# Problemes de Geometria analítica

**Problema 1:**
Determineu l'equació del plànol que passa pel punt $M(2,1,-1)$ i té vector normal o característic és $n=(1,-2,3)$.

**Problema 2**
Donats els punts $M(3,-1,2)$, $N(4,-2,-1)$.
Determineu l'equació del plànol que passa pel punt M i és perpendicular al vector $\vec{MN}$.

**Problema 3**
Determineu l'equació del plànol que passa pels punts $M(2,-1,3)$, $N(3,1,2)$ i és paral·lel al vector $v=(3,-1,-4)$.

**Problema 4**
Determineu l'equació del plànol que passa pels punts $L(3,-1,2)$, $M(4,-1,-1)$, $N(2,0,2)$.

**Problema 5:**
Determineu el punt projecció de $P(-1,1,-2)$ sobre el plànol que passa pels punts $A(1,-1,1)$, $B(-2,1,3)$, $C(4,-5,-2)$.
Calculeu la distància entre el punt P i el plànol anterior.

**Problema 6**
Donats els punts $A(2,3,1)$, $B(4,1,-2)$, $C(6,3,7)$, $D(-5,-4,4)$. Calculeu:
a) El volum del tetraedre ABCD.
b) L'àrea total del tetraedre.
c) L'altura sobre la cara $\overset{\Delta}{ABC}$.

**Problema 7**
Determineu el punt Q simètric del punt $P(2,-5,7)$ respecte de la recta que passa pels punts $A(5,4,6)$, $B(-1,-7,4)$.

**Problema 8**
Donats els punts $A(3,-4,7)$, $B(-1,3,2)$, $C(1,2,-3)$, determineu:
a) El vèrtex D el paral·lelogram ABCD.
b) La mesura dels costats del paral·lelogram ABCD.
c) L'àrea del paral·lelogram ABCD.
d) Els angles del paral·lelogram ABCD.

**Problema 9**
Donats els punts $A(2,0,3)$, $P(1,-3,2)$ i el vector $v=(2,1,3)$. Determineu:
a) L'equació general de la recta r que passa pel punt P i té direcció v.
b) L'equació general del plànol que passa pel punt P i conté la recta r.
c) La distància del punt A a la recta r.

**Problema 10**

Es donen els punts $A(2,1,1)$ i $B(1,0,-1)$, i la recta r d'equació $r \equiv x-5 = y = \frac{z+2}{-2}$.

Es demana que calculeu raonadament:
a) El punt C de r que equidista de A i B.
b) L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
*Selectivitat València juny 2008*

**Problema 11**

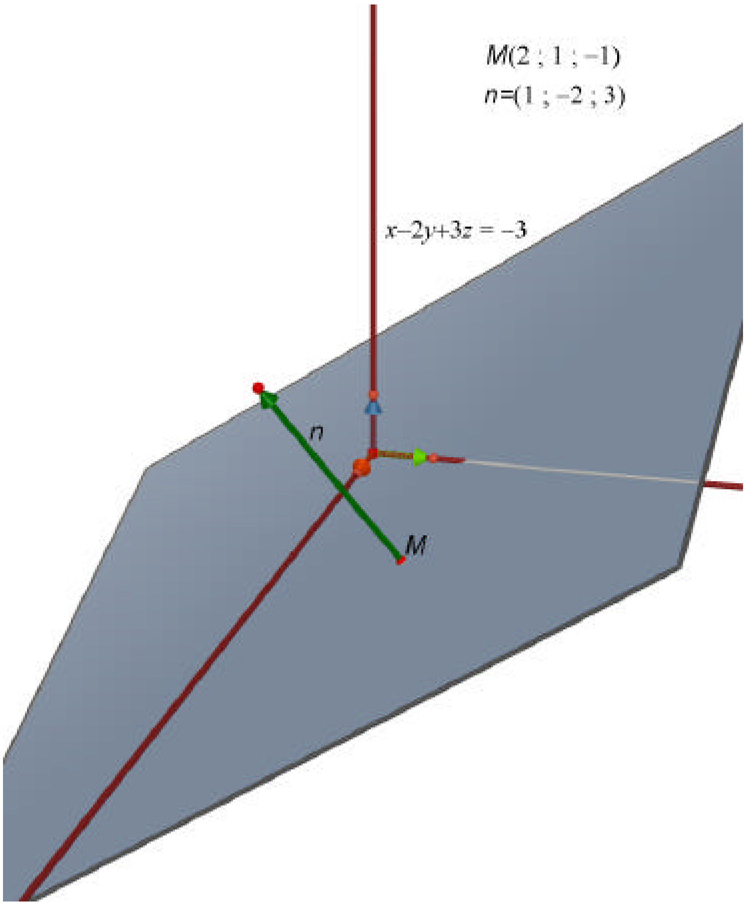
Siga la recta r que passa pels punts $A(1,0,2)$ i $B(0,1,3)$.
Siga la recta s que passa pels punts $C(0,3,0)$ i $D(1,2,1)$.
Determineu la posició relativa de r i s.
Calculeu la distància entre les rectes r i s.

**Problema 12**

Les bases d'un paral·lelepípede són ABCD i EFGH on $A(2,3,1)$, $B(4,3,1)$, $C(2,7,1)$, $E(8,0,0)$.
a) Determineu les coordenades de D, F, G, H.
b) Calculeu el volum del paral·lelepípede.
c) Calculeu l'altura del paral·lelepípede sobre la base ABCD..

**Problema 1:**
Determineu l'equació del plànol que passa pel punt $M(2,1,-1)$ i té vector normal o característic és $n=(1,-2,3)$.

Solució:
En el plànol d'equació general $\Pi \equiv ax+by+cz+d=0$ el vector normal és $n=(a,b,c)$.
Aleshores, l'equació del plànol és:
$\Pi \equiv x-2y+3z+d=0$.
El plànol passa pel punt $M(2,1,-1)$, aleshores satisfà la seua equació:
$2-2\cdot 1+3(-1)+d=0$. Resolent l'equació:
$d=3$.
L'equació del plànol és:
$\Pi \equiv x-2y+3z+3=0$.



**Problema 2**

Donats els punts $M(3,-1,2)$, $N(4,-2,-1)$.

Determineu l'equació del plànol que passa pel punt M i és perpendicular al vector $\vec{MN}$.

Solució:

Determinem les components del vector $\vec{MN}$:

$\vec{MN} = (1,-1,-3)$.

En el plànol d'equació general $\Pi \equiv ax + by + cz + d = 0$ el vector normal és $n = (a, b, c)$.

Aleshores, l'equació del plànol és:

$\Pi \equiv x - y - 3z + d = 0$.

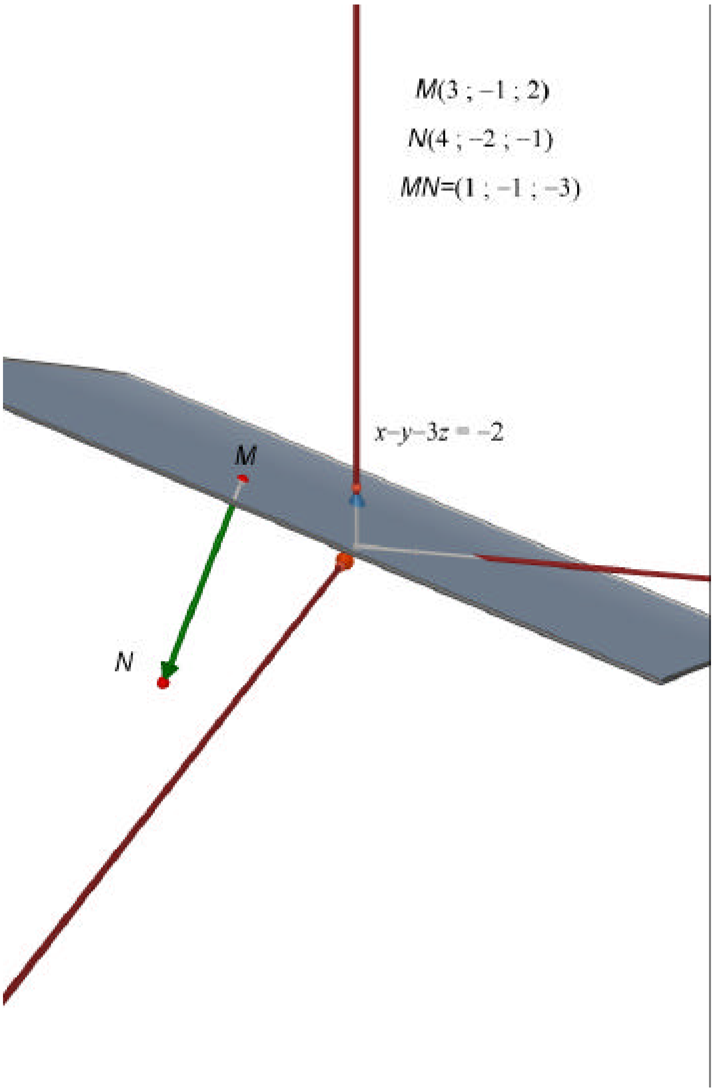
El plànol passa pel punt $M(3,-1,2)$, aleshores satisfà la seua equació:

$3 - (-1) - 3 \cdot 2 + d = 0$. Resolent l'equació:

$d = 2$.

L'equació del plànol és:

$\Pi \equiv x - y - 3z + 2 = 0$.



**Problema 3**

Determineu l'equació del plànol que passa pels punts $M(2,-1,3)$, $N(3,1,2)$ i és paral·lel al vector $v=(3,-1,-4)$.

Solució:

El vector format pels punts M, N té components:

$\vec{MN}=(1,2,-1)$.

$\{\vec{MN}, \vec{v}\}$ són linealment independents.

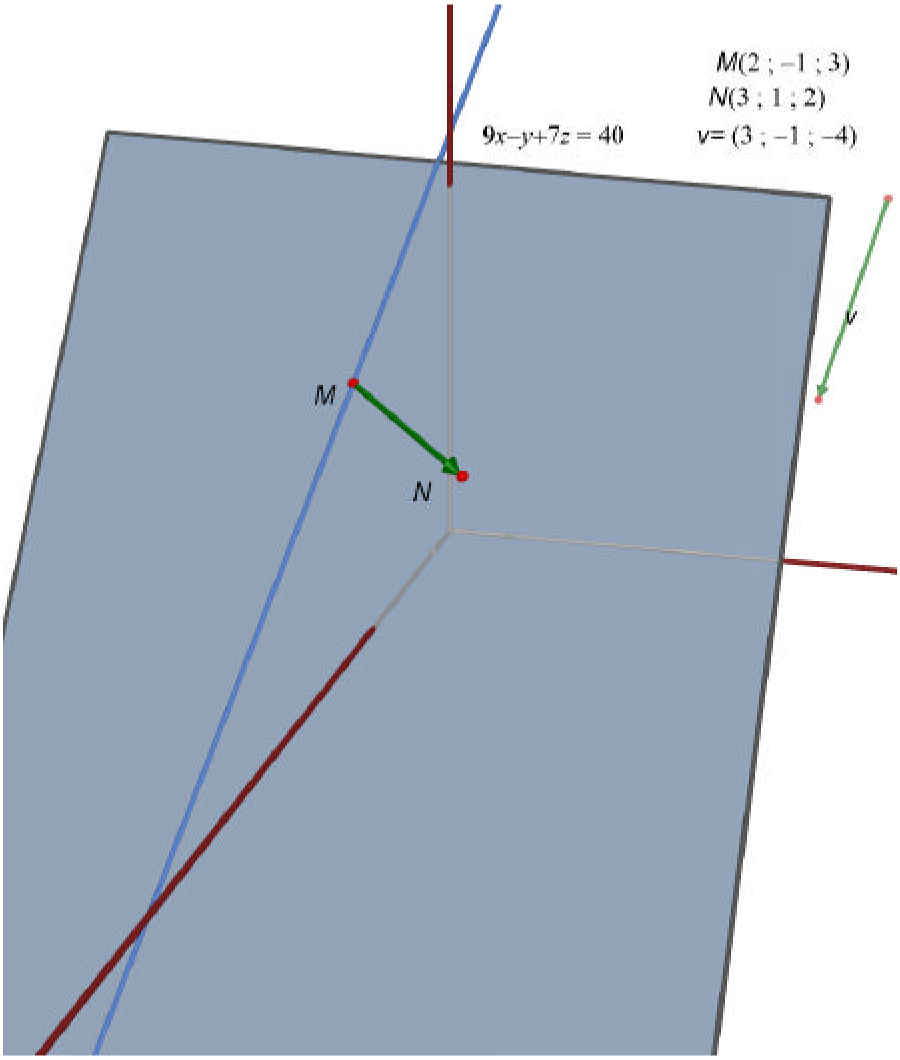
L'equació del plànol que cerquem passa pel punt M i té direcció $\{\vec{MN}, \vec{v}\}$.

La seua equació és:

$$\Pi \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 0 .$$

Simplificant:

$\Pi \equiv -9x + y - 7z + 40 = 0$.

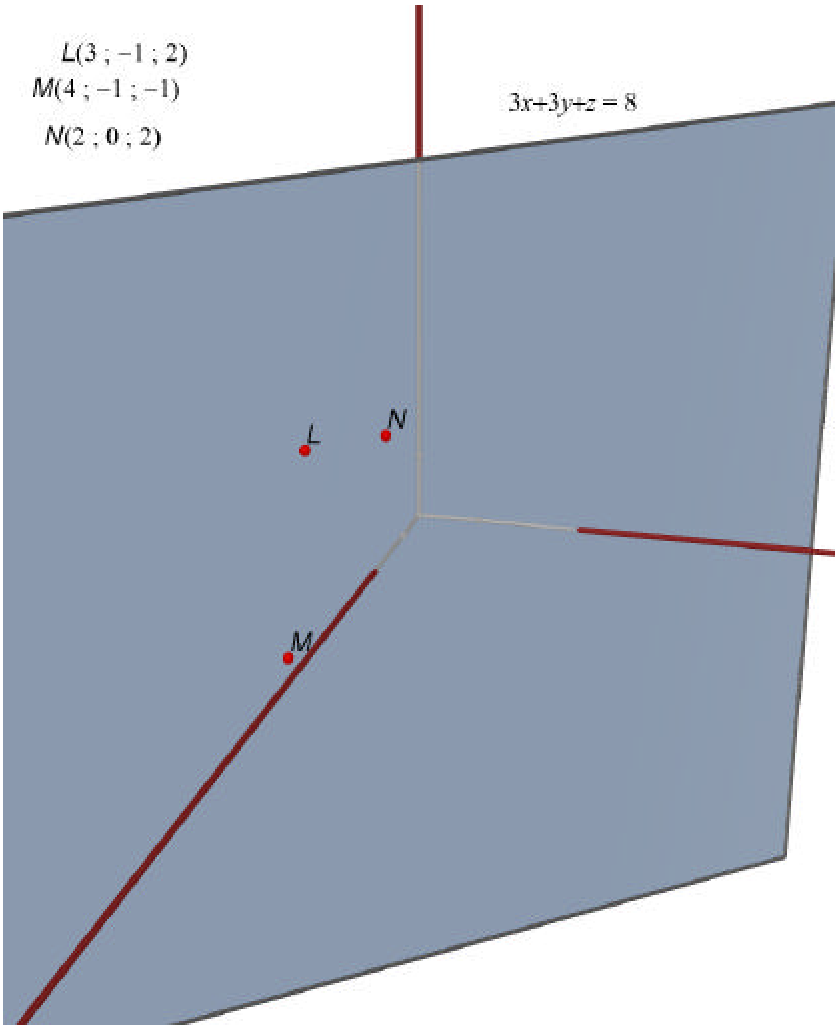


**Problema 4**
Determineu l'equació del plànol que passa pels punts $L(3,-1,2)$, $M(4,-1,-1)$, $N(2,0,2)$.

Solució:
Les components dels vectors $\vec{LM}, \vec{LN}$ són:
$\vec{LM} = (1,0,-3)$, $\vec{LN} = (-1,1,0)$.
$\{\vec{LM}, \vec{LN}\}$ són linealment independents.
L'equació del plànol que cerquem passa pel punt L i té direcció $\{\vec{LM}, \vec{LN}\}$.

$$\Pi \equiv \begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Simplificant:
$\Pi \equiv 3x + 3y + z - 8 = 0$.



**Problema 5:**
Determineu el punt projecció de $P(-1,1,-2)$ sobre el plànol que passa pels punts $A(1,-1,1)$, $B(-2,1,3)$, $C(4,-5,-2)$.
Calculeu la distància entre el punt P i el plànol anterior.

Solució:
Calculem les components dels vectors $\vec{AB},\vec{AC}$:
$\vec{AB}=(-3,2,2)$, $\vec{AC}=(3,-4,-3)$.
$\{\vec{AB},\vec{AC}\}$ són linealment independents.
L'equació del plànol que pel punt A i té direcció $\{\vec{AB},\vec{AC}\}$ és:

$$\Pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 3 & -4 & -3 \end{vmatrix} = 0 .$$

Simplificant:
$\Pi \equiv 2x-3y+6z-11=0$.
El vector característic és:
$n=(2,-3,6)$.
La recta perpendicular al plànol $\Pi$ que passa per P té equació:
$r \equiv (x,y,z)=(-1,1,-2)+\alpha(2,-3,6)$.
El punt $P_0$ projecció de P sobre el plànol $\Pi$ és la intersecció del plànol $\Pi$ i la recta r:

$$\begin{cases} (x,y,z)=(-1+2\alpha,1-3\alpha,-2+6\alpha) \\ 2x-3y+6z=11 \end{cases}$$

$2(-1+2\alpha)-3(1-3\alpha)+6(-2+6\alpha)=11$. $\alpha=\dfrac{4}{7}$.

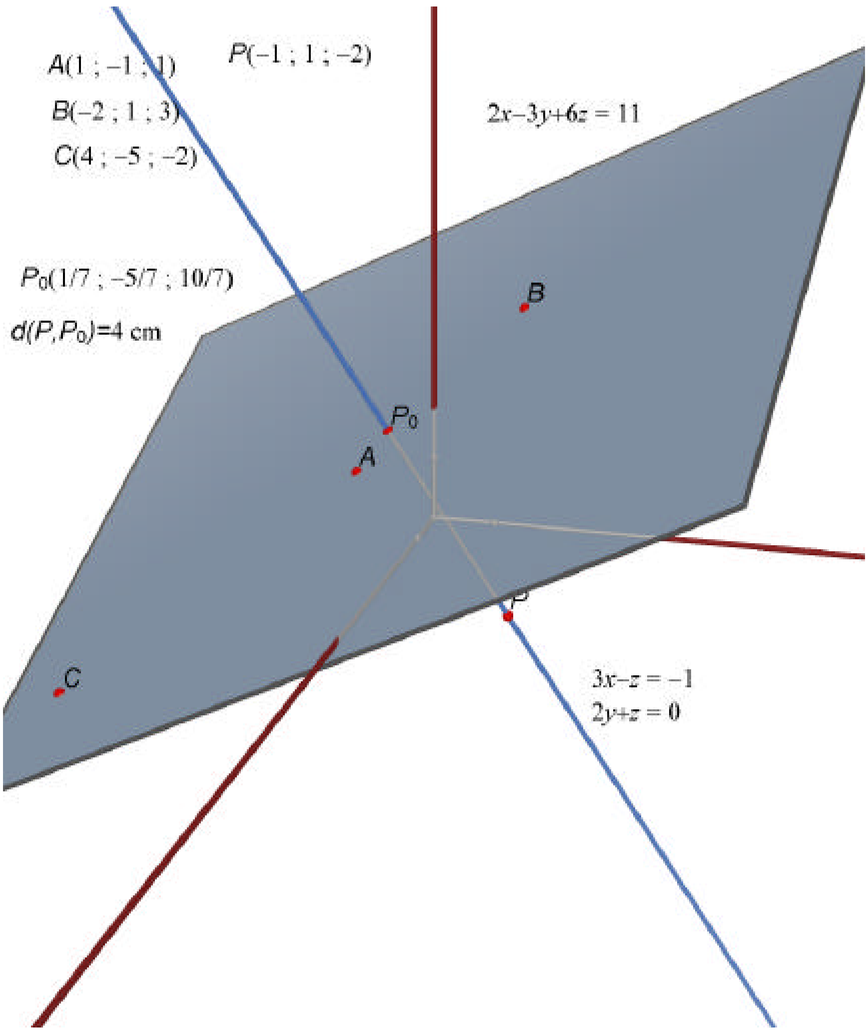
La solució del sistema és $\begin{cases} x=\dfrac{1}{7} \\ y=\dfrac{-5}{7} \\ z=\dfrac{10}{7} \end{cases}$, el punt projecció és $P_0\left(\dfrac{1}{7},\dfrac{-5}{7},\dfrac{10}{7}\right)$.

La distància del punt P al plànol $\Pi$ és:

$$d(P,\Pi)=d(P,P_0)=\left\|\overrightarrow{PP_o}\right\|=\left\|\left(\frac{8}{7},\frac{-12}{7},\frac{24}{7}\right)\right\|=4 .$$

Altra forma:

$$d(P,\Pi)=\left|\frac{2\cdot(-1)-3\cdot 1+6\cdot(-2)-11}{\sqrt{2^2+(-3)^2+6^2}}\right|=4 .$$


A(1 ; −1 ; 1)
B(−2 ; 1 ; 3)
C(4 ; −5 ; −2)
P(−1 ; 1 ; −2)
2x−3y+6z = 11
P0(1/7 ; −5/7 ; 10/7)
d(P,P0)=4 cm
B
P0
A
P
C
3x−z = −1
2y+z = 0

**Problema 6**

Donats els punts $A(2,3,1)$, $B(4,1,-2)$, $C(6,3,7)$, $D(-5,-4,4)$. Calculeu:

a) El volum del tetraedre ABCD.

b) L'àrea total del tetraedre.

c) L'altura sobre la cara $\overset{\Delta}{ABC}$.

Solució:

Calculem les components dels vectors $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$

$\vec{AB} = (2,-2,-3), \vec{AC} = (4,0,6), \vec{AD} = (-7,-7,3)$.

a)

El volum del tetraedre és:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left\| \begin{matrix} 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & -7 & 3 \end{matrix} \right\| = 46u^3.$$

b)

Calcularem l'àrea de les quatre cares del tetraedre.

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = (-12,-24,8).$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left\| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right\| = \frac{1}{2}\left\| (-12,-24,8) \right\| = \frac{1}{2}\sqrt{(-12)^2 + (-24)^2 + 8^2} = 14u^2.$$

$$\vec{AB} \times \vec{AD} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -2 & -3 \\ -7 & -7 & 3 \end{vmatrix} = (-27,15,-28).$$

$$S_{ABD} = \frac{1}{2}\left\| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} \right\| = \frac{1}{2}\left\| (-27,15,-28) \right\| = \frac{1}{2}\sqrt{(-27)^2 + 15^2 + (-28)^2} = \frac{\sqrt{1738}}{2}u^2 \approx 20.84u^2$$

$$\vec{AC} \times \vec{AD} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & -7 & 3 \end{vmatrix} = (42,-54,-28).$$

$$S_{ACD} = \frac{1}{2}\left\| \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD} \right\| = \frac{1}{2}\left\| (42,-54,-28) \right\| = \frac{1}{2}\sqrt{42^2 + (-54)^2 + (-28)^2} = \sqrt{1366}u^2 \approx 36.96u^2$$

$$\vec{BC} \times \vec{BD} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2 & 9 \\ -9 & -5 & 6 \end{vmatrix} = (57,-93,8).$$

$$S_{BCD} = \frac{1}{2}\left\| \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD} \right\| = \frac{1}{2}\left\| (57,-93,8) \right\| = \frac{1}{2}\sqrt{57^2 + (-93)^2 + 8^2} = \frac{\sqrt{11962}}{2}u^2 \approx 54.69u^2.$$

L'àrea total del tetraedre és:

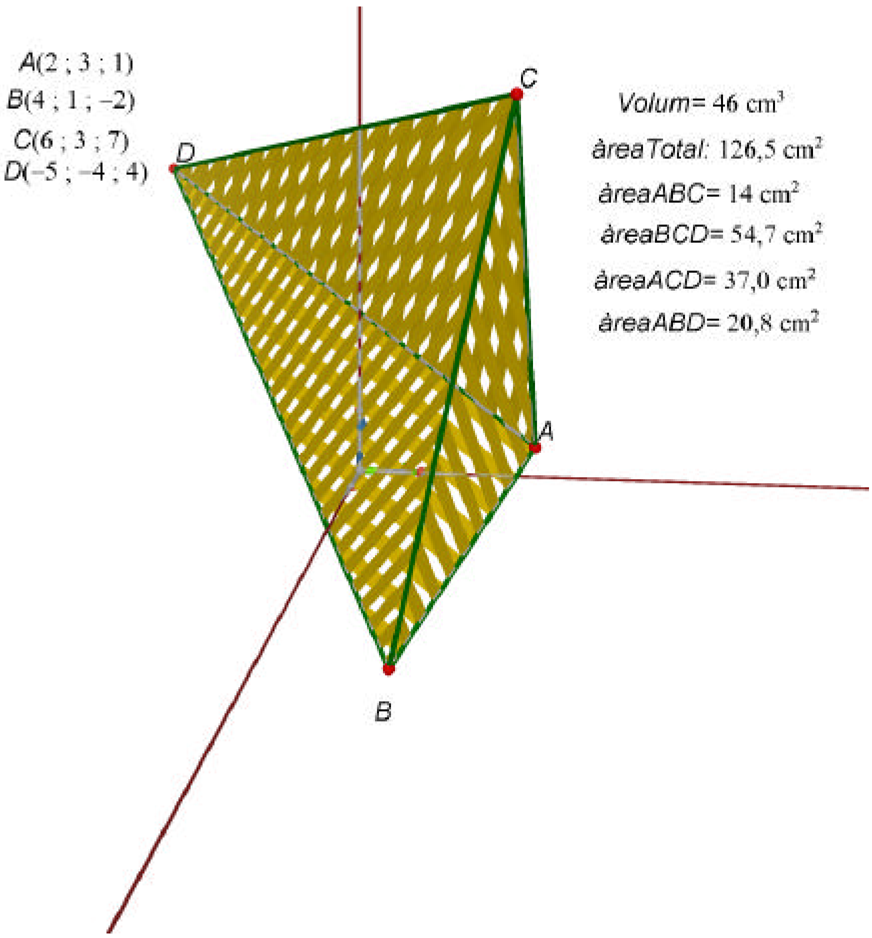
$$S_{ABCD} = 14 + \frac{\sqrt{1738}}{2} + \sqrt{1366} + \frac{\sqrt{11962}}{2} \approx 126.49u^2.$$

c)

El volum del tetraedre és

$V_{ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABC} \cdot h = 46u^3$, on h és l'altura sobre la cara $\overset{\Delta}{ABC}$.

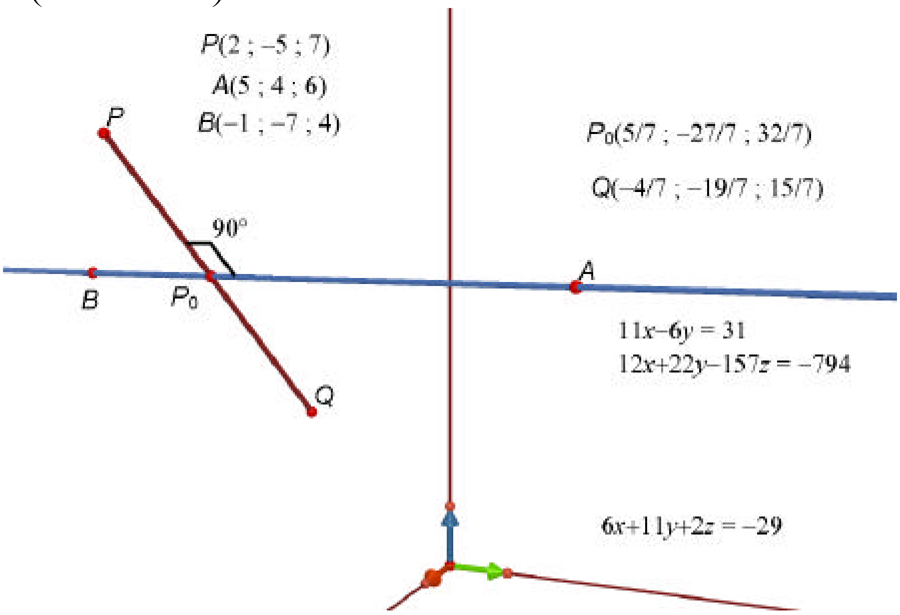
$\frac{1}{3}14 \cdot h = 46$. $h = \frac{69}{7}u = 9.86u$.



A(2 ; 3 ; 1)
B(4 ; 1 ; −2)
C(6 ; 3 ; 7)
D(−5 ; −4 ; 4)
C
D
A
B
Volum= 46 cm³
àreaTotal: 126,5 cm²
àreaABC= 14 cm²
àreaBCD= 54,7 cm²
àreaACD= 37,0 cm²
àreaABD= 20,8 cm²

**Problema 7**
Determineu el punt Q simètric del punt $P(2,-5,7)$ respecte de la recta que passa pels punts $A(5,4,6)$, $B(-1,-7,4)$.

Solució:
Determinem les components del vector $\vec{AB}$:
$\vec{AB}=(-6,-11,-2)$.
L'equació de la recta que passa pels punts A, B és:
$r\equiv(x,y,z)=(5,4,6)+\alpha(6,11,2)$.
Determinem el punt projecció $P_0$ de P sobre la recta r:
$P_0(5+6\alpha,4+11\alpha,6+2\alpha)$.
Calculem les components del vector $\vec{PP_0}$:
$\vec{PP_0}=(3+6\alpha,9+11\alpha,-1+2\alpha)$.
Els vectors $\vec{PP_0}$, $\vec{AB}$ són ortogonals. El seu producte escalar és zero:
$(3+6\alpha,9+11\alpha,-1+2\alpha)(-6,-11,-2)=0$.
$-161\alpha-115=0$. Resolent l'equació:
$\alpha=\frac{-5}{7}$.
El punt projecció $P_0$ té coordenades:
$$P_0\left(5+6\left(\frac{-5}{7}\right),4+11\left(\frac{-5}{7}\right),6+2\left(\frac{-5}{7}\right)\right)$$
$$P_0\left(\frac{5}{7},\frac{-27}{7},\frac{32}{7}\right).$$
El punt simètric $Q(x,y,z)$ de P respecte de $P_0$ compleix:
$\vec{PQ}=2\vec{PP_0}$.
$$(x-2,y+5,z-7)=2\left(\frac{-9}{7},\frac{8}{7},\frac{-17}{7}\right).$$
$$Q\left(\frac{-4}{7},\frac{-19}{7},\frac{15}{7}\right).$$



**Problema 8**

Donats els punts $A(3,-4,7)$, $B(-1,3,2)$, $C(1,2,-3)$, determineu:

a) El vèrtex D el paral·lelogram ABCD.
b) La mesura dels costats del paral·lelogram ABCD.
c) L'àrea del paral·lelogram ABCD.
d) Els angles del paral·lelogram ABCD.

Solució:

$\vec{AB}=(-4,7,-5)$, $\vec{BC}=(2,-1,-5)$.

a)
Siga $D(x,y,z)$.

ABCD és un paral·lelogram si $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$.

$(x-3,y+4,z-7)=(2,-1,-5)$. Igualant les components dels vectors:

$\begin{cases} x-3=2 \\ y+4=-1 \\ z-7=-5 \end{cases}$. Resolent el sistema: $D(5,-5,2)$.

b)
Les mesures dels costats del paral·lelogram són:

$\overline{AB}=\overline{CD}=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{(-4)^2+7^2+(-5)^2}=3\sqrt{10}\approx 9.49u$.

$\overline{AD}=\overline{DC}=\left\|\overrightarrow{BC}\right\|=\sqrt{2^2+(-1)^2+(-5)^2}=\sqrt{30}\approx 5.48u$.

c)
L'àrea del paral·lelogram ABCD és:

$S_{ABCD}=\left\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right\|$.

$\vec{AB}\times\vec{AD}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -4 & 7 & -5 \\ 2 & -1 & -5 \end{vmatrix}=(-40,-30,-10)$

$S_{ABCD}=\left\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right\|=\sqrt{(-40)^2+(-30)^2+(-10)^2}=10\sqrt{26}\approx 50.99u^2$.

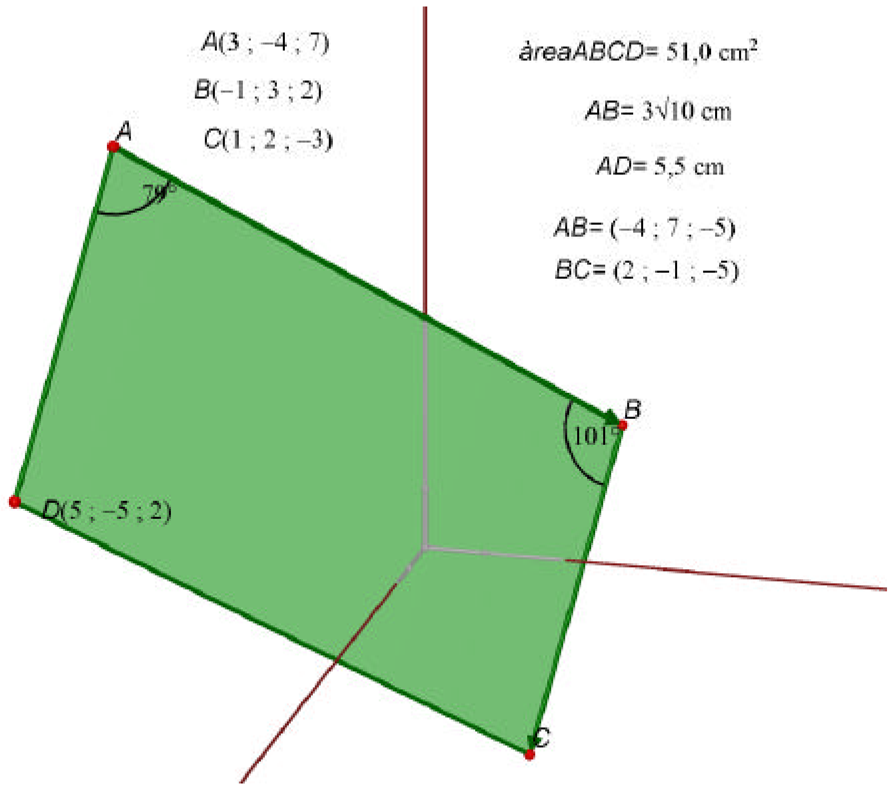
d)
Per calcular els angles utilitzarem el producte escalar:

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{AD}\right\|\cdot\cos A$.

$(-4,7,-5)(2,-1,-5)=\sqrt{(-4)^2+7^2+(-5)^2}\sqrt{2^2+(-1)^2+(-5)^2}\cos A$.

$\cos A=\dfrac{\sqrt{3}}{9}$, $A=C=\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{9}\approx 78^{o}54'15''$.

$B=D=180^{o}-A=101^{o}5'45''$.


A(3 ; −4 ; 7)
B(−1 ; 3 ; 2)
C(1 ; 2 ; −3)
àreaABCD= 51,0 cm²
AB= 3√10 cm
AD= 5,5 cm
AB= (−4 ; 7 ; −5)
BC= (2 ; −1 ; −5)
A
79°
B
101°
D(5 ; −5 ; 2)
C

**Problema 9**

Donats els punts $A(2,0,3)$, $P(1,-3,2)$ i el vector $v=(2,1,3)$. Determineu:

a) L'equació general de la recta r que passa pel punt P i té direcció v.
b) L'equació general del plànol que passa pel punt P i conté la recta r.
c) La distància del punt A a la recta r.

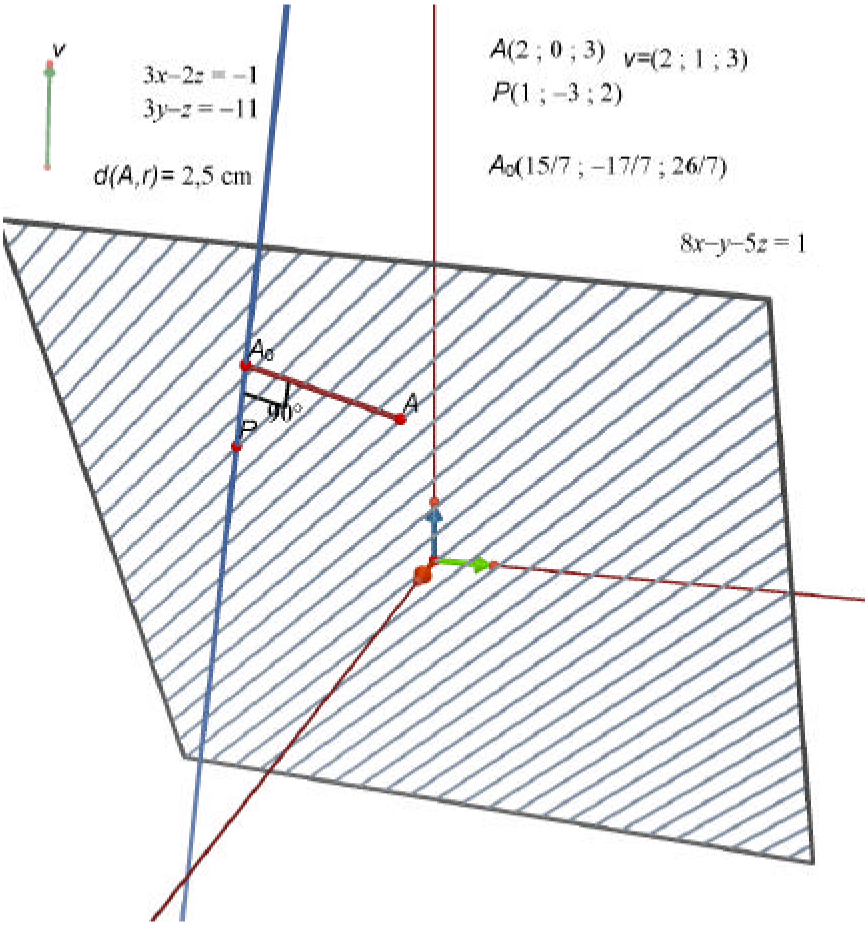
Solució:
a)
L'equació vectorial de la recta r és:
$r \equiv (x,y,z)=(1,-3,2)+\alpha(2,1,3)$. L'equació contínua és:
$r \equiv \dfrac{x-1}{2}=y+3=\dfrac{z-2}{3}$. L'equació general és:
$r \equiv \begin{cases} x-2y-7=0 \\ 3y-z+11=0 \end{cases}$.
b)
Les components del vector $\vec{AP}$ són:
$\vec{AP}=(-1,-3,-1)$
El plànol que cerquem és el que passa pel punt A i té direcció $\{\vec{AP},v\}$. La seua equació és:
$\Pi \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y & z-3 \\ -1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}=0$. Simplificant:
$\Pi \equiv -8x+y+5z+1=0$.
c)
Mètode 1:
Determinem el punt projecció $A_0$ de A sobre la recta r.
$A_0(1+2\alpha,-3+\alpha,2+3\alpha)$.
Les coordenades del vector $\vec{AA_0}$ són:
$\vec{AA_0}=(-1+2\alpha,-3+\alpha,-1+3\alpha)$.
Els vectors $\vec{AA_0}$, v són ortogonals.
$\vec{AA_0}\cdot v=0$.
$(-1+2\alpha,-3+\alpha,-1+3\alpha)(2,1,3)=0$.
$-2+4\alpha-3+\alpha-3+9\alpha=0$. Resolent l'equació:
$\alpha=\dfrac{4}{7}$. El punt projecció té coordenades:
$A_0=\left(\dfrac{15}{7},\dfrac{-1}{7},\dfrac{26}{7}\right)$. La distància de A la recta r és igual a la distància entre A i $A_0$.
$d(A,r)=\left\|\overrightarrow{AA_0}\right\|=\left\|\left(\dfrac{1}{7},\dfrac{-17}{7},\dfrac{5}{7}\right)\right\|=\sqrt{\left(\dfrac{1}{7}\right)^2+\left(\dfrac{-17}{7}\right)^2+\left(\dfrac{5}{7}\right)^2}=\dfrac{3\sqrt{35}}{7}\approx 2.54u$.
Mètode 2:
$d(A,r)=\dfrac{\left\|\overrightarrow{AP}\times v\right\|}{\|v\|}$.

$$\vec{AP} \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (-8,1,5).$$

$$\left\|\overrightarrow{AP} \times v\right\| = \sqrt{(-8)^2 + 1^2 + 5^2} = 3\sqrt{10}\,.$$

$$\|v\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{14}\,.$$

$$d(A,r) = \frac{\left\|\overrightarrow{AP} \times v\right\|}{\|v\|} = \frac{3\sqrt{10}}{\sqrt{14}} = \frac{3\sqrt{35}}{7} \approx 2.54u\,.$$



**Problema 10**

Es donen els punts $A(2,1,1)$ i $B(1,0,-1)$, i la recta r d'equació $r \equiv x-5 = y = \frac{z+2}{-2}$.

Es demana que calculeu raonadament:
a) El punt C de r que equidista de A i B.
b) L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
*Selectivitat València juny 2008*

Solució:
a)

L'equació paramètrica de la recta $r \equiv x-5 = y = \frac{z+2}{-2}$ és $r \equiv \begin{cases} x = 5+\alpha \\ y = \alpha \\ z = -2-2\alpha \end{cases}$.

Un punt qualsevol de la recta r de coordenades $C(5+\alpha, \alpha, -2-2\alpha)$.

Si C equidista de A i B si $\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \left\|\overrightarrow{BC}\right\|$.

$\overrightarrow{AC} = (3+\alpha, \alpha-1, -3-2\alpha)$. $\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{(3+\alpha)^2 + (\alpha-1)^2 + (-3-2\alpha)^2}$.

$\overrightarrow{BC} = (4+\alpha, \alpha, -1-2\alpha)$. $\left\|\overrightarrow{BC}\right\| = \sqrt{(4+\alpha)^2 + \alpha^2 + (-1-2\alpha)^2}$.

$\sqrt{(3+\alpha)^2 + (\alpha-1)^2 + (-3-2\alpha)^2} = \sqrt{(4+\alpha)^2 + \alpha^2 + (-1-2\alpha)^2}$.

Elevant al quadrat i simplificant:
$4\alpha = -2$. Resolent l'equació:

$\alpha = \frac{-1}{2}$. Aleshores el punt de r que equidista de A i B és:

$C\left(\frac{9}{2}, \frac{-1}{2}, -1\right)$.

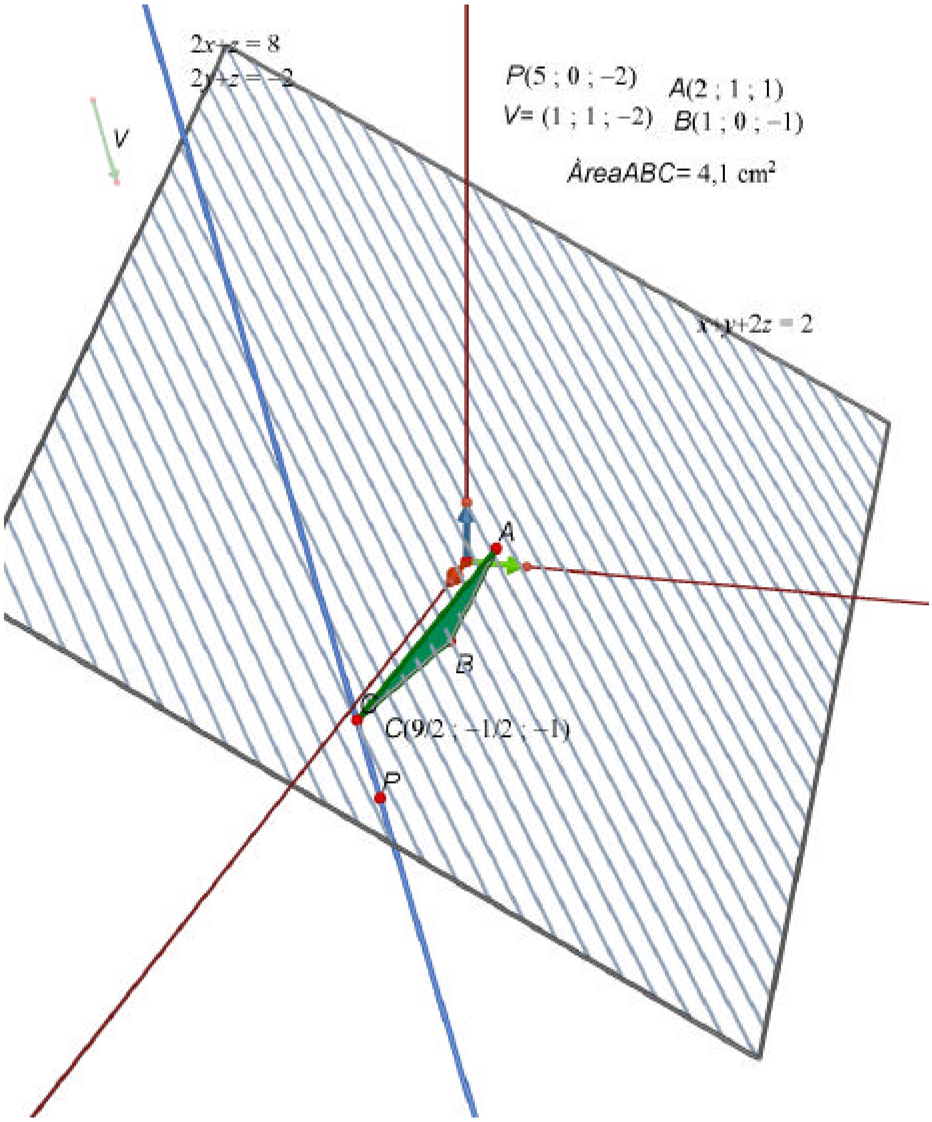
b)

$\overrightarrow{AB} = (-1,-1,-2)$, $\overrightarrow{AC} = \left(\frac{5}{2}, \frac{-3}{2}, -2\right)$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és $S_{ABC} = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right\|$.

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & -1 & -2 \\ \frac{5}{2} & \frac{-3}{2} & -2 \end{vmatrix} = -i - 7j + 4k = (-1, -7, 4).$$

$\left\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{(-1)^2 + (-7)^2 + 4^2} = \sqrt{66}$. Aleshores: $S_{ABC} = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right\| = \frac{\sqrt{66}}{2}$.


$2x+z=8$
$2y+z=-2$
$V$
$P(5\ ;\ 0\ ;\ -2)$
$V=(1\ ;\ 1\ ;\ -2)$
$A(2\ ;\ 1\ ;\ 1)$
$B(1\ ;\ 0\ ;\ -1)$
ÀreaABC= 4,1 cm²
$x+y+2z=2$
A
B
$C(9/2\ ;\ -1/2\ ;\ -1)$
P

**Problema 11**

Siga la recta r que passa pels punts $A(1,0,2)$ i $B(0,1,3)$.

Siga la recta s que passa pels punts $C(0,3,0)$ i $D(1,2,1)$.

Determineu la posició relativa de r i s.

Calculeu la distància entre les rectes r i s.

Solució:

El vector director de la recta r és $\vec{AB} = (-1,1,1)$.

El vector director de la recta s és $\vec{CD} = (1,-1,1)$.

Els vectors $\{\vec{AB}, \vec{CD}\}$ són linealment independents ja que no són proporcionals.

Aleshores les dues rectes són secants o és creuen.

$\vec{AC} = (-1,3,-2)$.

Calculem el determinant format pels tres vectors:

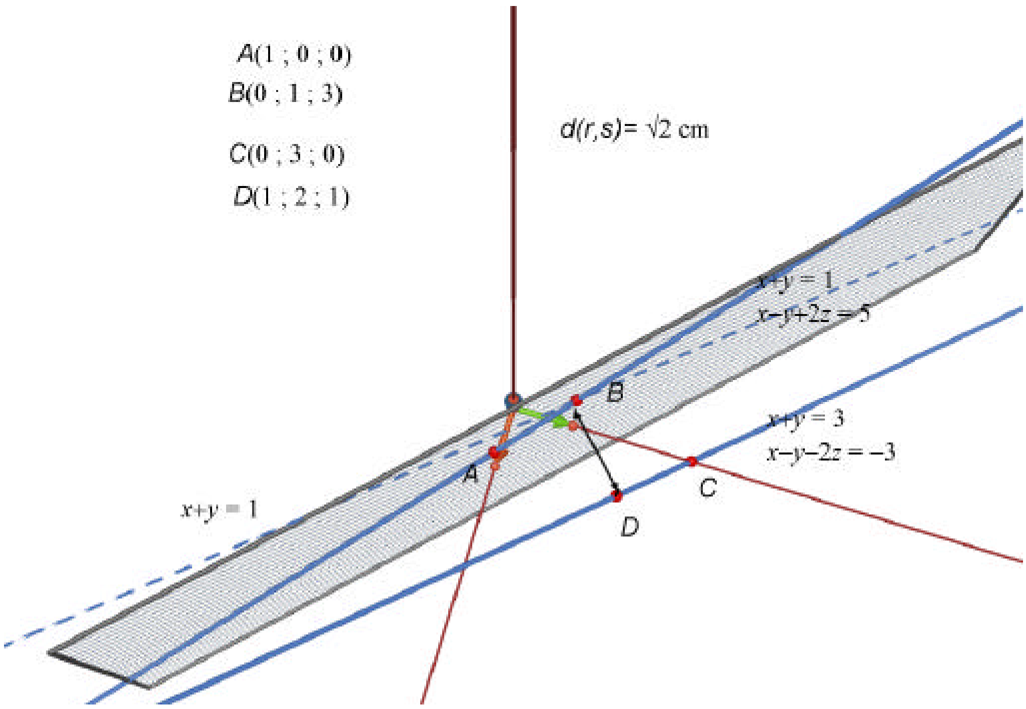
$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$. Aleshores $\{\vec{AB}, \vec{CD}, \overline{AC}\}$ són linealment independents.

Per tant, les rectes r i s és creuen.

La distància entre les dues rectes és: $d(r,s) = \left| \dfrac{[\vec{AB}, \vec{CD}, \vec{AC}]}{\|\vec{AB} \times \vec{CD}\|} \right|$.

$\vec{AB} \times \vec{CD} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (2, 2, 0)$. $\|\vec{AB} \times \vec{CD}\| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 0^2} = 2\sqrt{2}$.

$d(r,s) = \left| \dfrac{[\vec{AB}, \vec{CD}, \vec{AC}]}{\|\vec{AB} \times \vec{CD}\|} \right| = \dfrac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.



**Problema 12**

Les bases d'un paral·lelepípede són ABCD i EFGH on $A(2,3,1)$, $B(4,3,1)$, $C(2,7,1)$, $E(8,0,0)$.

a) Determineu les coordenades de D, F, G, H.
b) Calculeu el volum del paral·lelepípede.
c) Calculeu l'altura del paral·lelepípede sobre la base ABCD..

Solució:

$\vec{AB} = (2,0,0)$, $\vec{BC} = (-2,4,0)$, $\vec{AE} = (6,-3,-1)$.

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, $(x-2, y-3, z-1) = (-2,4,0)$, aleshores, $D(0,7,1)$.

$\vec{EF} = \vec{AB}$, $(x-8, y-0, z-0) = (2,0,0)$, aleshores, $F(10,0,0)$.

$\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{BC}$, $(x-8, y-0, z-0) = (-2,4,0)$, aleshores, $H(6,4,0)$.

$\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{BC}$, $(x-10, y-0, z-0) = (-2,4,0)$, aleshores, $G(8,4,0)$.

b)

El volum del paral·lelepípede és: $V = \left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AE}\right]\right|$.

$$V = \left\| \begin{matrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 6 & -3 & -1 \end{matrix} \right\| = |-8| = 8u^3 .$$

c)

El volum del paral·lelepípede és: $V = \left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AE}\right]\right| = S_{ABCD} \cdot h = \left\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}\right\| \cdot h$.

$$\vec{AB} \times \vec{BC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 8) . \quad \left\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}\right\| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 8^2} = 8 .$$

$8 = 8 \cdot h$. Aleshores, $h = 1u$