

Problema 10

Es donen els punts $A(2, 1, 1)$ i $B(1, 0, -1)$, i la recta r d'equació $r \equiv x - 5 = y = \frac{z+2}{-2}$.

Es demana que calculeu raonadament:

a) El punt C de r que equidista de A i B .

b) L'àrea del triangle $\triangle ABC$.

Selectivitat València juny 2008

Solució:

a)

L'equació paramètrica de la recta $r \equiv x - 5 = y = \frac{z+2}{-2}$ és $r \equiv \begin{cases} x = 5 + \alpha \\ y = \alpha \\ z = -2 - 2\alpha \end{cases}$.

Un punt qualsevol de la recta r de coordenades $C(5 + \alpha, \alpha, -2 - 2\alpha)$.

Si C equidista de A i B si $\|\overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{BC}\|$.

$$\overrightarrow{AC} = (3 + \alpha, \alpha - 1, -3 - 2\alpha). \quad \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{(3 + \alpha)^2 + (\alpha - 1)^2 + (-3 - 2\alpha)^2}.$$

$$\overrightarrow{BC} = (4 + \alpha, \alpha, -1 - 2\alpha). \quad \|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{(4 + \alpha)^2 + \alpha^2 + (-1 - 2\alpha)^2}.$$

$$\sqrt{(3 + \alpha)^2 + (\alpha - 1)^2 + (-3 - 2\alpha)^2} = \sqrt{(4 + \alpha)^2 + \alpha^2 + (-1 - 2\alpha)^2}.$$

Elevant al quadrat i simplificant:

$4\alpha = -2$. Resolent l'equació:

$\alpha = \frac{-1}{2}$. Aleshores el punt de r que equidista de A i B és:

$$C\left(\frac{9}{2}, \frac{-1}{2}, -1\right).$$

b)

$$\overrightarrow{AB} = (-1, -1, -2), \quad \overrightarrow{AC} = \left(\frac{5}{2}, \frac{-3}{2}, -2\right).$$

L'àrea del triangle $\triangle ABC$ és $S_{ABC} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|$.

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & -1 & -2 \\ \frac{5}{2} & \frac{-3}{2} & -2 \end{vmatrix} = -i - 7j + 4k = (-1, -7, 4).$$

$$\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = \sqrt{(-1)^2 + (-7)^2 + 4^2} = \sqrt{66}. \quad \text{Aleshores: } S_{ABC} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = \frac{\sqrt{66}}{2}.$$

