Solució:

Determinem el nombre de possibles quadrats segons la mesura dels taulers:

Un tauler 1×1 té un quadrat.

Un tauler 2×2 té 1 quadrat 2×2 i 4 quadrats 1×1, en total $1+4=5$.

Un tauler 3×3 té 1 quadrat 3×3 i 4 quadrats 2×2, i 9 quadrats 1×1 en total $1+4+9=14$.

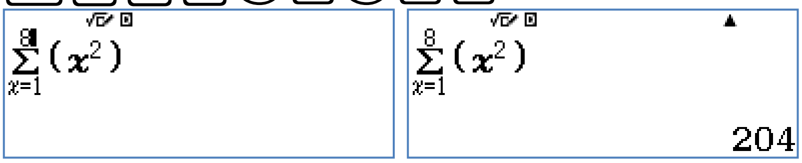
Un tauler 4×4 té 1 quadrat 4×4 i 4 quadrats 3×3, 9 quadrats 2×2 i 16 quadrats 1×1 en total $1+4+9+16=30$.

$1^2+2^2+3^2+4^2=30$.

Un tauler 8×8 té:

$1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2+8^2$ quadrats.

Utilitzant la calculadora (funció de sumes finites):



En total hi ha 204 quadrats.

Si tenim un tauler $n \times n$ el nombre de quadrats és:

$$1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots\ldots+n^2=\sum_{x=1}^{n} x^2 .$$

Podem provar per inducció completa que $\sum_{x=1}^{n} x^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Per a $n=1$, $1=\frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6}$.

Suposem certa la propietat per a $n=k$, $\sum_{x=1}^{k} x^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$.

Provem la propietat per a $n=k+1$.

$$\sum_{x=1}^{k+1} x^2=\sum_{x=1}^{k} x^2+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2=\frac{2k^3+9k^2+13k+6}{6}.$$

$$\frac{(k+1)(k+1+1)(2(k+1)+1)}{6}=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}=\frac{2k^3+9k^2+13k+6}{6}.$$

Aleshores, $\sum_{x=1}^{n} x^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

També es pot resoldre considerant que la successió del nombre de quadrats és una successió aritmètica de tercer ordre per tant un polinomi de tercer grau:

1, 5, 14, 30, 55, 91, ...

Primeres diferències:

4, 9, 16, 25, 36,.....

Segones diferències:

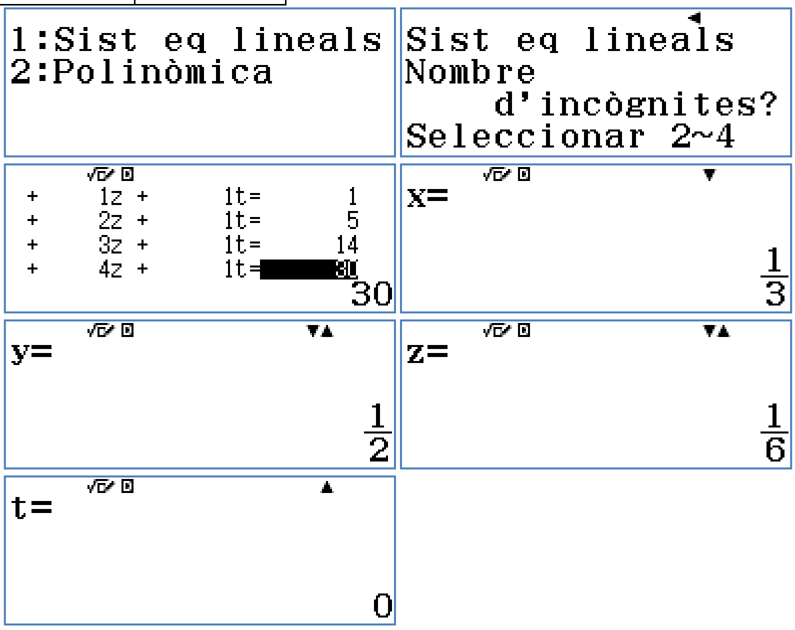
5, 7, 9, 11, ...

Terceres diferències:

2, 2, 2, ...

$$p(n)=a\cdot n^3+b\cdot n^2+c\cdot n^2+d.$$

n	p(n)
1	1
2	5
3	14
4	30



La solució del sistema és, $\begin{cases} a=\frac{1}{3} \\ b=\frac{1}{2} \\ c=\frac{1}{6} \\ d=0 \end{cases}$.

$$\sum_{x=1}^{n} x^2=\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$